a) Discursos

ESTADÍSTICA, LÓGICA Y VERDAD

Discurso leído por el Académico electo correspondiente,
Rdo. P. Enrique Chacón Xérica, S. J., ***en el acto de su recepción,***
14 de mayo de 1959

Excelentísimo Sr. Presidente:
Dignísimas Autoridades:
Ilustrísimos Señores Académicos:
Señoras y señores:

Al presentarme ante vosotros, Señores Académicos, para ser admitido en esta Corporación sin más méritos que vuestra benevolencia, no se me ofrece otra cosa que expresaros mi más profundo agradecimiento al mismo tiempo que pongo a vuestra disposición toda mi buena voluntad y mis deseos de colaborar en cuanto esté de mi parte al incremento de las ciencias económicas y financieras de tanta importancia en los momentos actuales.

Pensando en el tema a desarrollar en este discurso de recepción he creído que tendría alguna utilidad, en estos tiempos de tanto incremento de la Estadística como auxiliar potente de todas las demás ciencias en las que la experiencia juega un papel importante, estudiar su valor en cuanto nos da a conocer la verdad y la realidad objetiva de las leyes económicas, tratando de ver hasta qué punto sus consecuencias se pueden considerar como verdaderas, exactas o aproximadas y pueden conocerse a base de la observación y del modelo matemático acoplado entre sí y formando una única ciencia estadística.

Ya sabemos que en sus primeros tiempos los afanes de esta ciencia se dirigían a recoger un número grande de elementos, ordenarlos y clasificarlos según un criterio más o menos arbitrario y presentarlos de este modo para su mejor comprensión. De ordinario no intentaba deducir leyes generales obtenidas por inducción, como en la actualidad.

La verdadera ciencia parece exigir, no tanto el conocimiento de datos concretos, que por sí mismos la limitan, cuanto una extensión por encima y más allá de ellos; requiere leyes o ideas generales que gobiernen los acontecimientos en su forma fundamental, aunque en la particularización de cada momento intervengan elementos no fáciles de predecir.

Hay, por lo tanto, dos elementos importantes, pero en muchos casos imposibles de coordinar por la limitación humana: primero, la experiencia de los hechos tomados de la realidad y segundo, la expresión de unos principios generales que los rijan y gobiernen, de modo que una vez establecidos sea obvia la predicción de un futuro, o la reconstrucción exacta de un hecho pasado.

La dificultad de esta coordinación proviene de varias causas. La primera es la imposibilidad de tener presente los innumerables elementos, en número infinito, que intervienen en cada hecho, unos de gran importancia, y que aparecen a nuestros ojos como causas, y otros cada vez menores y sobre todo desconocidos para nosotros, pues somos incapaces de abarcar toda esa gama de causas pequeñas. El segundo obstáculo es el desconocimiento a priori de las fuerzas que actúan y que causan los efectos que consideramos, desconocimiento tan radical que ha inducido a la teoría de la indeterminación, no sólo en cuanto a nuestra percepción y conocimiento de dichas fuerzas, sino respecto de ellas mismas, teoría, claro está, que no podemos compartir pues todos los seres creados por Dios tienen su finalidad determinada en sus esencias y todo su modo de actuar está de uno u otro modo prefijado.

"Quaecumque... Deus fecit, eo ipso dum facit, etiam determinavit" que dice Jacobo Bernouilli en su "Ars Conjectandi"; ya insistiremos después en este problema.

La tercera y definitiva dificultad proviene de que partiendo de los datos experimentales es imposible llegar con exactitud y certeza a las causas o leyes que los gobiernan, por faltarnos el medio o puente para ligar estos dos conceptos de modo sólido e incontrovertible.

Hablaremos muy despacio de esta dificultad y de sus elementos, los cuales sólo tienen un valor aproximado para la vida normal, si nos servimos únicamente de la potencia de nuestra limitada razón y de nuestras reducidas posibilidades.

Estudiemos por partes nuestras limitaciones y sus soluciones y para ello establezcamos los campos en que deseamos actuar según los grados de indeterminación que presenta cada una.

CAMPO DE LOS HECHOS MERAMENTE DE ORDEN FÍSICO SIN INTERVENCIÓN DE LA LIBERTAD HUMANA. CAMPO DE LAS LEYES FÍSICAS SI EXISTEN

Definamos lo que entendemos por ley física, en nuestra concepción de que todas las cosas han sido creadas por Dios para un fin señalado por Él y con sus tendencias determinadas ya se llamen fuerzas, energías, atracciones, etc... Pero antes comencemos por el concepto de la ley en general.

Ley, según Santo Tomás es la regla y medida de los actos según la cual uno es inducido a hacer algo o se reatrae de hacerlo. Esta ley, en Dios, que es quien regula en último término y mide todos los actos, se llama *ley eterna,* y es la divina sabiduría en cuanto es directriz de todos los actos y mociones; en los que son movidos se llaman leyes físicas y son naturales inclinaciones o determinaciones impresas por Dios en las cosas que tienden de modo cierto y uniforme, según su propia naturaleza, a sus fines propios.

Al crear Dios el mundo, no lo echó a rodar sin rumbo y a la ventura, como se lo imaginaron algunos filósofos: sería un mundo ciego y absurdo. El Divino Hacedor asignóle un fin, y como la voluntad de Dios es eficaz, al mismo tiempo que le imponía el mandato, imprimió en su misma naturaleza una tendencia e inclinación hacia su destino. Esta inclinación es lo que Santo Tomás llama participación de la ley eterna en las criaturas. Todos, absolutamente todos los seres creados sienten dentro de sí esta fuerza impresa por Dios que responde a la idea ejemplar que es la ley eterna, que los arrastra imperiosamente hacia su fin, pero con una diferencia que consideraremos con detenimiento; los seres irracionales, que carecen de la luz directiva de la razón, son arrastrados ciegamente, ineludiblemente; los seres racionales, libres, la sienten de otro modo, más conforme con su carácter de entes libres e intelectuales.

