LA ESTIMACIÓN DE MAGNITUDES ECONÓMICAS EN EL PROCESO DE INVERSIÓN

Del Académico Numerario
EXCMO. SR. DR. D. JAIME GIL ALUJA

Planteamiento del problema

Los procesos de inversión constituyen una compleja realidad que las empresas de nuestros tiempos abordan con no pocas dificultades como consecuencia de la intervención de aspectos de índole muy diversa. Resulta paradójico, sin embargo, que esta complejidad pueda surgir de planteamientos iniciales cuya simplicidad produce luego asombro cuando se va profundizando en los vericuetos que forman el entramado inversionista.

En efecto, bajo cualquier planteamiento que comporte una eventual decisión de invertir, se halla subyacente un principio: la corriente de cobros derivados de la adquisición y funcionamiento de un objeto de la inversión deben "por lo menos" compensar la corriente de pagos producida por el mismo. Así, de una manera muy esquematizada, se tiene, por una parte, los cobros surgidos como consecuencia de la producción y venta de los bienes y/o servicios elaborados por el objeto de la inversión (equipo en su ocurrencia) y, por otra, los pagos frecuentemente separados en diversas categorías que se pueden resumir en dos: los que provienen de la adquisición del objeto de la inversión y los que surgen como consecuencia de su funcionamiento (materias primas, mano de obra, gastos de entretenimiento...).

Con estas bases iniciales u otras parecidas, los especialistas en la materia han elaborado un amplio abanico de modelos que, recogiendo una extensa gama de aspectos que la realidad presenta, permiten un tratamiento más o menos adecuado a las necesidades de nuestros ejecutivos. Son muchos los elementos que, implícita o explícitamente se incorporan en los modelos de selección de inversiones, que constituyen una parte de las corrientes de cobros y pagos e influyen en ellas. Para citar sólo algunos, podemos decir que es frecuente encontrar la inflación, el progreso técnico, el desgaste, y un largo etcétera. La "manera" cómo se obtienen las cifras que constituyen el reflejo monetario de estos fenómenos no es uniforme en todos los conceptos y acostumbra a ser distinta de una empresa a otra. No nos vamos a escandalizar si advertimos con enorme frecuencia que estos "datos" del problema son estimados de manera muy poco académica e incluso basados en la simple intuición de quien debe suministrar la información. Hemos repetido con harta frecuencia que estas "cantidades", incorporadas como "datos" de los modelos no son, normalmente, el resultado de cálculos objetivos y por lo tanto no constituyen "medidas" sino resultados de estimaciones subjetivas y no son más que "valuaciones". Resultará entonces inadecuado utilizar en el modelo operadores duros, válidos sólo en el ámbito de la certeza o del azar y se impondrá el empleo de aquellos operadores, que hemos denominado blandos, aptos para el tratamiento de la subjetividad y la imprecisión.

Situados en este contexto, en el que las rápidas mutaciones sociales y económicas llevan a un ambiente de incertidumbre, creemos que resulta conveniente y hasta cierto punto necesario, escudriñar en los entresijos de este acto del operador humano que significa la estimación subjetiva de una cantidad, aunque detrás de ella, y como soporte, existan unos conocimientos técnicos, una experiencia, una intuición y hasta una genialidad.

Para ello, vamos a imaginar que en una empresa se plantea la necesidad de adquirir un equipo (objeto de la inversión) existente en el mercado, el cual, por sus características tecnológicas, no permite la estimación con la precisión deseada de los cobros y/o los pagos correspondientes a la totalidad o a parte de los elementos que intervienen en las corrientes monetarias derivadas de su eventual compra. Es suficientemente conocido que ésta es una condición necesaria para determinar la economicidad de la inversión a través de un criterio de selección previamente aceptado y poder así tomar una decisión basada en los instrumentos que la lógica económica suministra.

Ante esta eventualidad, el ejecutivo responsable de la empresa solicita el asesoramiento de un experto, quien, a través de los datos suministrados por la empresa vendedora del equipo, su experiencia profesional y la del personal técnico de la empresa compradora, y después de haber sondeado adecuadamente la situación, necesidades y perspectivas del mercado del producto o servicio que el objeto de la inversión produce, establece unas estimaciones consideradas aceptables de los tramos en los que se puede mover la magnitud buscada (pagos y/o cobros o cualquiera de sus componentes) en todos y cada uno de los períodos de vida útil del objeto de la inversión.

Como consecuencia de la ya habitual inestabilidad social y económica, el experto no desea expresar su opinión mediante números precisos sino que prefiere hacerlo mediante intervalos de confianza, optando así por una mayor libertad de expresión. Con ello, el experto pretende cubrir todas las posibilidades que se puedan presentar al recurrir a un "conjunto finito de intervalos" E, válidos para todos y cada uno de los períodos considerados. En este conjunto E, se incorpora también el valor de la magnitud estudiada en el momento de iniciar el proceso de inversión.

Supongamos que el experto establece como intervalos posibles, los siguientes:

$$E = \{ \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{F} \}$$

en donde:

$$\underset{\sim}{A} = [a_1, a_2] \quad , \quad \underset{\sim}{B} = [b_1, b_2] \quad , \quad \underset{\sim}{C} = [c_1, c_2]$$

$$\underset{\sim}{D} = [d_1, d_2] \quad , \quad \underset{\sim}{E} = [e_1, e_2] \quad , \quad \underset{\sim}{F} = [f_1, f_2]$$

Únicamente a título de ejemplo, vamos a aceptar que el punto de partida es la valuación $\underset{\sim}{A} = [a_1, a_2]$.

