ELASTICIDAD "GRADIENTE" O TOTAL: UN CONCEPTO MICRO/MACRO-ECONÓMICO

Elasticidad "gradiente" o total: un concepto micro/macro-económico

Comunicación del Prof. Dr. Alfonso Rodríguez Rodríguez, Académico de Número de la RACEF. Catedrático de Análisis Matemático y Matemática Financiera.

Presentado en Barcelona, 30 de junio de 2012.

Elasticity "gradient" or total elasticity: a micro / macro-economic concept

Communication of Prof. Dr. Alfonso Rodriguez, Academician of the RACEF.
Head Professor of Mathematical Analysis and Financial Mathematics.

Received in Barcelona, June 30th 2012.

ABSTRACT

Extension of conventional elasticity *cæteris paribus*, as a measure of the relative reaction of an economic role to the relative variation of *only one* of its variables or arguments, to the measure of the relative variation of the function of relating variations of *some or all* of its variables. The mathematical tool used for this is the *directional derivative* in the vectorial or multivariate function. Justify their economic usefulness by the *usual correlation* between variables of the function, which excluded from the analysis definitely the *ceteris paribus* clause.

KEYWORDS

Economic elasticity. Elasticity "gradient". Total elasticity. Direccional derivative. Partial economic analysis. General economic analysis.

INTRODUCCIÓN

Pretendo con esta comunicación tan sólo *refrescar* algunas aportaciones personales al análisis económico, introducidas hace años en mis publicaciones[1]. Desarrolladas tam-bién en algunos cursos impartidos de Microeconomía[2]. Ahora me refiero al concepto de elasticidad en las funciones económicas multivariables sometidas a un grupo de altera-ciones en las asignaciones de sus variables, sean funciones de naturaleza macro o microeconómica. La *variación relativa,* que describe la derivada elástica se ha condi-cionado siempre a restricciones *caeteris paribus*, es decir, a la ficción de inexistencia de interrelaciones entre una variable y las restantes que permanecen inmutables. Ello intro-duce una limitación muy poco real y que afecta conceptualmente a todo el análisis parcial. En este caso aísla la reacción de una función económica en su variación ante uno sólo de sus argumentos. La condicionalidad del análisis parcial, aparte su inacep-table simplificación conceptual, procede principalmente del desconocimiento de un método analítico para ampliar su generalización a circunstancias o condiciones menos restrictivas. Tal instrumento necesario es matemático y la generalización de este análisis económico lo introducimos aquí.

Si las variaciones afectan a los precios de bienes de consumo y a su demanda (la función de consumo) raramente, o nunca, se producen aisladamente sólo respecto a uno de los precios. Habitualmente, son acompañadas por variaciones en los otros precios, aún más si son el resultado de un proceso inflacionario generalizado. Si las variaciones afectan a cantidades (en la función de producción) o a los precios de los factores productivos (en la función del coste de la producción) la interdependencia o inter-relación entre ellos suele ser aún más acusada. Lo mismo podría afirmarse respecto a las funciones macroeconómicas que describen comportamientos relacionados con variables de esta naturaleza, como los tipos de interés, rentas percápita, niveles de empleo, déficits y endeudamientos, tipos de cambio, presión fiscal, etc. etc. La interrelación existente entre tales variables descalificaría cualquier análisis basado en una cláusula *caeteris paribus.*

La aportación que exponemos introduce novedosamente el instrumento analí-tico-matemático necesario para describir la reacción relativa de una función micro/

1. "Matemática para Economistas. Tomo II". El marginalismo económico. La elasticidad en un punto, págs. 650 y ss. Alfonso Rodríguez. Universidad de Barcelona. Año 1981.
2. Universidad "María Cristina" Complutense. Madrid. Cursos 1961-1964. Universidad de Valencia. Cursos 1965-1970.

ma-croeconómica ante variaciones de *todos o una parte* de sus argumentos. Siendo la función económica por la pluralidad de sus variables una *función vectorial,* y siendo el argumento de la variación múltiple un *vector gradiente*, nos ha parecido acertado denominar *elasticidad gradiente*, también *elasticidad total*, a la reacción relativa de la función ante las variaciones o alteraciones relativas múltiples experimentadas en las asignaciones de todas o parte de sus variables, generalizando, más bien que contraponiendo, el concepto convencional de *elasticidad parcial* .