No nos cabe, por tanto, la menor duda de que todas y cada una de las reacciones de los seres irracionales están perfectamente determinadas, puestos todos los elementos que intervienen en cada momento. Si conociésemos como Dios conoce, todos los elementos y todas las tendencias naturales impresas en ellos, la resultante única e ineludible nos sería conocida en el mismo instante, y este determinismo que es plenamente rígido y absolutamente invariable para el entendimiento divino, lo sería respecto al nuestro si conociésemos sus premisas. Pero, y aquí está el origen del indeterminismo práctico, si nos son conocidas, ni lo podrán ser nunca exactamente. Nos es imposible conocer las cosas más que por los efectos, reacciones, en fin fenómenos a que dan lugar, y el estudio científico de estas leyes naturales, se reduce a un estudio probabilístico como si las cosas no fuesen determinadas (no lo son para nosotros) y como si únicamente pudiéramos barruntar algo de lo que sucede en la realidad, por los efectos más o menos parecidos y constantes, por sus resultados estadísticos. No es indeterminada la realidad, ni se determina en cada instante, sino es *desconocida* para nosotros, se conjetura con aproximación de antemano y se *conoce* en cada instante para ayudarnos así a conjeturar el momento siguiente.

En nuestra mano está por tanto, y únicamente, el estudio experimental de los acontecimientos y cuando este estudio es susceptible de expresarlo numéricamente, aplicamos los métodos estadísticos para irnos acercando más y más a la realidad de las cosas, sin poderla conocer jamás en toda su perfección. Es la Estadística el potente instrumento de nuestra radical ignorancia en su innato deseo de conocer por sí misma la realidad que le rodea y que constituye este mundo físico.

Pero ¿será necesario que permanezcamos estudiando como indeterminado y de azar un conjunto de elementos en sí mismos determinados?

¿No podrá el entendimiento humano desentrañar esta realidad ayudada de los sentidos? Imposible por varias razones y entre otras por las dos siguientes: la primera es por la necesidad de poner los acontecimientos al alcance de nuestros sentidos y para ello de alterar las condiciones normales de actuación, y la segunda porque aunque en el microcosmos la ley física sea exacta y dinámica, en cambio en el macrocosmos no se puede asegurar lo mismo sino más bien al combinarse en tan gran número, elementos cada uno con su ley determinada y ser imposible para nosotros controlarlos todos, nos es preciso acudir a la Estadística y al azar para suplir nuestra insuficiencia que aparece siempre que es indefinidamente grande el número de elementos que actúan y han actuado anteriormente sobre ellos, para que la razón humana limitada los pueda tener todos presentes.

¿Qué es por tanto lo que hacemos en realidad al estudiar los fenómenos físicos? Intentar obtener un método para conocer con suficiente aproximación los resultados de un conjunto de elementos y circunstancias, en un momento dado. Es necesario por tanto relacionar los datos con el resultado mediante alguna relación entre ellos, y si no podemos conocer la verdadera relación, intentaremos un sustitutivo aproximado del que luego hablaremos cuando hayamos estudiado el modelo matemático.

CAMPO DE LOS HECHOS ECONÓMICOS Y EN GENERAL DE TODOS AQUELLOS EN QUE INTERVENGA LA LIBERTAD HUMANA

Hemos llamado ley física a la natural inclinación o determinación impresa por Dios en las cosas para que tiendan de modo cierto y uniforme, según su propia naturaleza a sus fines propios, de modo que se establece un rígido determinismo entre causas y efectos. No podemos decir lo mismo de las leyes económicas porque este último elemento de rígido determinismo no existe. Cada acto en particular al ser libre es completamente indeterminado y puestas todas las mismas causas pueden seguirse efectos distintos e imprevistos.

Sin embargo tomando en conjunto la indeterminación no es tan absoluta. Existen las llamadas leyes económicas que son aquellas tendencias comunes a todos los hombres en determinadas circunstancias, comunes a las voluntades que se sienten impelidas y atraídas por lo que se le representa como bueno y no pueden dirigirse a lo que bajo todos los aspectos se le represente como malo. Sin embargo, entre varias tendencias o cosas buenas bajo algún respecto puede elegir ya una, ya otra. Estas leyes más bien que físicas podríamos llamarlas leyes morales.

Estas tendencias dan lugar en la colectividad a modos más o menos generales y constantes de proceder, suficientemente determinados en general para poderlos estudiar estadísticamente. No hay, por tanto, aquella determinación en sí, pero indeterminación con respecto a nosotros, que había en las leyes físicas independientes de nuestra voluntad, sino que se da doble indeterminación; una en sí mismas, porque puestas todas las condiciones prerequisitas para obrar, depende de nuestro albedrío una u otra actuación que se determina en el momento en que la voluntad lo determina; y la segunda es la indeterminación respecto de nosotros, inherente como en las leyes físicas a la limitación de nuestro entendimiento para conocer todas las causas y elementos que intervienen en la producción de un hecho o fenómeno determinado.

Sin embargo, veremos que en la práctica la diferencia en el modo de actuar en ambos casos no pasa de meramente cuantitativa, pero no substancialmente diversa como podría parecer a primera vista.

Con estos elementos pasemos a exponer con algún detenimiento el modelo matemático que pretende ser uno de los eslabones para empalmar estos dos mundos, el de la realidad objetiva de las leyes, y el de la experiencia a nuestro alcance.

Modelo matemático

Es hipotético deductivo. Hipotético, es decir, que supone unos pocos principios llamados postulados (a veces axiomas, aunque no nos parece tan adecuada esta palabra) y unas cuantas normas para ir deduciendo conclusiones con una lógica férrea. Establecidos los principios y las normas, las consecuencias son incontrovertibles. Ahora bien, en estos postulados se prescinde de su cumplimiento en la vida real en el Modelo matemático puro, y por tanto todos sus resultados en el mundo de los principios postulados es siempre exactamente cierto. Estarán en conformidad total, parcial o en disconformidad con la realidad, pero eso no altera en nada su certeza hipotética, únicamente los hace más o menos útiles para ser empleados en problemas reales relacionados con datos experimentales.

Es imposible establecer modelos matemáticos que se acomoden perfectamente y en todos sus matices a los datos reales, pero no lo es tanto el que se ajusten en supuestos altamente simplificados.

En seguida veremos algunos ejemplos, pero antes vamos a clasificar de algún modo sistemático estos modelos matemáticos.