Antes de iniciar la presentación del modelo, señalemos que los elementos del conjunto E pueden ser expresados mediante valuaciones precisas, intervalos de confianza, tripletas, números borrosos o cualquier otra estimación que se considere adecuada a la realidad que se pretende estudiar.

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MODELO

Una vez establecidos los elementos del conjunto E, se plantea la necesidad de asignar a cada período las valuaciones que mejor puedan reflejar lo que le va a suceder en la realidad. En una primera instancia se podría proponer una estimación, igual para cada período, que comprendiera cualquiera de las cifras recogidas en el conjunto E. En el supuesto que nos ocupa, se hallaría como resultado un intervalo tal que tendría como extremo inferior el menor de los extremos inferiores y como extremo superior el mayor de los extremos superiores de los intervalos representativos del conjunto de estimaciones. Sería así:

$$x = [x_1, x_2]$$

en donde:

$$x_1 = a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 \wedge d_1 \wedge e_1 \wedge f_1$$

$$x_2 = a_2 \vee b_2 \vee c_2 \vee d_2 \vee e_2 \vee f_2$$

No parece necesario insistir en el hecho de que, en una gran parte de los casos, el intervalo $[x_1, x_2]$ sería tan amplio que resultaría inoperante a causa de su elevado grado de incertidumbre. Salvo raras excepciones, este camino aparece, pues, desprovisto de operatividad práctica.

Pasamos, seguidamente, a proponer un nuevo esquema que pretende recoger, en cierto modo, determinados aspectos que se hallan implícitos en las estimaciones directas. Para ello se pide al experto que establezca unas nuevas estimaciones mediante la asignación de un nivel de presunción sobre el "paso" de un elemento del conjunto E en un período t a otro (o al mismo) en el período t + 1. En otros términos se le solicita establecer unas nuevas valuaciones en [0, 1], correspondientes a la posibilidad de transición o paso de una valuación a otra. La obtención de esta información da lugar a una matriz o relación borrosa de transición, tal como la siguiente:

$$[\underset{\sim}{R}] = \begin{array}{c|cccccc|} & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \underset{\sim}{A} & r_{AA} & r_{AB} & r_{AC} & r_{AD} & r_{AE} & r_{AF} \\ \underset{\sim}{B} & r_{BA} & r_{BB} & r_{BC} & r_{BD} & r_{BE} & r_{BF} \\ \underset{\sim}{C} & r_{CA} & r_{CB} & r_{CC} & r_{CD} & r_{CE} & r_{CF} \\ \underset{\sim}{D} & r_{DA} & r_{DB} & r_{DC} & r_{DD} & r_{DE} & r_{DF} \\ \underset{\sim}{E} & r_{EA} & r_{EB} & r_{EC} & r_{ED} & r_{EE} & r_{EF} \\ \underset{\sim}{F} & r_{FA} & r_{FB} & r_{FC} & r_{FD} & r_{FE} & r_{FF} \\ \hline \end{array}$$

Finalmente, se le solicita también que exprese su opinión en relación con las valuaciones de la magnitud buscada en el primer período de puesta en marcha del objeto de la inversión. Esto dará lugar a un vector de situación tal como el siguiente:

$$[\underset{\sim}{q}(0)] = \begin{array}{|cccccc|} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline v_A & v_B & v_C & v_D & v_E & v_F \\ \hline \end{array}$$

A partir de estas estimaciones se pueden ir obteniendo los vectores de situación relativos a cada período mediante las sucesivas convoluciones:

$$[\underset{\sim}{q}(1)] = [\underset{\sim}{q}(0)] \circ [\underset{\sim}{R}]$$

$$[\underset{\sim}{q}(2)] = [\underset{\sim}{q}(1)] \circ [R] = [\underset{\sim}{q}(0)] \circ [\underset{\sim}{R}]^2$$

$$[\underset{\sim}{q}(n)] = [\underset{\sim}{q}(n\text{-}1)] \circ [\underset{\sim}{R}] = [\underset{\sim}{q}(0)] \circ [\underset{\sim}{R}]^n$$

Hay que señalar un hecho importante que diferencia el ámbito del azar del de la incertidumbre. Mientras que en el ámbito del azar, cuando las transiciones o pasos se miden mediante probabilidades, la convergencia hacia un límite, cuando éste existe, viene representado por $[M]^n$ cuando $[M]^n = [M]^s$, siendo $n > s$, en el ámbito de la incertidumbre la posición límite queda expresada por el cierre transitivo $[\hat{\underset{\sim}{R}}]$ en donde, como es conocido:

$$[\hat{\underset{\sim}{R}}] = [\underset{\sim}{R}] \cup [\underset{\sim}{R}]^2 \cup \ldots \cup [\underset{\sim}{R}]^n$$

Ahora bien, como acabamos de señalar, la existencia o no de convergencia en el límite, así como el comportamiento de las sucesivas relaciones borrosas convolucionadas $[\underset{\sim}{R}]^j$ dan lugar a una casuística cuyo estudio puede proporcionar elementos valiosos en el intento de conseguir luz sobre el tema planteado.

Con objeto de hacer más sencilla la exposición, vamos a recurrir a ejemplos numéricos que cubran la más amplia gama de situaciones que los procesos reales plantean.