Nos ha parecido innecesario, por tratarse de una mera extensión del trabajo que aquí presentamos, ampliar su estudio a la determinación de la *semielásticidad gradiente* o *semielásticidad total,* exponente de las variaciones relativas de la función ante las variaciones *absolutas* (no relativas) de sus variables, lo cual exigiría abandonar la propiedad operativa más importante de la elasticidad, su *adimensionalidad* o indepen-dencia de las unidades de medida en todos sus argumentos.

EL MÉTODO MATEMÁTICO

Siendo la función económica una *función vectorial* de componentes reales,

$$y = f(\vec{x}); \qquad \vec{x} \equiv (x_1, x_2, .. x_n)$$

y siendo la función en un *punto*,

$$y^o = f(\vec{x}^o); \qquad \vec{x}^o \equiv (x^o_1, x^o_2, .. x^o_n)$$

donde el punto $\vec{x}^o \equiv (x^o_1, x^o_2, .. x^o_n)$ describe un *estado* de sus variables componentes, la *variación total* experimentada en él está determinada por el *vector,*

$$\Delta\vec{x}^o \equiv (\Delta x^o_1, \Delta x^o_2, .. \Delta x^o_n)$$

que corresponde en la función vectorial a la *variación total,*

$$\Delta y^o = f(\vec{x}^o + \Delta\vec{x}^o) - f(\vec{x}^o); \qquad \vec{x}^o + \Delta\vec{x}^o \equiv (x^o_1 + \Delta x^o_1, x^o_2 + \Delta x^o_2, .. x^o_n + \Delta x^o_n)$$

Consideremos ahora la ***derivada direccional*** en el punto $\vec{X}^{o}$, sometida al *vector* $\Delta\vec{X}^{o}$ y a la *trayectoria* **t** , con *cosenos directores* $\cos\alpha_i$,

$$t(\cos\boldsymbol{\alpha}) \qquad \cos\boldsymbol{\alpha} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, .. \cos\alpha_n)$$

$$f'_t(x^o) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^o{}_i).\cos\alpha^o{}_i \quad [3]$$

en expresiones matriciales,

$$f'_t(x^o) = \left[\frac{\partial f(x^o)}{\partial x}\right]' .\cos\boldsymbol{\alpha}$$

donde son vectores,

$$\frac{\partial f(x^o)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^o)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x^o)}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f(x^o)}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \qquad \cos\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cdots\cdots \\ \cos\alpha_n \end{bmatrix}$$

siendo $\left[\frac{\partial f(x^o)}{\partial x}\right]'$ vector transpuesto del $\frac{\partial f(x^o)}{\partial x}$, conocido como *gradiente de la función* $f'_t(x^o)$ en el punto **x**

La interpretación geométrica de la función derivada, $f'_t(x^o)$, es la expresión analítica de la tangente direccional, según la trayectoria **t ,** en el *hiperplano tangente* de la función $f(x)$ en el punto x^o [4]. En el límite, $\Delta x^o \rightarrow 0; (\Delta x^o{}_i \rightarrow 0)$,

3. Obviamos el teorema y la demostración que amparan esta expresión de la derivada direccional. Pueden verse en "Matemática para Economistas. Tomo II", págs. 646 y ss. Op.cit.
4. La generalización a *hiperespacios* que implica esta función se evidencia considerando los casos particulares en los que la dirección **t** se halla en uno de los planos *cartesianos* (y, x_i), en donde es $\cos\alpha_i = 1$ y $\cos\alpha = 0$ para los restantes cosenos directores, coincidiendo entonces la derivada direccional con la derivada parcial, $f'_t(x^o) = f'_{x_i}(x^o{}_i)$.

la desviación relativa de la función $\Delta y^{o}/\Delta x^{o}$ coincide con la derivada direccional $f'_{t}(x^{o})$, que la interpreta analíticamente.