1) *Modelo matemático funcional.* — En este modelo se suponen unas hipótesis en número limitado y unas relaciones funcionales determinadas entre ellas y se desean obtener con exactitud los resultados. Aquí es muy posible que las hipótesis sean todas reales, con supuestos simplificados, y los resultados, dentro de esos supuestos, son reales. Pueden ser en algunos casos casi completamente reales.

a) *Modelo matemático estocástico.* — Este modelo se diferencia del anterior en que las relaciones son estocásticas en vez de ser funcionales. En ella los resultados, van unidos a un grado mayor o menor de probabilidad, ya sean estos resultados, valores concretos, ya sean ecuaciones de funciones o zonas que limitan conjuntos de valores o funciones. Esta probabilidad es perfectamente determinada en cada caso, una vez establecidos los postulados que rigen el modelo de que tratamos. Sin embargo su relación con la realidad de los hechos experimentales requiere un estudio más detenido que haremos en seguida.

En este modelo estocástico, además de los supuestos establecidos para cada caso en concreto, hay unos supuestos o postulados en los que se basa toda la teoría de las probabilidades, fundamento a su vez de todos los modelos estocásticos.

Se pueden formular de maneras diversas y nosotros luego indicaremos la que más nos gusta, aunque sin querer indicar que con otros postulados no se pueda también establecer un modelo matemático puro.

El modelo, matemáticamente considerado, puede ser perfecto y pueden prepararse en número ilimitado modelos indiscutibles bajo el punto de vista matemático y con consecuencias ineludibles puestas las premisas, pero entre éstos habrá algunos de mayor utilidad, porque sus premisas se acercan más a la manera de actuar los datos de la experiencia y pueden servir mucho mejor para los fines científicos a partir de los datos experimentales.

Mundo real-experiencia. — Y nos queda por ver este último elemento antes de relacionar a todos unos con otros. Este mundo es el que está a nuestro alcance y es el que queremos conocer y estudiar, y ver su modo de actuar, ver sus relaciones, y poder por último predecir resultados, predicción que únicamente se podrá hacer si de tal manera conocemos su modo de actuar en el pasado, y las variaciones que esperamos en el porvenir que, mediante simples razonamientos deductivos, numéricos o no, podemos asegurar lo que sucederá en un futuro determinado, próximo o lejano.

¿Será posible que de un número limitado de datos o elementos de juicio podamos construir toda una ciencia, una generalización para el futuro? Esto dependerá, claro está de la posibilidad de obtener elementos o modos de proceder comunes a determinados datos, de la posibilidad de abstraer estos elementos de veras comunes y obtener relaciones ciertas o probables entre estas abstracciones. Si la realidad se compusiese solamente de estos elementos comunes podríamos obtener resultados ciertos; si alrededor de los elementos comunes podemos conocer las probabilidades con que los otros elementos proceden, podremos obtener resultados probables con un grado determinado de probabilidad en cada caso, y en el caso en que esto no lo conozcamos, que es el caso más general en la vida real, es preciso un estudio muy detenido para ver qué valor se les puede dar a los resultados de estas abstracciones.

Ciencias deductiva e inductiva. — De todo lo dicho se desprende que nos encontramos ante dos direcciones opuestas en las ciencias: la ciencia deductiva y la inductiva. La primera corresponde plenamente al modelo matemático que, una vez establecidos los postulados, deduce una serie de consecuencias en número ilimitado. También se aplica perfectamente este método a las leyes ya físicas ya económicas una vez conocidas (si esto fuese posible) o al menos estimadas y admitidas como verdaderas con un mayor o menor grado de confianza.

La ciencia inductiva, parte de datos de la experiencia y obtiene ciertas relaciones entre estos datos concretos, intenta hallar qué hay en general y pretende generalizar los resultados precisamente con el fin de llegar a las leyes generales de las cuales pueda obtener deducciones. Estas deducciones no serán ciertas si las leyes no lo son, serán sólo probables si las hemos conseguido solamente con un grado mayor o menor de probabilidad.

Vamos, por tanto, a estudiar las relaciones entre todos estos factores deductivos y experimentales y comenzaremos a relacionar el modelo matemático con las leyes físicas, aunque sólo lo veremos por encima, para insistir luego en la parte que más nos interesa, que son las relaciones entre las leyes económicas, y el mundo real utilizando de modo importante el modelo matemático.

Modelo matemático y leyes físicas. — Si las leyes físicas nos fuesen perfectamente conocidas, podríamos, en general, expresarlas en forma matemática más o menos complicada, y en forma precisamente funcional de modo que a cada conjunto de valores de cada una de las variables correspondería uno, o un número limitado en general de valores de la variable que hubiéramos expresado en función de las demás. De este modo el conocimiento es lo más perfecto posible, ya que está en nuestra mano el conocer cualquier resultado con exactitud, una vez conocidos los datos del problema. A este ideal se ha tratado de llegar hasta los últimos tiempos, en los que se ha pasado al otro extremo, es decir, a considerar todas las leyes físicas macrocósmicas como estocásticas o probabilísticas y a no esperar resultados exactos sino solamente probables estrictamente hablando, aunque con tal grado de probabilidad y dentro de unos límites tan estrechos que, para la vida práctica, en nada difieren de los resultados funcionales exactos. De todos modos, según nuestro modo de concebir todo esto, las leyes naturales, en sí fijas y determinadas tienen su expresión más perfecta en una expresión matemática de tipo funcional, expresión a la cual debe procurar acercarse la ciencia experimental inductiva todo lo que pueda por los medios a su alcance. Sin embargo nunca puede obtener esa certeza plena, sobre todo en leyes generales en las que el número de elementos que intervienen no tiene límite alguno y en la que la complicación necesaria de fórmulas tan complejas excede nuestra finita razón.