LA HIPÓTESIS DE EXISTENCIA DE CLASES DE EQUIVALENCIA

Volvamos al planteamiento inicial del problema, para situarnos en el momento en que el experto debe asignar las correspondientes valuaciones. Empieza por el conjunto E:

$$E = \{ [10, 20], [21, 25], [26, 30], [31, 35], [36, 40], [41, 50] \}$$

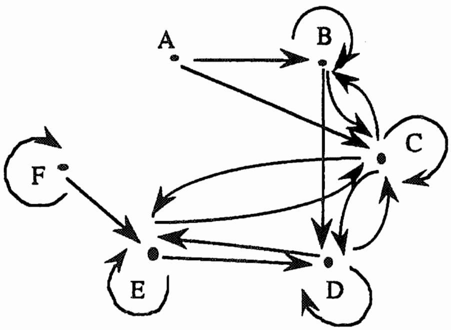
Se observa que con la totalidad de los intervalos se cubre un segmento [10, 50] que se considera excesivamente amplio.

Seguidamente suministra la siguiente relación borrosa de transición:

$[\underset{\sim}{R}] =$

	[10, 20]	[21, 25]	[26, 30]	[31, 35]	[36, 40]	[41, 50]
[10, 20]		.8	.6			
[21, 25]		.6	1	.8		
[26, 30]		.6	.8	1	.9	
[31, 35]			.8	1	.8	
[36, 40]			.4	.6	.8	
[41, 50]					1	.8

que se puede presentar también mediante un grafo asociado a esta relación, que es:



Finalmente proporciona el vector de situación inicial:

$[\underset{\sim}{q}(0)] =$

[10, 20]	[21, 25]	[26, 30]	[31, 35]	[36, 40]	[41, 50]
1	.9	.8	.6	.2	.1

Una vez recogidas las valuaciones dadas por el experto, vamos a desarrollar el proceso que permita una estimación válida de las magnitudes necesarias para el estudio de la inversión. Para ello seguiremos un procedimiento[1] cuya primera fase consiste en normalizar la relación borrosa de transición [$\underset{\sim}{R}$] que dará lugar a [$\underset{\sim}{N}$][2].

[$\underset{\sim}{N}$] =

	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$	$\underset{\sim}{F}$
$\underset{\sim}{A}$		1	.75			
$\underset{\sim}{B}$		.6	1	.8		
$\underset{\sim}{C}$		.6	.8	1	.9	
$\underset{\sim}{D}$			.8	1	.8	
$\underset{\sim}{E}$			.5	.75	1	
$\underset{\sim}{F}$					1	.8

Se observa que entre la relación borrosa [$\underset{\sim}{R}$] y la [$\underset{\sim}{N}$] existen pocas variaciones en las valuaciones de cada casilla y éstas son aceptadas por el experto. Podría darse la circunstancia de que en una fila no existieran valuaciones cercanas a la unidad. En este caso, la normalización daría lugar a diferencias sustanciales entre las valuaciones de paso de un estado a otro de la relación borrosa [$\underset{\sim}{R}$] y [$\underset{\sim}{N}$]. Resultaría entonces prudente realizar el proceso que proponemos, pero partiendo de la relación borrosa sin normalizar [$\underset{\sim}{R}$]. En este supuesto sería posible realizar la normalización del cierre transitivo [$\underset{\sim}{R}$] si resulta necesario, lo que no es el caso en éste y otros muchos problemas que se plantean en el campo de la gestión. Son suficientemente conocidas las ventajas formales de utilizar las relaciones borrosas normalizadas como consecuencia de la correspondencia biunívoca entre las matrices estocásticas y las relaciones borrosas normales[3].

(1) Kauffmann A. y Gil Aluja, J.: Nuevas técnicas para la dirección estratégica. Publicaciones de la Universitat de Barcelona, 1991, pág. 132-133.
(2) Para una mayor comodidad, a partir de ahora vamos a utilizar los símbolos $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, ... en lugar de explicitar los intervalos correspondientes [10, 20], [21, 25]...
(3) Véase a este respecto: Kauffmann A. y Gil Aluja J.: Nuevas técnicas para la dirección estratégica. P.U.B. Barcelona, 1991, pág. 118-123.

Realizadas estas reflexiones, seguiremos con el proceso para determinar cuáles son los intervalos que pueden "suceder" a otros intervalos de confianza, es decir, qué magnitudes del conjunto E pueden tener lugar después de otras del mismo conjunto. Lo primero que interesa saber es si existen o no "circuitos" en el grafo asociado. Así, por ejemplo, suponiendo que en un período la magnitud se halla en [26, 30], ver si es posible pasar, en otros períodos, a [31, 35] o bien a [21, 25], etc. y se puede volver a [26, 30]. Para ello, se va a presentar la matriz booleana asociada [B], a la que se han añadido dos filas:

$$
[B] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\
\hline
\underset{\sim}{A} & & 1 & 1 & & & \\
\hline
\underset{\sim}{B} & & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
\underset{\sim}{C} & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\underset{\sim}{D} & & & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\underset{\sim}{E} & & & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\underset{\sim}{F} & & & & & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|l}
 & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} & \\
\hline
\Lambda_0 & 0 & 3 & 5 & 4 & 4 & 1 & \underset{\sim}{A} \\
\hline
\Lambda_1 & \bullet & 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & \textbf{no existen ceros} \\
\hline
\end{array}
$$

En la primera de estas filas se coloca, en cada casilla el resultado de sumar los unos de cada una de las columnas $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$... Dado que en Λ_0 existe un 0 en $\underset{\sim}{A}$, se tiene que por este vértice "no" pasa un circuito. Se quita de la matriz [B] la fila $\underset{\sim}{A}$ y se vuelven a sumar todas las columnas después de haber marcado convenientemente (con un punto en este caso) la casilla (o casillas en general) en la que había surgido un cero. Se obtiene así la fila Λ_1 en la que se observa que <u>no aparece ningún cero.</u> Esto indica que en este grafo existen circuitos y, por tanto, no es posible realizar una ordenación de los estados del conjunto E.

