b) COMUNICACIONES

LA SELECCIÓN DE INVERSIONES EN BASE A CRITERIOS DIVERSIFICADOS

Del Académico de Número
EXCMO. SR. DR. D. JAIME GIL ALUJA

Algunos aspectos preliminares

Los estudios clásicos de selección de inversiones hacen especial hincapié en la importancia que adquiere, para tomar la decisión de invertir, el hecho de que la corriente de cobros "tomada en su conjunto" sea superior a la de pagos también considerada conjuntamente. De ahí nace una variada gama de modelos que permiten, bajo ciertas condiciones, realizar estudios de economicidad. Se infiere de ellos que el elemento fundamental, cuando no el único, para la decisión, pertenece al campo estrictamente monetario.

Ahora bien, la complejidad de las situaciones en las que se mueve hoy la empresa hacen que este planteamiento, aun siendo necesario, quizás no resulte suficiente en la mayor parte de los casos. Es evidente que una de las constantes que mueven las políticas y las estrategias de gestión es la consecución de la mayor riqueza posible para la empresa y sus accionistas, pero este objetivo no se obtiene solamente como consecuencia de una relación de causalidad directa e inmediata sino que intervienen también, y no de manera despreciable, los efectos indirectos o de segunda generación[1].

Este razonamiento nos ha hecho pensar en la conveniencia de elaborar un esquema[2] en el que se pongan de manifiesto, de manera explícita, los diversos aspectos que intervienen en la decisión de invertir, que denominaremos "elementos de decisión".

(1) Señalamos a este respecto el interés que puede tener la teoría de los efectos olvidados (Kaufmann, A. y Gil Aluja, J.: *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1987).
(2) Un primer planteamiento sobre este tema ha tenido lugar en: Gil Aluja, J.: *Selección multicriterio de inversiones mediante retículos de Galois*. Trabajo presentado en el homenaje al Prof. López Moreno, elaborado en enero de 1994.

El planteamiento que se realiza a continuación partirá, pues, de la existencia de un conjunto:

$$C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$$

que reúne los elementos que se considera inciden en la decisión de invertir.

En un intento de llegar al mayor grado de generalización posible, se va a suponer que cada C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, viene estimando a través de una distinta evaluación y, que entre ellos existe incluso una elevada heterogeneidad. Por tanto, sólo pueden ser calculables a través de conceptos de medida o valuación sustancialmente diferentes.

Se supone, también, que existe una relación entre estos elementos de decisión y los potenciales objetos de decisión, los cuales se pueden reunir también en otro conjunto:

$$E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$$

formado por todos aquellos objetos sobre los que puede recaer la decisión de invertir.

Esta relación puede ser expresada mediante una matriz que, en su formulación más general, tomará la forma de una relación borrosa $\underset{\sim}{R}$, tal como:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & E_1 & E_2 & E_3 & \cdots & E_m \\
\hline
C_1 & r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\
\hline
C_2 & r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\
\hline
C_3 & r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots & r_{3m} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
C_n & r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nm} \\
\hline
\end{array}$$

Para una descripción más cómoda del proceso que proponemos vamos a considerar el supuesto de decisión de invertir en un equipo industrial. Ni que decir tiene que el modelo es utilizable en cualquier tipo de inversión, con las necesarias adaptaciones, evidentemente.

En el mercado existe un número finito de equipos m, aptos para la actividad que se desea realicen, que en este caso supondremos igual a 7 y que serán E_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Además, se considera necesario tener en cuenta un número finito de elementos de decisión n, que se supondrá igual a 5 y que serán C_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$.

Sólo a título indicativo, señalamos como elementos de decisión los siguientes:

C_1 = Valor capital de una inversión (V.A.N.).
C_2 = Grado de capitalización del equipo (necesidades financieras iniciales).
C_3 = Condiciones financieras (fraccionamiento de los pagos del equipo).
C_4 = Facilidad de obtener asistencia técnica (reparaciones y piezas de recambio).
C_5 = Posibilidad de venta de la producción estimada del equipo.

Evidentemente, en cada circunstancia y en cada empresa, pueden aparecer otros elementos distintos de los señalados cuya incorporación resulte necesaria para tomar la decisión de invertir, lo que puede llevar a aumentar o disminuir el número que ha sido tomado como ejemplo.