Tanto la derivada direccional como la derivada parcial no son *adimensionadas,* dependiendo su valor de las unidades de medida en las que se expresan sus *n+1* magni-tudes participantes, tanto de la función, como de las *n* variables o argumentos. En particular, la *ecuación dimensional* de la derivada direccional es,

$$[D] \approx [Y]^{1}, [X_1]^{-1}, [X_2]^{-1}, \ldots [X_n]^{-1}$$

dimensionada *n+1*, razón por la que se introduce en el análisis económico la *derivada elástica* o *elasticidad* de la función, para evitar su dependencia de las unidades de medida. Significativa de la relación existente entre la *variación relativa* de la función respecto a su estado anterior $\Delta_t f(x^{o})/f(x^{o})$, y las *variaciones relativas* de sus variables o argumentos $\Delta x^{o}/x^{o}$, con la expresión vectorial,

$$E_t f(x^{o}) = \lim_{\Delta x^{o}\to 0} \frac{\Delta f_t(x^{o})/f(x^{o})}{\Delta x^{o}/x^{o}}$$

donde el vector denominador es

$$\Delta x^{o}/x^{o} \equiv (\Delta x^{o}_{1}/x^{o}_{1}, \Delta x^{o}_{2}/x^{o}_{2}, \ldots \Delta x^{o}_{n}/x^{o}_{n})$$

Es ahora la *ecuación dimensional*

$$[D] \approx [Y]^{0}, [X_1]^{0}, [X_2]^{0}, \ldots [X_n]^{0}$$

mostrando la *adimensionalidad* de la elasticidad *gradiente o total* E_t, independiente de las unidades de medida de las *n+1* magnitudes participantes. Es su desarrollo[5],

$$E_t f(x^{o}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{o}_{i}}{f(x^{o}_{i})} f'_{x_i}(x^{o}_{i}) \frac{\cos\alpha_i}{\cos\alpha^{o}_{i}} = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} f(x^{o}_{i}) \frac{\cos\alpha_i}{\cos\alpha^{o}_{i}}$$

donde $\cos\alpha^{o}_{i}$ son cosenos directores del punto $\mathbf{x^{o}}$.

5. Vid. "Matemática para Economistas. Tomo II", págs. 652 y ss. Op.cit.

En condiciones muy aceptables[6] puede admitirse $\cos\alpha_i = \cos\alpha^o_i$ = y el consiguiente desarrollo

$$E_t f(x^o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^o_i}{f(x^o_i)} f'_{x_i}(x^o_i) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} f(x^o_i)$$

deduciéndose en él la siguiente **propiedad** conceptual y operativa: *la elasticidad gradiente o total* es *suma de las elasticidades parciales* de *sus variables componentes cuando la variación gradiente mantiene la trayectoria inicial*,

$$E_t = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}$$

INTERPRETACIÓN MACRO/MICRO ECONÓMICA

La interpretación de la *elasticidad total*, también denominada *elasticidad gradiente* atendiendo a su concepto matemático, no es otra que la conocida en las *elasticidades parciales* pero ampliada ahora a un análisis más general y multivariable que excede a las limitaciones impuestas por la cláusula *caeteris paribus.* Su valor adimensionado, mayor, igual o inferior a *n,* explica la reacción relativa de la función (con el significado económico que le corresponda en las funciones demanda, ingreso, inversión, consumo, gasto, coste, empleo, etc. etc.) ante un impulso variacional relativo introducido en la asignación a sus variables. Entonces,

$$\frac{1}{n} E_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}$$

define la función micro/macroeconómica como *elástica, equilibrada o rígida*, si su valor adimensionado se comporta *mayor, igual o menor* que la unidad, si se mantiene la participación proporcional en sus variables[6]. El análisis de la elasticidad total no sólo permite la anterior calificación cualitativa, sino que desarrolla, pondera y cuantifica, la participación de las variables, con un muy especial significado en las políticas económicas que contemplan distintos *multiplicadores*.

6. Tales condiciones suponen el mantenimiento en la trayectoria **t** de la proporcionalidad existente en la participación inicial de las variables componentes (el mantenimiento de la trayectoria origen). En otro caso, las elasticidades parciales sufren la ponderación ($\cos\alpha_i / \cos\alpha^o_i$). Vid. "Matemática para Econo-mistas. Tomo II", págs. 652 y ss. Op.cit.

Naturalmente, la función macro/microeconómica analizada deberá cumplir las condiciones analíticas de continuidad y derivabilidad que son indispensables para la determinación de su comportamiento elástico.