El interés que ofrece el establecimiento de un orden viene dado por el hecho de que una vez salido el sistema de un estado, que aquí significa que la magnitud ha abandonado un intervalo, ya no vuelve a él, sino que pasa a otros, con lo que el estado puede calificarse de transitorio, exceptuando, evidentemente el o los estados finales. Ahora bien, a pesar de que en este caso no resulta posible ordenar los estados a causa de los circuitos, sí es posible reunir varios estados en las denominadas "clases de equivalencia", cuya característica principal es que en ellas todos los estados pertenecen a un mismo circuito, es decir, que se puede pasar de cualquier estado a cualquier otro a través de un camino (es decir, de un intervalo de E a otro), pero una vez se ha salido de este circuito, ya no puede volverse a él. Esta característica hace que sea posible ordenar las clases de equivalencia. Señalemos que, por propia definición, las clases de equivalencia corresponden en teoría de grafos a los "subgrafos fuertemente conexos". Vamos a obtener, pues, las clases de equivalencia, utilizando el algoritmo de Malgrange[4].

Partiremos de la matriz booleana asociada [B] y se obtendrá para un vértice escogido arbitrariamente, por ejemplo $\underset{\sim}{A}$ el cierre transitivo $\Gamma\{\underset{\sim}{A}\}$ y el cierre transitivo inverso $\Gamma^{-}\{\underset{\sim}{A}\}$. La intersección de ambos proporciona los elementos que forman la clase de equivalencia a la que pertenece $\underset{\sim}{A}$. Será:

	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$	$\underset{\sim}{F}$	$\hat{\Gamma}\{\underset{\sim}{A}\}$
$\underset{\sim}{A}$		1	1				0
$\underset{\sim}{B}$		1	1	1			1
$\underset{\sim}{C}$		1	1	1	1		1
$\underset{\sim}{D}$			1	1	1		2
$\underset{\sim}{E}$			1	1	1		2
$\underset{\sim}{F}$					1	1	x
$\hat{\Gamma}^{-}\{\underset{\sim}{A}\}$	0	x	x	x	x	x	

(4) Malgrange, Ives: Decomposition d'un graphe en sous-graphes fortement connexes maximaux. Nota interna de la Cie. de Machines Bull, París, 1967.

De donde:

$$\hat{\Gamma}\{\underset{\sim}{A}\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{\underset{\sim}{A}\} = \{\underset{\sim}{A}\}$$

Se suprime, ahora, la fila y columna A y se vuelve a iniciar el proceso con otro vértice cualquiera, por ejemplo B. Se tendrá:

	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$	$\underset{\sim}{F}$	$\hat{\Gamma}\{\underset{\sim}{B}\}$
$\underset{\sim}{B}$	1	1				0
$\underset{\sim}{C}$	1	1	1	1		1
$\underset{\sim}{D}$		1	1	1		2
$\underset{\sim}{E}$		1	1	1		2
$\underset{\sim}{F}$				1	1	x
$\hat{\Gamma}^{-}\{\underset{\sim}{B}\}$	0	1	2	2	3	

De donde:

$$\hat{\Gamma}\{\underset{\sim}{B}\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{\underset{\sim}{B}\} = \{\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{E}\}$$

Queda, finalmente $\underset{\sim}{F}$ que forma, por sí misma, otra clase de equivalencia.

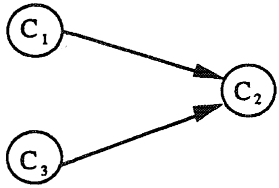
Se tendrá así, que las clases de equivalencia numeradas arbitrariamente, son:

$$C_1 = \{\underset{\sim}{A}\}$$

$$C_2 = \{\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{E}\}$$

$$C_3 = \{\underset{\sim}{F}\}$$

Si se tiene en cuenta el grafo inicial, estas clases se pueden presentar mediante el siguiente "grafo de clases".



Habida cuenta que en este grafo de clases no existen circuitos, será posible buscar la "función ordinal" de las clases de equivalencia C_1, C_2, C_3. Utilizaremos para ello el mismo procedimiento que el empleado anteriormente para los estados de E. Se tendrá:

	C_1	C_2	C_3
C_1		1	
C_2			
C_3		1	

0	2	0

•	0	•

	Nivel
C_1 , C_3	N_0
C_2	N_1

Se comprueba así algo que ya se veía al mirar el grafo de clases: el orden, en este caso parcial, será:

$$C_2 \succ C_1 , \quad C_2 \succ C_3$$

es decir:

$$\{ \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{E} \} \succ \{ \underset{\sim}{A} \}$$

$$\{ \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{E} \} \succ \{ \underset{\sim}{F} \}$$

lo que pone de manifiesto que, cuando el sistema sale de las valuaciones representadas por $\underset{\sim}{A} = [10, 20]$ y $\underset{\sim}{F} = [41, 50]$ por mucho tiempo que transcurra nunca se volverá a ir hacia estos intervalos.