MODELO MATEMÁTICO Y EXPERIENCIA (CON RESPECTO A ELEMENTOS IRRACIONALES)

Este es uno de los problemas más importantes y de más difícil solución, porque el modelo matemático exige conceptos y datos exactos, conocidos perfectamente y la experiencia suministra, datos, pero en que cada uno contiene un conjunto muy grande de los elementos a los que se pueden acoplar los conceptos que utiliza el modelo matemático. Es preciso, por tanto, en primer lugar, intentar separar los elementos principales de los datos obtenidos, cosa que muchas veces es muy difícil y aún imposible, sobre todo tratándose de datos de observación, en que es preciso recibirlos tales como vienen; en segundo lugar, se debe comprobar si una vez eliminados los elementos extraños, podemos conocer con exactitud los elementos que deseamos estudiar y si en su manera de actuar reconocemos algo verdaderamente común que nos dé pie a encajarlos en un modelo matemático. Si esto se consigue, todo se reduce a sacar las consecuencias, exactas e indiscutibles mediante cálculo matemático más o menos complicado. Si esto no es posible y es preciso actuar con datos en que se conservan mezclados elementos incontrolados, es preciso conocer, si se puede, el modo aproximado de actuar estos elementos, y si son completamente desconocidos, se necesita actuar mediante un artificio que supla nuestra ignorancia. Este artificio consiste en considerarlos como resultado del *azar,* y el modelo matemático correspondiente es un modelo probabilístico. Veamos cómo se relacionan.

Por una parte ante la ignorancia de resultados a obtener mediante estos elementos llamados de azar, podemos conocer por medio de sucesivas experiencias qué resultados se van obteniendo y cuáles se repiten y cuántas veces se repiten, es decir; podemos ir conociendo con la exactitud propia de nuestras mediciones, las frecuencias o número de repeticiones de cada uno de los resultados obtenidos al efectuar experiencias y por consiguiente también las frecuencias relativas n_1/n' n_2/n'... de estos resultados.

Por otro lado, queremos encontrar en el modelo matemático la contrapartida a estas frecuencias relativas y para ello se ha establecido el concepto de probabilidad.

Este concepto que ha dado lugar a tantas discusiones y sigue dando todavía, procuramos aclararlo todo lo posible. Si comenzamos por Bernouilli en su "Ars cogitandi" vemos que da el salto de $\frac{n_i}{n}$ a $\frac{M}{N}$ en que M es el total de casos de una calidad determinada y N el total de casos posibles. Para él la probabilidad es el valor que tendría $\frac{n_i}{n}$ al terminar las experiencias si N y M fuesen finitos y la experiencia consistiese en ir extrayendo unidades y anotando las que tienen la calidad de M.

Este concepto de probabilidad, muy restringido a casos como el indicado, parece a primera vista que hace de puente entre la experiencia y el modelo matemático que de este concepto de probabilidad quiere ir deduciendo lógicamente las consecuencias. Las ventajas, a primera vista, parecen indudables, funde ambos modelos, el matemático y el experimental y, por tanto, todas las consecuencias, derivadas por exclusiva lógica y admitidas ciertas propiedades, también experimentales, son completamente ciertas o probables dentro de límites ciertos y determinados.

De este modo se ha intentado trabajar, pero han surgido tales dificultades y ha habido últimamente tanta oposición a esa mezcla de conceptos matemáticos y datos experimentales que ha sido preciso un cambio de ruta sin haber todavía cristalizado perfectamente en un resultado que sea admitido por todos. Para el fin que nos proponemos en este trabajo nos inclinaremos por el modelo matemático de tipo axiomático que deslinda perfectamente el elemento teórico del experimental, y que se aplica solamente a casos perfectamente medibles.

Según este tipo axiomático o de postulados como fundamento del modelo, definimos así la probabilidad de un suceso S de un conjunto aleatorio de sucesos S_1, $S_2 \ldots S_n$ a un valor P(S) que satisface a los siguientes postulados

$P(S_1 + S_2 + \ldots + S_t) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_t)$ si los sucesos son incompatibles.

$$P(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = 1$$
$$P(S_a \cdot S_b) = P(S_a) \cdot P(S_b/S_a).$$

Con este elemento se pueden obtener todos los teoremas y aplicaciones teóricas de la probabilidad.

Hasta ahora no dice nada este modelo de su aplicación a la experiencia.

Lo primero que se necesita es ver si se le pueden aplicar estos postulados, p. ej., al lanzar un dado real de 6 caras y los sucesos son que salga el 1, el 2, ... el 6. Se ve que las probabilidades P(1), P(2) ... P(6) lo satisfacen. Sólo necesitamos como puente, el conocer sus valores. Si conociéramos lo que valen, bastaría aplicarles todo el modelo y crear cuantas consecuencias deseemos sin necesidad de experimentarlas, a no ser para una comprobación.

Se ofrecen estos caminos:

1) *A priori*. — En un dado bien hecho no hay razón para que una cara sea más probable que otra al efectuar el experimento, por tanto se consideran igualmente probables los 6 sucesos, es decir

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) \text{ y por tanto}$$

$$P\ (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6) = P\ (S_1) + P\ (S_2) + P\ (S_3) +$$
$$+ P\ (S_4) + P\ (S_5) + P\ (S_6) = 6\ P(S_1) = 1$$

$$\therefore\ P(S_1) = 1/6 = P\ (S_2) = P\ (S_3) = P\ (S_4) = P\ (S_5) = P\ (S_6)$$

Pero ¿es posible tal dado y las experiencias tan iguales que se pueda admitir esto a priori? Es imposible.

2) *A posteriori*. — Hallando las frecuencias relativas al ir haciendo repetidos experimentos:

$$n_1/1,\ n_2/2\ \ldots\ n_m/m$$

y mediante este postulado: n_m/m tiende a un límite que es la probabilidad del suceso, o sea

$$\lim\ (n_m/m)_1 = P\ (S_1);\ \lim\ (n_m/m)_2 = P\ (S_2)\ \ldots\ \lim\ (n_m/m)_6 = P\ (S_6)$$

Ahora bien, así como los cuatro postulados que establecen el concepto de probabilidad están en nuestras manos y no dependen más que de nuestra voluntad, por eso a veces se llaman axiomas, esto es un verdadero postulado que será o no será verdadero, pero cuya veracidad no está en nuestras manos comprobar con absoluta certeza ni vale por tanto para establecer una teoría exacta. Para la vida práctica veremos el modo de comprobar con cierta garantía su plausibilidad.