La diferente naturaleza de los elementos de decisión condiciona la unidad de medida o valuación en la que se expresa cada relación que forman el par tipo de equipo-elemento de decisión. Es por ello que cada fila de la relación vendrá expresada en términos distintos tales como: unidades monetarias, tiempo e incluso estimaciones en [0, 1] por ejemplo. Con objeto de concretar este importante aspecto previo, vamos a establecer un ejemplo numérico a efectos puramente didácticos. Continuaremos con nuestros 5 elementos de decisión y 7 equipos sobre los que pueda recaer la decisión de invertir, y llenaremos las casillas de la relación $\underset{\sim}{R}$ de estimaciones cuyas filas tendrán, evidentemente, naturaleza diversa. Así, vamos a suponer que, para **C_1 (valor capital)** se ha obtenido:

$$E_1 = 60,\ E_2 = 54,\ E_3 = 12,\ E_4 = 48.\ E_5 = 25,\ E_6 = 70,\ E_7 = 63$$

valor actualizado neto, expresado en millones de unidades monetarias.

Para **C_2 (coste de equipo)** se ha estimado:

$$E_1 = 12000,\ E_2 = 20000,\ E_3 = 8000,\ E_4 = 18000,\ E_5 = 16000$$
$$E_6 = 25000,\ E_7 = 28000$$

expresado en miles de unidades monetarias.

Para **C_3 (condiciones financieras)** se ha establecido:

E_1 = contado, E_2 = 20% pago inicial + 3 años,
E_3 = 30% inicial + 2 años, E_4 = 50% inicial + 1 año,
E_5 = 0% inicial + 2 años, E_6 = 20% inicial + 2 años,
E_7 = 40% inicial + 3 años.

Para C_4 **(rapidez asistencia técnica)** se ha estimado:

$$E_1 = 5,\ E_2 = 3,\ E_3 = 14,\ E_4 = 10,\ E_5 = 1,\ E_6 = 2,\ E_7 = 8$$

expresado en horas necesarias para iniciar la revisión o reparación.

En cuanto a C_5 **(posibilidad de venta de la producción realizada)** conviene tener en cuenta que este elemento depende de la capacidad de producción de cada equipo y de la capacidad de absorción del producto realizado en el mercado. Con objeto de tener en cuenta ambas circunstancias vamos a proponer el cálculo de los "índices de posibilidad" de cada producto en relación a una ley de absorción del producto en el mercado. Para ello se estimarán las unidades que se espera produciría cada equipo a través de números borrosos triangulares (N.B.T.) y la ley de limitación (capacidad de absorción del producto) mediante una función lineal. Vamos a suponer, en este caso, las siguientes estimaciones:

Equipo	Producción en N.B.T.
E_1	$(250, 300, 380) = \underset{\sim}{P}_1$
E_2	$(180, 220, 250) = \underset{\sim}{P}_2$
E_3	$(60, 70, 90) = \underset{\sim}{P}_3$
E_4	$(190, 200, 230) = \underset{\sim}{P}_4$
E_5	$(80, 120, 140) = \underset{\sim}{P}_5$
E_6	$(350, 400, 420) = \underset{\sim}{P}_6$
E_7	$(320, 350, 370) = \underset{\sim}{P}_7$

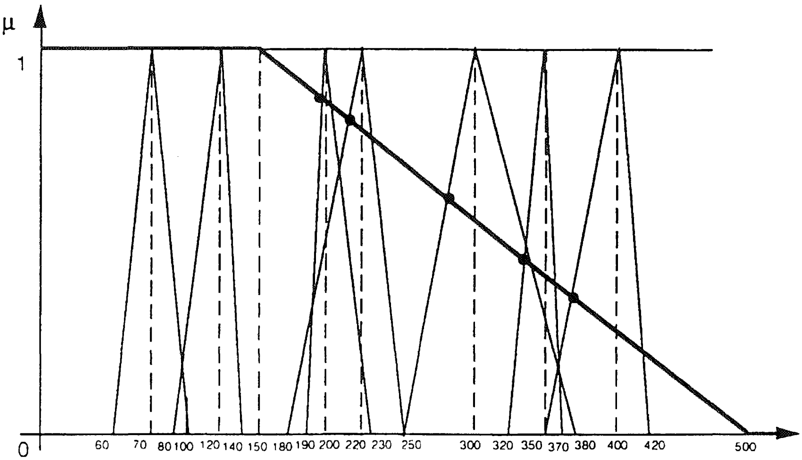
Ley de absorción del mercado:

$$\mu(x) = 1 \qquad x \leq 150$$

$$= \frac{500 - x}{350} \quad , \qquad 150 \leq x \leq 500$$

$$= 0 \quad , \qquad x \leq 500$$

Dado que x = 500 - 350 α , para $150 \leq x \leq 500$, será posible obtener los puntos de intersección de los lados izquierdos de cada triángulo representativo de los N.B.T. con la ley de limitación comercial. Veámoslo, en primer lugar, en el siguiente gráfico:



Se puede observar que existen dos triángulos, los representativos de los N.B.T. $\underset{\sim}{P}_3$ y $\underset{\sim}{P}_5$, que se hallan "totalmente" en la parte izquierda de la línea representativa de la limitación de mercado. Para ellos la "posibilidad" de absorción del producto es total, por lo que se les va a asignar un índice máximo de 1. Así, pues, será:

$$\text{pos} . \underset{\sim}{P}_3 = 1$$

$$\text{pos} . \underset{\sim}{P}_5 = 1$$

Para los demás N.B.T. se obtendrá la solución de las correspondientes ecuaciones y se tendrá:

$$\underset{\sim}{P}_4 = [190 + 10\,\alpha \,,\, 230 - 30\,\alpha\,]$$

$$500 - 350\,\alpha = 190 + 10\,\alpha$$

$$360\,\alpha = 310$$

$$\text{pos}\ \underset{\sim}{P}_4 = \frac{310}{360} = 0.861$$

$$\underset{\sim}{P}_2 = [180 + 40\,\alpha \,,\, 250 - 30\,\alpha\,]$$

$$500 - 350\,\alpha = 180 + 40\,\alpha$$

$$390\,\alpha = 320$$

$$\text{pos}\ \underset{\sim}{P}_2 = \frac{320}{390} = 0.820$$

$$\underset{\sim}{P}_1 = [250 + 50\,\alpha\ ,\ 380 - 80\,\alpha\,]$$

$$500 - 350\,\alpha = 250 + 50\,\alpha$$

$$400\,\alpha = 250$$

$$\text{pos}\ \underset{\sim}{P}_1 = \frac{250}{400} = 0.625$$

$$\underset{\sim}{P}_7 = [320 + 30\,\alpha\ ,\ 370 - 20\,\alpha\,]$$

$$500 - 350\,\alpha = 320 + 30\,\alpha$$

$$380\,\alpha = 180$$

$$\text{pos}\ \underset{\sim}{P}_7 = \frac{180}{380} = 0.473$$

$$\underset{\sim}{P}_6 = [350 + 50\,\alpha\ ,\ 420 - 20\,\alpha\,]$$

$$500 - 350\,\alpha = 350 + 50\,\alpha$$

$$400\,\alpha = 150$$

$$\text{pos}\ \underset{\sim}{P}_6 = \frac{150}{400} = 0.375$$

En definitiva, se obtiene para $\mathbf{C_5}$ **(posibilidad de absorción):**

$$E_1 = \frac{25}{40}\ ,\quad E_2 = \frac{32}{39}\ ,\quad E_3 = 1\ ,\quad E_4 = \frac{31}{36}$$

$$E_5 = 1\ ,\quad E_6 = \frac{15}{40}\ ,\quad E_7 = \frac{18}{38}$$

expresados en términos de "índice de posibilidad". Para la solución de este problema se podría recurrir a otro tipo de índice, por ejemplo el "índice de consentimiento" entre otros[3].

Pasamos a presentar, como resumen, un cuadro en forma de matriz que recoge las estimaciones heterogéneas establecidas para las relaciones establecidas entre el conjunto de elementos de decisión y el de eventuales objetos de la inversión.