Pasamos ahora a ver si la relación borrosa normal permite, a través de la utilización de los adecuados operadores, ir obteniendo las sucesivas estimaciones de la correspondiente magnitud para cada uno de los períodos de vida útil del objeto de la inversión. Para ello procederemos a intercambiar adecuadamente las filas y columnas para tener la relación borrosa de transición normalizada expresada de una manera normal. De esta manera se pondrán juntos los elementos de E que pertenezcan a la misma clase de equivalencia[5]:

$[\underset{\sim}{N}] =$

	$\underset{\sim}{F}$	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$
$\underset{\sim}{F}$	.8					1
$\underset{\sim}{A}$			1	.75		
$\underset{\sim}{B}$			.6	1	.8	
$\underset{\sim}{C}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{D}$				.8	1	.8
$\underset{\sim}{E}$				.5	.75	1

Se halla seguidamente el cierre transitivo $[\hat{\underset{\sim}{N}}]$ obteniendo sucesivamente:

$[\underset{\sim}{N}]^2 =$

	$\underset{\sim}{F}$	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$
$\underset{\sim}{F}$	.8			.5	.75	1
$\underset{\sim}{A}$			.6	1	.8	.75
$\underset{\sim}{B}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{C}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{D}$			.6	.8	1	.8
$\underset{\sim}{E}$			.5	.75	.75	1

(5) En este ejemplo concreto el orden no tendría por qué ser alterado. Nosotros lo hemos hecho para mostrar un supuesto más general.

$[\underset{\sim}{N}]^3 =$

	$\underset{\sim}{F}$	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$
$\underset{\sim}{F}$	.8		.5	.75	.75	1
$\underset{\sim}{A}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{B}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{C}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{D}$			.6	.8	1	.8
$\underset{\sim}{E}$			.6	.75	.75	1

$[\underset{\sim}{N}]^4 =$

	$\underset{\sim}{F}$	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$
$\underset{\sim}{F}$	.8		.6	.75	.75	1
$\underset{\sim}{A}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{B}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{C}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{D}$			.6	.8	1	.8
$\underset{\sim}{E}$			.6	.75	.75	1

$[\underset{\sim}{N}]^5 =$

	$\underset{\sim}{F}$	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{E}$
$\underset{\sim}{F}$	.8		.6	.75	.75	1
$\underset{\sim}{A}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{B}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{C}$			.6	.8	1	.9
$\underset{\sim}{D}$			.6	.8	1	.8
$\underset{\sim}{E}$			.6	.75	.75	1

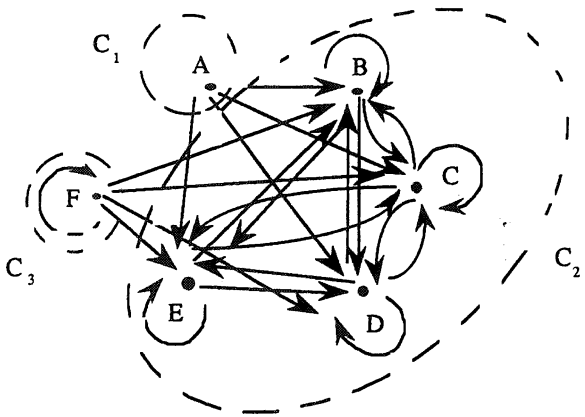
Habida cuenta que $[\underset{\sim}{N}]^4 = [\underset{\sim}{N}]^5$ detenemos el proceso para obtener el cierre transitivo:

$$[\hat{\underset{\sim}{N}}] = [\underset{\sim}{N}] \cup [\underset{\sim}{N}]^2 \cup [\underset{\sim}{N}]^3 \cup [\underset{\sim}{N}]^4 \cup [\underset{\sim}{N}]^5$$

Se tendrá:

$$[\hat{\underset{\sim}{N}}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} \\ \hline
\underset{\sim}{F} & .8 & & .6 & .75 & .75 & 1 \\ \hline
\underset{\sim}{A} & & & 1 & 1 & 1 & .9 \\ \hline
\underset{\sim}{B} & & & .6 & 1 & 1 & .9 \\ \hline
\underset{\sim}{C} & & & .6 & .8 & 1 & .9 \\ \hline
\underset{\sim}{D} & & & .6 & .8 & 1 & .8 \\ \hline
\underset{\sim}{E} & & & .6 & .75 & .75 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

Cuyo grafo asociado es:



Se observa, como no podía ser de otra manera, que se mantienen en el cierre transitivo, las mismas clases de equivalencia, Esto indica que los estados $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{F}$ son estados transitorios y una vez salidos de ellos el sistema ya no vuelve de nuevo a ellos. En nuestro caso, se puede afirmar que, situados en cualquier tipo de estado distinto de $\underset{\sim}{A} = [10, 20]$ y de $\underset{\sim}{F} = [41, 50]$, entrañará que en ningún período posterior se podrán conseguir las valuaciones que estas posiciones comportan. Por el contrario, con mayor o menor posibilidad la correspondiente magnitud se podrá desplazar de un año a otro entre $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{D}$ y $\underset{\sim}{E}$.

Partiendo ahora de las estimaciones realizadas por el experto en relación con la posición en el momento inicial 0 (relativo a un momento futuro en donde se inicia el proceso) dado por el vector $[\underset{\sim}{q}(0)]$ se tendrá:

$$[\underset{\sim}{q}(0)] \circ [\underset{\sim}{\hat{N}}] = [\underset{\sim}{q}(n)]$$

que pondrá de manifiesto las posibilidades a largo plazo. Pasemos ahora a las estimaciones de cada período.