¿No es posible por tanto un puente lógico de unión entre teoría y práctica? Teóricamente no existe y siempre existirá este abismo entre ambos. Sin embargo, para la vida real será como si para pasar del sitio que nos encontramos a otro próximo hubiese una sima de profundidad inmensa, y que nunca se pudiese cerrar, y por tanto avanzando de un modo continuo fuera imposible pasar al otro lado por próximos que estuviesen ambos lados de la sima, pero con un paso por el aire lo salvamos en un instante y no nos estorba para caminar.

Vamos por eso a hablar algo más acerca de este postulado, admitido el cual podríamos aplicar todo el modelo matemático a la práctica experimental y comparémoslo con las leyes de los grandes números para ver si nos pueden ayudar en nuestros deseos. La ley de los grandes números de Bernouilli dice lo siguiente expresada en forma más moderna, para un suceso de probabilidad p.

Dados dos números ε y δ arbitrariamente pequeños, existe N suficientemente grande para que la probabilidad

$$P \ [(n_m/m - p) < \varepsilon] > 1 - \delta$$
$$\text{para } m \geqq N$$

es decir, que la frecuencia relativa se acerca indefinidamente a la probabilidad.

Aquí parece a primera vista que ya está dado el paso de la frecuencia relativa a la probabilidad, pero téngase en cuenta las diferencias entre este teorema y el postulado anterior.

1.ª Aquí partimos de que el suceso en cuestión tiene una probabilidad p.

2.ª Sabemos por tanto que ésta es invariable.

En estas condiciones efectuando un experimento también teórico y tal que en cada experiencia la probabilidad permanece siempre p. La frecuencia relativa de este experimento tiene por límite p.

En el caso del postulado.

1.º No sabemos nada acerca del valor de la probabilidad del mismo (a priori) ni siquiera si existe tal probabilidad.

2.º Tampoco sabemos por tanto si es constante, caso de existir.

Al hacer la experiencia sólo conocemos los valores de n/m y postulamos un límite y si existe, como el límite de la experiencia teórica es p, a este límite le llamaremos también Prob (E).

Como se ve, sólo da cierta verosimilitud a nuestro proceder, pero todo en absoluto depende de la veracidad del postulado.

Si pasamos a la ley fuerte de los grandes números la dificultad permanece.

Dice esta ley:

Dados dos números ε y δ arbitrariamente pequeños existe N suficientemente grande para que la probabilidad

$$P\ [(n_m/m - p) < \varepsilon] > 1 - \delta$$

para todos los valores de $N + i]$ $i = 0, 1, \ldots$

Como se ve las condiciones son idénticas que para el caso de Bernouilli y siguen exigiendo el mismo postulado.

¿Qué haremos ante tales dificultades? Veamos primero si admitimos el postulado como verdadero.

Si admitimos que p existe sabemos por las leyes de los grandes números que $n_m/m \rightarrow p$, más aún, este valor de $1 - \delta$ sabemos que puede sustituirse por $\frac{p\,q}{m\,\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4\,m\,\varepsilon^2}$, es decir, que podemos ir conociendo y cerrando entre límites los valores que debe ir teniendo n_m/m al crecer m y por ello al ir conociendo n_m/m podemos pensar qué valores de p son tales que $p \pm \varepsilon$ comprenden a n_m/m, es decir, qué valores de p han podido dar lugar a la frecuencia n_m/m con una razonable probabilidad. Más aún: podemos saber qué valor de p es el que más razonablemente podemos tomar como el que mejor que los demás pueda haber dado lugar a estos resultados. De este modo podemos con un grado de confianza dado por $\frac{1}{4\,m\,\varepsilon^2}$ admitir como verdadero p y con él hacer deducciones con el modelo matemático todas dentro de probabilidades dadas en cada caso por el mismo modelo matemático. El entronque está hecho y podría haberse hecho también por otros métodos.

Pero si no admitimos el postulado ¿qué podemos hacer? No nos queda más que este recurso, más práctico que estrictamente científico, pero al que, en definitiva, es preciso acudir.

Repetir las experiencias como si se admitiese p y ver si existen valores de p dentro de los límites expresados por la ley anterior de los grandes números. Si el parecido entre lo que en realidad nos da la experiencia y lo que debería dar si se cumpliese el postulado es suficiente para que nos convenza intuitivamente de su cumplimiento, al menos aproximado, procederemos como si fuese verdad, es decir, admitiremos el postulado, al menos en este caso particular y le podremos aplicar el modelo matemático y sacar las consecuencias.

En la práctica no es esto peligroso, ya que si queremos certeza tampoco la podríamos obtener aunque se cumpliese ciertamente el postulado; siempre los resultados probabilísticos dejan lugar, incluso teóricamente, a que en el caso concreto no se cumple la ley y por tanto la aplicación mediante el nuevo *parecido* no agrega al resultado individual más que alguna mayor posibilidad de error y en términos científicos únicamente tiene el inconveniente *teórico* de no poderse expresar en términos de probabilidad. Si se cumple el postulado podremos decir que la probabilidad de que $[(n_m/m - p) > \varepsilon] \leqq \frac{1}{4 n \varepsilon^2}$. Si no sabemos si se cumple, solamente podremos decir que tenemos una gran confianza de que la probabilidad será muy pequeña y nos bastará para actuar en la vida práctica. Resultado no muy científico estrictamente hablando, pero sí muy práctico.

Todo lo que hemos dicho acerca de la repetición de experiencias de un suceso que se da o no, se puede aplicar y generalizar para otros problemas más complejos y útiles. Se trata, por ejemplo, de grandes lotes de piezas fabricadas cuyas cualidades desearíamos conocer sin comprobar más que un número pequeño de ellas y según cumplan o no unas determinadas especificaciones de esas cualidades se aceptan o se rechazan.

Conocer bien los lotes quiere decir que sabemos con una probabilidad fija y conocida cuántas piezas o qué porcentaje de piezas exceden tal medida, cuántas exceden tal otra, y así para cualquier medida que queramos considerar. Esto se llama conocer el lote.

Para ello existen modelos matemáticos de distribuciones, tales que conocida la función en términos matemáticos podremos conocer para cualquier valor X de la variable aleatoria, la probabilidad p_x de que en una experiencia teórica la variable exceda este valor.

Si a esto le aplicamos la ley de los grandes números veremos que si hacemos esa experiencia 1, 2, ... m veces el número de unidades que excedan ese valor serán n_1, 2_2, ... n_m de tal modo que $n_m/m \rightarrow p_x$, es decir, que el tanto por uno de unidades que excedan el valor indicado X tenderá a valer p_x cuando se va repitiendo la experiencia más y más veces. En el modelo matemático podemos por tanto para cada valor X conocer el 100 p_x del tanto por ciento de unidades que excedan el valor X.

Si mediante la sola experiencia queremos llegar a resultados semejantes nos encontramos con la gran dificultad de que nos es preciso conocer en primer lugar la función f(X) de densidad o F(X) de distribución de la cualidad de que tratamos. Y aquí se procede de un modo semejante al expuesto anteriormente, pero teniendo en cuenta que la indeterminación es mucho mayor, porque es necesario conocer en primer lugar la fórmula F(X) y después los parámetros concretos de la misma. En el estudio de la estimación y pruebas de hipótesis se pueden admitir como funciones que han dado origen a los resultados de la experiencia teórica las que cumplen determinadas condiciones o satisfacción a pruebas o "tesis" dados. Sin embargo, es preciso admitir el postulado de los límites de frecuencia, para que todo esto se pueda aplicar en la práctica cuando se trata de experiencias reales, y se actúa entonces como si se tratase de experimentos dentro del modelo matemático y suponiendo que las frecuencias relativas corresponden a valores tales que tienen su límite p_x.

Como se ve, el fundamento principal de todo nuestro modo de proceder en el terreno de la práctica es el conocimiento de que, dado el parecido entre los experimentos reales y los experimentos efectuados con un modelo matemático, se puede suponer que realmente el conjunto de causas desconocidas e incontrolables que producen los efectos que medimos, tienen una verdadera regularidad y se acomodan a reglas fijas y determinadas y por tanto si se acercan cada vez más a la regularidad de un cierto modelo matemático es porque obran como si fuesen producidos por unas fuerzas que actúan según el modelo de modo que les obligasen a acomodarse a él. Si después de haberse acoplado con suficiente perfección al modelo, cambiasen de actitud, esto se puede considerar como el resultado de un cambio en las causas que motivaban tal actitud y este cambio puede y debe ser descubierto. De este modo se puede eliminar la causa si es perjudicial o conservarla si es beneficiosa en la práctica.

Para expresar esto de una manera más convincente se ha acudido a las pruebas de hipótesis. En éstas se pretende comprobar si en realidad el modelo matemático correspondiente a los resultados obtenidos en un experimento es uno determinado H_0 o algún otro H_1, H_2... Como no es posible tener certeza, como lo hemos ya indicado, corremos algún riesgo determinado de equivocarnos si consideramos el modelo H_0 como verdadero, y otro distinto al considerar como verdadero H_1 ó H_2... sin serlo en realidad.

Como se ve, aunque todo esto puede hacerse sin salirse del campo lógico y dentro del modelo matemático, la manera de hallar y concebir es la del terreno práctico hasta tal punto que al efectuar los experimentos en la realidad se aplican otras pruebas como si de hecho se tratase del modelo matemático. Claro está que esto no es exactamente cierto, sino depende del valor del postulado en que se apoya y que es el de que los datos de la experiencia satisfacen a las leyes propias de uno de los modelos que comparamos y solamente dudamos acerca de cuál sea el verdadero. En tanto en cuanto esto sea verdad, valdrá la prueba. Claro está que se puede intentar otra prueba comparando tipos distintos de modelos para ver a cuál corresponde mejor la experiencia, pero teóricamente hablando como pueden variar sin límite, la solución teórica exacta es imposible.

Sin embargo, el razonamiento lógico es el siguiente: Si en una serie de experiencias se compara un modelo matemático y el riesgo es todo lo pequeño que queramos y resiste a la prueba en comparación con otros modelos e incluso en comparación con una actuación de azar, la manera racional de actuar es admitir ese modelo, no como cierto, pero sí como más razonable que otro cualquiera de los comparados y que la no existencia de modelo que se acomode, tanto más cuanto que estamos dentro de las leyes físicas que creemos fijas y determinadas, aunque desconocidas para nosotros. Es decir, que es una manera práctica racional de actuar, pero que no resiste a un estudio lógico en cuanto a la certeza de las conclusiones, ni siquiera en términos estrictamente probabilísticos, porque sigue fundada en una ignorancia radical, pero en una confianza razonable y prudente. Todo esto tratándose de sucesos en sí rígidamente determinados por no conocer esta determinación y conjeturándola por vías de probabilidad, riesgos y razonable semejanza.

Pasemos ahora a aplicar este principio al caso de las leyes económicas en las que la libertad humana se interfiere e impide que los hechos sean en sí mismo determinados.

Modelo matemático, realidad y leyes económicas

Si pretendemos aplicar todo lo dicho a las leyes económicas nos encontramos con una nueva dificultad. Aquí los sucesos no están absolutamente determinados como en las leyes físicas. Se comprende que si están determinados se pueda conjeturar cuál sea esta determinación, cuál la ley a la que de hecho y en realidad están sujetas. De este modo, aunque solamente por medio de un postulado, con todo, llegamos en realidad de verdad a acercarnos al conocimiento de la verdadera ley. Pero si no están determinados, si no hay ley fija y determinada ¿cómo vamos a hallar esa ley? ¿Qué significado va a tener la expresión "ley económica", si en realidad no existe ley que determine los hechos económicos que se realizan en cada momento por el ejercicio de la libertad humana?

Y, sin embargo, vamos a ver que todo el método difiere en general muy poco y sólo cualitativamente del empleado para las leyes económicas.

En las físicas, en último término, no hallábamos en realidad *la* ley física que determinaba los hechos, ni *el* valor de p en sucesos probables, sino una ley, que si fuese la que ligase aquellos elementos, se habrían producido con mucha probabilidad aquellos sucesos, y en el futuro se podrán producir otros muy semejantes a los que habría producido según la ley que en realidad les liga. Y esto sucede, porque siendo las variaciones infinitamente pequeñas, hay en un intervalo de confianza por pequeño que sea, infinitos valores distintos, sea de p, sea de parámetros de F(X) y esto no sólo al aplicar el modelo matemático a la realidad, sino con el mismo modelo matemático. El que hayamos obtenido el valor exacto, la ley exacta tiene una probabilidad igual a cero.