VALUACIONES DE LA MAGNITUD EN CADA PERÍODO

Para realizar una estimación relativa a la magnitud deseada para todos los períodos que componen la vida útil del objeto de la inversión, bastará aplicar las sucesivas relaciones borrosas $[\underset{\sim}{N}]^j$, j = 1, 2, 3 ...n, al vector de situación inicial $[\underset{\sim}{q}(0)]$, a través del operador maxmin e ir obteniendo así $[\underset{\sim}{q}(1)]$, $[\underset{\sim}{q}(2)]$,... $[\underset{\sim}{q}(n)]$. Será, en nuestro caso:

$$[\underset{\sim}{q}(1)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \end{array} \atop \left[\begin{array}{cccccc} 1 & .9 & .8 & .6 & .2 & .1 \end{array}\right] \circ \begin{array}{c|cccccc} & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \underset{\sim}{A} & & 1 & .75 & & & \\ \underset{\sim}{B} & & .6 & 1 & .8 & & \\ \underset{\sim}{C} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \underset{\sim}{D} & & & .8 & 1 & .8 & \\ \underset{\sim}{E} & & & .5 & .75 & 1 & \\ \underset{\sim}{F} & & & & & 1 & .8 \end{array} = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \end{array} \atop \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & .9 & .8 & .8 & .1 \end{array}\right]$$

Se observa, en el resultado obtenido, que la estimación para el primer período comporta un máximo de presunción en $\underset{\sim}{B} = [21, 25]$ y también una presunción de $\alpha = 0.9$ en $\underset{\sim}{C} = [26, 30]$. La presunción desciende en los intervalos $\underset{\sim}{D}$ = [31, 35] y $\underset{\sim}{E}$ = [36, 40] a un nivel α = 0.8. Habida cuenta del alto nivel alcanzado en estos intervalos, parece que la prudencia exija, en una primera instancia, aceptar como estimación la magnitud <u>para este período el intervalo [21, 40]</u>, a pesar del alto grado de incertidumbre que comporta.

Pasemos al segundo período:

$$[\underset{\sim}{g}(2)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.2} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \underset{\sim}{A} & & .6 & 1 & .8 & .75 & \\ \hline \underset{\sim}{B} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline \underset{\sim}{C} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline \underset{\sim}{D} & & .6 & .8 & 1 & .8 & \\ \hline \underset{\sim}{E} & & .5 & .75 & .75 & 1 & \\ \hline \underset{\sim}{F} & & & .5 & .75 & 1 & .8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array}$$

Aceptaremos, para el <u>segundo período el intervalo [26, 40]</u> dada la alta presunción de $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{D}$ y $\underset{\sim}{E}$.

Para el tercer período se tendrá:

$$[\underset{\sim}{g}(3)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.2} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \underset{\sim}{A} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline \underset{\sim}{B} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline \underset{\sim}{C} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline \underset{\sim}{D} & & .6 & .8 & 1 & .8 & \\ \hline \underset{\sim}{E} & & .6 & .75 & .75 & 1 & \\ \hline \underset{\sim}{F} & & .5 & .75 & .75 & 1 & .8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array}$$

A pesar de que el grado de presunción cambia con respecto al segundo período, se puede continuar aceptando para <u>el tercer período el intervalo [26, 40]</u>.

Para el cuarto período será:

$$
[\underset{\sim}{q}(4)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.2} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array} \cdot
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline
\underset{\sim}{A} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline
\underset{\sim}{B} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline
\underset{\sim}{C} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \hline
\underset{\sim}{D} & & .6 & .8 & 1 & .8 & \\ \hline
\underset{\sim}{E} & & .6 & .75 & .75 & 1 & \\ \hline
\underset{\sim}{F} & & .6 & .75 & .75 & 1 & .8 \\ \hline
\end{array}
= \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array}
$$

Se observa que el resultado coincide con el obtenido para el período anterior, lo cual lleva a la aceptación del <u>mismo intervalo [26, 40]</u> para éste y sucesivos períodos.

En resumen, se tendría:

Periodo 1 : [21, 40] , con $[\underset{\sim}{q}(1)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{.1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array}$

Periodo 2 : [26, 40] , con $[\underset{\sim}{q}(2)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array}$

Periodo 3 y siguientes : [26, 40] , con $[\underset{\sim}{q}(3)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.8} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.9} & \multicolumn{1}{c|}{.1} \\ \hline \end{array}$

Si se utilizara el cierre transitivo $[\hat{\underset{\sim}{N}}]$ para una situación a largo plazo, se observará que tendrá lugar una ampliación del intervalo a considerar como consecuencia del aumento del grado de presunción para cada una de las posibles posiciones. En efecto:

$$[\underset{\sim}{q}(n)] = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline 1 & .9 & .8 & .6 & .2 & .1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|cccccc} & \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline \underset{\sim}{A} & & 1 & 1 & 1 & .9 & \\ \underset{\sim}{B} & & .6 & 1 & 1 & .9 & \\ \underset{\sim}{C} & & .6 & .8 & 1 & .9 & \\ \underset{\sim}{D} & & .6 & .8 & 1 & .8 & \\ \underset{\sim}{E} & & .6 & .75 & .75 & 1 & \\ \underset{\sim}{F} & & .6 & .75 & .75 & 1 & .8 \end{array} = \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & .9 & .1 \end{array}$$

Esto comportaría considerar, en el supuesto de prudencia extrema, el intervalo de confianza [21, 40].

ELEMENTOS TÉCNICOS PARA UNA REDUCCIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Se ha podido observar que en los resultados obtenidos en el ejemplo didáctico, aparecen unas estimaciones impregnadas de un alto grado de incertidumbre, la cual queda reflejada en la amplitud de los intervalos o, en el supuesto de escoger los subconjuntos borrosos [q (r)], r = 1,2,3, ...n, en el alto nivel de presunción que en cada período tienen varios intervalos (casi siempre $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{D}$ y $\underset{\sim}{E}$). No se trata de un caso especial o aislado, sino que este fenómeno se puede dar en una variada gama de situaciones que la realidad plantea.

Con objeto de reducir la incertidumbre a la vez que se mitiga el grado de subjetividad inherente a toda estimación realizada por un experto, se puede recurrir a una técnica, que ya hemos utilizado en otras ocasiones: el contraexpertizaje con R + -expertones. Para ello vamos a partir del intervalo obtenido para uno de los períodos que puede ser [21, 40] o bien [26, 40] en el supuesto que hemos desarrollado. A efectos de generalización, se designará:

$$\underset{\sim}{M} = [M_{*}, M^{*}] \subset R^{+}$$

Dado que el proceso a seguir es conocido, vamos a soslayar los aspectos teóricos que justifican la validez de este esquema[6] pasando directamente a los aspectos más operativos. Para ello se va a pedir a un número determinado de expertos que sitúen su opinión en relación al intervalo obtenido $[M_*, M^*]$ (suponiendo que éste sea aceptado por todos, ya que, en caso contrario, debería ser ampliado a otro más incierto $[M'_*, M^{*'}] \supset [M_*, M^*]$), con la ayuda de una escala semántica tal como:

0: para M_*
0.1: prácticamente M_*
0.2: casi M_*
0.3: cercano a M_*
0.4: más cerca de M_* que de M^*
0.5: tan cerca de M_* como de M^*
0.6: más cerca de M^* que de M_*
0.7: cercano a M^*
0.8: casi M^*
0.9: prácticamente M^*
1: para M^*

Para dar una mayor libertad, se permite a los contraexpertos que expresen sus opiniones mediante un intervalo $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}] \subset [0,1]$, i = 1,2 ...m contraexpertos. Si se acepta el principio de linealidad en el posicionamiento dentro del intervalo $[M_* \; M^*]$ se tendrá que la opinión de un contraexperto i, $[m_{i1}, m_{i2}]$, vendrá dada por:

$$[m_{i1}, m_{i2}] = M_* + (M^* - M_*) (\cdot) [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}]$$

Si escogemos uno de los intervalos obtenidos para un período, por ejemplo [26, 40] para el período 3, y se pide a 8 contraexpertos (este número es, evidentemente, arbitrario) que proporcionen sus opiniones a través de un posicionamiento en la escala endecadaria, se obtienen unos intervalos $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}]$, i = 1,2,...8, tales como los siguientes:

Experto 1:	[.6, .8]	Experto 5:	[.2, .7]
Experto 2:	[.4, .5]	Experto 6:	[.1, .4]
Experto 3:	.6	Experto 7:	[.6, .9]
Experto 4:	[.3, .5]	Experto 8:	[0, .3]

(6) Para un mayor detalle se puede consultar Kauffmann, A, y Gil Aluja, J.: Técnicas de gestión de empresa, Previsiones, decisiones y estrategias. Ed. Pirámide, Madrid 1992, pág. 236-265.

A partir de estas informaciones se obtiene la estadística de las veces que los expertos han dado la misma valuación como extremo inferior y las veces que han dado la misma valuación como extremo superior. Se pasará seguidamente a hallar las frecuencias normalizadas, dividiendo cada cifra del cuadro por 8, número de contraexpertos consultados. Se tendrá:

0	1	
.1	1	
.2	1	
.3	1	1
.4	1	1
.5		2
.6	3	1
.7		1
.8		1
.9		1
1		

estadística

0	.125	
.1	.125	
.2	.125	
.3	.125	.125
.4	.125	.125
.5		.250
.6	.375	.125
.7		.125
.8		.125
.9		.125
1		

frecuencias normalizadas

A partir de las frecuencias normalizadas y realizando una acumulación a partir de $\alpha = 1$ hasta $\alpha = 0$ se obtiene el expertón $\underset{\sim}{\alpha}_j$, en donde j es el período considerado (en este caso j = 3).

0	1	1
.1	.875	1
.2	.750	1
.3	.625	1
.4	.500	.875
.5	.375	.750
.6	.375	.500
.7	0	.375
.8	0	.250
.9	0	.125
1	0	0

Expertón $\underset{\sim}{\alpha}_i$

Finalmente, con objeto de obtener la opinión agregada de todos los expertos, se halla el R± expertón a partir de la ecuación: $\underset{\sim}{m}_i = M_* + (M^* - M_*) (.) \underset{\sim}{\alpha}_i$ que en este supuesto resultará:

$$\underset{\sim}{m}_3 = 26 + (40 - 26)(.)$$

0	1	1
.1	.875	1
.2	.750	1
.3	.625	1
.4	.500	.875
.5	.375	.750
.6	.375	.500
.7	0	.375
.8	0	.250
.9	0	.125
1	0	0

Expertón en [0.1]

=

0	40	40
.1	38.25	40
.2	36.50	40
.3	34.75	40
.4	33	38.25
.5	31.25	36.50
.6	31.25	33
.7	26	31.25
.8	26	29.5
.9	26	27.75
1	26	26