Si pasamos a las económicas, también el resultado significará, no la ley que no existe en realidad, sino una ley tal que teniendo en cuenta la libertad humana, pero además el modo corriente de proceder y responder a los estímulos, ha podido dar lugar con mayor o menor grado de razonable garantía a los hechos tal y como se han verificado, una vez que las voluntades se dirigen a lo que se les representa como bueno y por ello hay modos constantes de proceder en general.

Cuando se trata, por tanto, de una serie de datos económicos que relacionan dos variables, una de las cuales sea aleatoria, la situación se parece a las anteriores y podemos expresar brevemente sus relaciones en el cuadro de la página siguiente.

La última diferencia es preciso tenerla muy en cuenta. Esas variaciones imprevistas de los gustos o inclinaciones humanas hacen que el estudio de las leyes económicas carezca en gran escala de esa continuidad e igualdad a través del tiempo de las leyes físicas, hace que sea preciso estar continuamente retocándolo a la luz de nuevas y continuas experiencias y aleja cada vez más y más sus resultados de los de un modelo matemático fijo y estático. Y dada su imprevisibilidad tampoco se acomoda a un modelo más dinámico y predeterminado.

Modelo matemático aleatorio	Leyes físicas	Leyes económicas de una variedad aleatoria
Ley $y = F(X)$ con límites de confianza $y_1 = F_1(X)$ $y_2 = F_2(X)$.	$y = F(X)$ verdadera con límites de confianza $y_1 = F_1(X)$, $y_2 = F_2(X)$.	No existe $y = F_e(X)$.
—	—	—
Experimentos teóricos que nos estiman $y = \varphi(X)$ con sus límites de confianza $\varphi(X) \pm \varepsilon$ expresables en términos de probabilidad para cada	Experimentos prácticos que nos estiman $y = \varphi(X)$ con límites de confianza $\varphi(X) \pm \varepsilon$ a los que *postulamos* la expresión en términos de probabilidad y que nos sirve para la vida razonablemente.	Experimentos prácticos que estiman una $y = \varphi(X)$ con límites de confianza $\varphi(X) \pm \varepsilon$ a los que además de postular una expresión en términos de probabilidad le damos un valor práctico de orientación para la vida.
Prob. $[\varphi(X) = F(X)] = 0$	Prob. $[\varphi(X) = F(X)] = 0$	$\varphi(X)$ no tiene correspondencia teórica.
$F(X)$ es invariable o variable o variando según una ley dependiente de otra u otras variables.	$F(X)$ creemos invariable o variando según una ley dependiente de otra u otras variables.	$\varphi(X)$ puede variar al variar de modo previsible o imprevisible los gustos y costumbres humanas.

Los modelos en Economía deben ser más flexibles y menos dependientes de variables sujetas a cambios psicológicos y en general de tipo bastante sencillo y general, sin descender a muchas particularidades.

Caso en que intervengan varias variables aleatorias. — Este caso, que es el más frecuente en las leyes económicas y que da lugar a cálculos matemáticos más complicados, vamos a indicarlo, siquiera sea brevemente.

Se trata del caso en que deseamos conocer dos o más leyes económicas y no tenemos más datos que los resultados del cumplimiento conjunto de todos ellos en momentos dados, teniendo en cuenta que estas leyes varían en función de otras variables.

Como vemos, intervienen los siguientes elementos:

Las leyes económicas o promedios del modo de proceder, promedios no existentes a priori, sino dependientes de la experiencia, de la cual es preciso luego abstraer el modelo matemático, que, por tanto, no puede ser un modelo puro, aunque una vez establecidas las leyes como postulados, fluya lo demás con perfecta lógica.

Variables que dependen de la libertad humana. — Las decisiones con respecto a las variables que dependen de la libertad humana las consideramos como unas variables aleatorias por la ignorancia de la decisión de la libertad, comparable a la ignorancia de las causas en las leyes físicas.

Las variables que no dependen de la libertad humana y pueden también ser variables aleatorias.

Entre estas variables, las hay que dependen unas de otras, y son determinadas por la solución de las ecuaciones del modelo y se llaman endógenas, otras llamadas exógenas se determinan al margen del modelo y una vez determinadas se insertan en él. Para la resolución de estos problemas es preciso un estudio acerca de la identificación en el que no vamos a entrar, pero diremos que pone al problema, una vez que las ecuaciones pueden ser identificadas, en condiciones semejantes a las de las leyes económicas ya estudiadas.

Método de Monte Carlo

El estudio de este método es, a nuestro modo de ver, el que ofrece más dificultades en cuanto a su valor para el conocimiento de la verdad. Se apoya, de modo principal, en los números aleatorios.

Este concepto de número aleatorio que se maneja tanto en el modelo matemático ¿es en sí mismo independiente de la experiencia? Vamos a estudiar este problema.

Número aleatorio en el modelo matemático es un número correspondiente a un suceso aleatorio. Es decir, que si tenemos un conjunto finito de sucesos aleatorios y a cada uno hacemos corresponder un número, este número en conexión con el suceso se llama número aleatorio.

Suceso aleatorio es un conjunto de elementos aleatorios que es a su vez un subconjunto de otro conjunto y tal que cada subconjunto tiene asignada su probabilidad determinada. Cuando estos subconjuntos tienen todos ellos la misma probabilidad, los números correspondientes asignados a estos subconjuntos se llaman números equiprobables.

Para relacionar esta definición abstracta con los números aleatorios de la realidad, es preciso introducir el concepto de experimento aleatorio. Este experimento en el modelo matemático consiste en elegir un elemento o subconjunto de un conjunto de ellos, de tal modo que la probabilidad de obtener un elemento o subconjunto dado tiene un valor perfectamente fijo y determinado. Al repetir el experimento varias veces, obtenemos un conjunto de elementos o de subconjuntos aleatorios y si a cada elemento o subconjunto se le asigna un número determinado, obtendremos un conjunto de números aleatorios. Si las probabilidades de todos los elementos y, por tanto, de todos los números asignados son iguales, obtendremos un conjunto de números aleatorios. Si las probabilidades de todos los elementos y por tanto de todos los números asignados son iguales, obtendremos un conjunto de números equiprobables.

Todo esto es puro modelo matemático. Pero en la realidad ¿cómo se obtienen los números aleatorios o equiprobables? ¿Qué valor se les puede dar con respecto a la verdad y exactitud de lo que obtengamos con ellos? A nuestro modo de ver la dificultad es la misma que la que hemos encontrado hasta ahora al relacionar el modelo matemático en la experiencia. El experimento aleatorio en la realidad no es tal que la probabilidad sea determinada, sino tal que conocemos únicamente sus frecuencias relativas a medida que se van obteniendo y de las que se postula como allí que se acercan estocásticamente a la probabilidad, pudiéndose después de efectuadas las experiencias, realizar unas pruebas de hipótesis para ver si se puede admitir como verosímil la hipótesis de aleatoriedad según una distribución dada, o en caso particular la equiprobabilidad.

Al hablar, por tanto, de tablas de números aleatorios o equiprobables, se puede proceder así:

1.° Procurar a priori efectuar de tal manera la obtención de datos aleatorios que no exista preferencia alguna por unos más que por otros, de modo que se juzgue verosímil que las frecuencias con que se vayan obteniendo sean iguales o lo más próximas posibles a la igualdad.

2.° Efectuar una serie de pruebas de hipótesis, para ver si no hay razones para rechazar la hipótesis de equiprobabilidad.

3.° De estos números equiprobables o admitidos como tales, pasar por medio del modelo matemático o números aleatorios según una distribución dada.

Una vez asentado todo esto veamos la confianza que nos merece el método de Monte Carlo.

Consideraremos dos casos:

1.er caso. — Se trata de un problema estrictamente funcional, pero en el que se prefiere obtener una aproximación experimental. El caso equivale teóricamente al de estimar un parámetro experimentalmente con todo lo expuesto para este caso.

2.º caso: PROBLEMA PROBABILÍSTICO. — Aquí el postulado hay que admitirlo por ambas partes, por la de los números aleatorios y por la parte de los experimentos que se tratan de sustituir por los números aleatorios. Como se ve, tampoco el problema filosófico cambia en forma substancial, sino tan sólo accidentalmente; es decir, que los resultados se admiten porque es más verosímil que otra solución para el problema propuesto y se obra racionalmente procediendo así y más racionalmente que con otra solución, aunque nunca con la base firme de la certeza.

Por medio de las máquinas calculadoras electrónicas se pueden efectuar, aplicando este método de Monte Carlo, un número incalculable de problemas y es cada vez más fácil ir comprobando la regularidad estadística y adquiriendo de sus resultados, nunca ciertos teóricamente, esa certeza moral con la cual vivimos y nos atrevemos a viajar a pesar de los peligros menos remotos en general que los de no acertar en los resultados probabilísticos con sus límites de confianza, tampoco ciertos por no serlos los postulados en que se funda cada caso particular.

* * *

Y para resumir todo lo que hemos expuesto creo que lo podemos reducir a lo siguiente:

La Estadística, conjunto de métodos deductivo e inductivo es indispensable para poder deducir principios o leyes generales a base de datos obtenidos por la experiencia pero cuyas relaciones de causalidad entre ellos y con otros conocidos no nos es posible saber de antemano a priori, sino que nos es dado únicamente acumular datos y compararlos entre sí.

Si se trata de fenómenos afectados por la libertad humana no varía en esencia ni la dificultad ni los métodos estadísticos a aplicar y los resultados probabilísticos pueden expresarse como los anteriores dentro de límites de error suficientemente pequeños para la vida práctica.

Tanto en los fenómenos afectados por la libertad humana como en los no afectados, nunca nos es posible llegar a la certeza, pero sí a una aproximación, imposible de obtener sin su auxilio, y con unas garantías o probabilidades de acierto exactamente conocidas y que bastan para hacer avanzar la ciencia de la Economía y apoyarse, no en suposiciones, sino en realidades tomadas de la experiencia y fáciles de acomodar en cada momento a las variaciones continuas de los gustos y necesidades humanas.

Y con estos medios que la Divina Providencia ha puesto en nuestras manos procuremos todos ir conociendo con la aproximación que Ella nos permite los grandes secretos escondidos en este mundo maravilloso sin llegar nunca pretender abarcar ni con extensión, ni en profundidad, ni en exactitud y certeza todo lo que nos rodea y menos aún la actuación humana que aunque perfectamente libre no por eso si escapa al conocimiento perfecto y adecuado y a la aprobación o permisión de nuestro Creador que rige y gobierna todo, no al azar sino, con todo perfectamente calculado y medido desde la eternidad.

HE DICHO.

Palabras pronunciadas
por el Presidente perpetuo de la Corporación,
EXCMO. SR. DON RICARDO PIQUÉ BATLLE

No es costumbre que los discursos de los correspondientes sean oficialmente contestados en nombre de la Academia. Mas nos parecería este Solemne Acto excesivamente protocolario si después del magnífico y enjundioso discurso de nuestro recipiendario lo diésemos por terminado sin pronunciar antes unas palabras, muy breves, de elogioso comentario.

El Padre Chacón nos ha hablado de la Estadística como "auxiliar potente de todas las demás ciencias, en las que la experiencia juega un papel importante". Y su exposición, desarrollada bajo una metodología rigurosa, profunda y concienzuda, como cortada a pico, ha ido paulatinamente a posarse en el aspecto más científico: el matemático. Y en este terreno, de la especial preparación y predilección de nuestro recipiendario, hemos visto con qué fruición iba desgranando las cuentas de su tesis, saliendo al paso de cualquier objeción y demostrando acto seguido con fórmulas precisas la lógica y la veracidad de sus afirmaciones.

¡Lástima que la brevedad impuesta por nuestro Reglamento haya obligado al Padre Chacón a comprimir, a extractar su oración, enunciando tan sólo sus postulados sin poder trasladar al encerado la pertinente traducción