Expertón en R^+

El expertón en R^+ obtenido, llamado también R^+ -expertón, proporciona toda la información disponible relativa a la opinión agregada del experto y todos los contraexpertos. Con ello se ha cumplido con uno de los requisitos fundamentales de la gestión en la incertidumbre: mantener toda la información y también la incertidumbre, a lo largo de todo el proceso, haciendo caer la entropía lo más tarde posible. Dado que nos hallamos ya en el punto final, vamos a reducir la incertidumbre hallando la esperanza matemática del R^+ -expertón. Para ello bastará sumar las columnas de la izquierda, por un lado, y de la derecha, por otro (exceptuando el nivel $\alpha = 0$) y dividir los resultados por 10. Se tendrá:

$$\mathcal{E}\,(\underset{\sim}{m}_3) = [\,30.90,\ 34.22\,]$$

Se tiene así que para el período 3 tomado como ejemplo, resulta una estimación [30.90, 34.22] que constituye un intervalo menos incierto que el de partida [26, 40].

Es evidente que en este caso se llegaría al mismo resultado sin necesidad de pasar por la utilización de los expertones, con sólo realizar la medida (es decir, hacer caer la entropía) al inicio, con las estimaciones directas de los expertos. En efecto, la media de las valuaciones es:

$$\frac{1}{8}(\cdot)\ ([.6, .8]\ (+)\ [4, .5]\ (+)\ [.6, .6]\ (+)\ [.3, .5]\ (+)\ [.2, .7]\ (+)\ [.1, .4]$$

$$(+)\ [.6, .9]\ (+)\ [0\ , .3] = [0.350, 0.5875]$$

y la estimación buscada:

$$26 + (40\text{-}26)\ (\cdot)\ [0.350, 0.5875] = [30.90.\ 34.22]$$

que constituye el mismo resultado que el hallado mediante los R^+ -expertones.

En este, y otros muchos supuestos, no parece que tenga especial interés recurrir a una técnica más compleja cuando se obtiene el mismo resultado a través de un sencillo cálculo elemental. Esto sería cierto si no se tuviera en cuenta un fenómeno importante, cual es la información. Si se hace caer la entropía al principio, se pierde la información, ya que ésta no se arrastra en los cálculos sucesivos, llegándose al final únicamente con la media. Evidentemente, se podrá argüir que en un caso como el estudiado, en el que existen solamente 8 contraexpertos, no tiene demasiada utilidad la información sintetizada (pero completa) del R^+ -expertón, ya que ésta también existe en el cuadro que proporciona los intervalos dados inicialmente por los 8 contraexpertos. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando el número de contraexpertos consultados es elevado, como debe ser el supuesto más habitual.

Por otra parte, sucede con frecuencia que los cálculos no se terminan con la obtención de la esperanza matemática, sino que ésta sólo constituye una información de síntesis de carácter intermedio y el R^+ -expertón es sometido a cálculos posteriores. Si los operadores utilizados en estos cálculos son todos lineales, el resultado final será siempre el mismo utilizando medias que con el empleo de R^+ -expertones. Repetimos una vez más que entonces únicamente se perderá información. Pero si se emplean operadores no lineales (por ejemplo max $(\vee)$ o min $(\wedge)$) entonces las medias no resultan ya válidas y debe recurrirse a otro tipo de técnica: los R^+ -expertones. Nuestro deseo de una mayor generalización a través de ejemplos didácticos, nos ha llevado a escoger el camino descrito.

BREVE CONSIDERACIÓN FINAL

Este esquema ideado para la obtención de magnitudes económicas que intervienen en el proceso de inversión, parte de una premisa elemental que cuantos han vivido los problemas que la realidad inversionista de la empresa plantea, conocen perfectamente: No resulta fácil estimar cuantitativamente, ni siquiera en términos imprecisos, los elementos formativos de las corrientes de cobros y pagos derivados de la decisión de invertir. Es por ello que el objetivo que aquí nos hemos impuesto puede constituir un nuevo elemento que colabore en la construcción de este complejo puzzle que es el proceso de inversión.

El camino seguido para la elaboración del modelo propuesto, se ha asentado en técnicas secuenciales cuyas bases son construidas partiendo de teorías seudomarkovianas, que hemos desarrollado junto con el profesor Kauffmann, así como en la utilización de los métodos de agregación derivados de la teoría de los expertones. Es evidente que este tema no es ni completo ni exhaustivo. Sólo deseamos que sea un toque de atención sobre un problema que la realidad plantea con harta frecuencia y que los estudiosos de la gestión acostumbran a soslayar. Esperamos que otros, con futuros trabajos, sabrán crear mejores caminos que permitan avanzar en la tarea de renovar las técnicas de gestión de las inversiones para así hacerlas más aptas para el tratamiento de la convulsa realidad de nuestros días.

BIBLIOGRAFIA

- Gil Aluja, J.: *Inversiones. Certeza, riesgo e incertidumbre. I Certeza.* Publ. F. Ciencias E y E. Barcelona 1991.
- Kauffmann, A. y Gil Aluja, J. *Nuevas técnicas para la dirección estratégica.* Publ. Universidad de Barcelona 1991.
- Kauffmann A. y Gil Aluja, J. *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias.* Ed. Pirámide. Madrid 1992.
- Malgrange, I. *Decomposition d'un graphe en sous-graphes fortement connexe maximaux.* Cie de Machines Bull, París, 1967.