(3) Para una mayor información en relación con este tema se puede consultar: Kaufmann, A. y Gil Aluja, J.: *Técnicas de Gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Ed. Pirámide. Madrid 1992.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
C_1	60	54	12	48	25	70	63
C_2	12000	20000	8000	18000	16000	25000	28000
C_3	100% inicial	20% inic + 3 años	30% inic + 2 años	50% inic. + 1 año	0% inic. + 2 años	20% inic. + 2 años	40% inic. + 3 años
C_4	5	3	14	10	1	2	8
C_5	25/40	32/39	1	31/36	1	15/40	18/38

A partir de este cuadro vamos a obtener unas valuaciones que sustituirán los datos heterogéneos, para permitir así operar con relaciones borrosas. Para ello proponemos un procedimiento que ha dado excelentes resultados en otros campos.

OBTENCIÓN DE UNA RELACIÓN BORROSA

Con el objeto de obtener las valuaciones correspondientes a cada elemento de una relación borrosa que pongan de manifiesto los lazos existentes entre elementos de decisión y equipos, vamos a construir para cada elemento de decisión una matriz $[C_i]$, i = 1, 2, ..., 5 formada a partir de los datos contenidos en el cuadro anterior, considerando con independencia los correspondientes a cada fila y estableciendo una preferencia entre cada una de las estimaciones de los elementos que la componen. Así, por ejemplo, para C_1 (valor capital) existirá una preferencia por el que sea más grande, en cuanto a C_4 (asistencia técnica) por el menor tiempo posible,... Y así con cada una de las filas, se va a obtener el contenido de cada casilla mediante el cociente entre el valor tomado como referencia y el que aparece como dato inicial en el cuadro.

Una vez halladas cada una de las matrices $[C_i]$, i = 1, 2, ..., 5 se va a proceder a sucesivas composiciones maxmin, empezando con las $[C_i]$ (.) [1] para así obtener el vector propio correspondiente y el valor propio dominante.

Vamos a seguir el proceso descrito para cada uno de los elementos de decisión C_i.

Para C_1 (valor capital), la relación borrosa será:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_1	1	60/54	60/12	60/48	60/25	60/70	60/63
E_2	54/60	1	54/12	54/48	54/25	54/70	54/63
E_3	12/60	12/54	1	12/48	12/25	12/70	12/63
E_4	48/60	48/54	48/12	1	48/25	48/70	48/63
E_5	25/60	25/54	25/12	25/48	1	25/70	25/63
E_6	70/60	70/54	70/12	70/48	70/25	1	70/63
E_7	63/60	63/54	63/12	63/48	63/25	63/70	1

A partir de esta relación se irá obteniendo:

$$[C_1] \,.\, [1] = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \end{array} \begin{array}{ccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \\ \hline 1 & 60/54 & 60/12 & 60/48 & 60/25 & 60/70 & 60/63 \\ 54/60 & 1 & 54/12 & 54/48 & 54/25 & 54/70 & 54/63 \\ 12/60 & 12/54 & 1 & 12/48 & 12/25 & 12/70 & 12/63 \\ 48/60 & 48/54 & 48/12 & 1 & 48/25 & 48/70 & 48/63 \\ 25/60 & 25/54 & 25/12 & 25/48 & 1 & 25/70 & 25/63 \\ 70/60 & 70/54 & 70/12 & 70/48 & 70/25 & 1 & 70/63 \\ 63/60 & 63/54 & 63/12 & 63/48 & 63/25 & 63/70 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 12.570 \\ 11.313 \\ 2.514 \\ 10.056 \\ 5.237 \\ 14.665 \\ 13.199 \\ \hline \end{array} =$$

$$= 14.665 \,.\, \begin{array}{|c|} \hline 0.857 \\ 0.771 \\ 0.171 \\ 0.685 \\ 0.357 \\ 1 \\ 0.900 \\ \hline \end{array} = 14.665 \,.\, [A_1]$$

$$[A_1] . [C_1] = \begin{bmatrix} 5.996 \\ 5.396 \\ 1.199 \\ 4.796 \\ 2.498 \\ 6.995 \\ 6.245 \end{bmatrix} = 6.995 . \begin{bmatrix} 0.857 \\ 0.771 \\ 0.171 \\ 0.685 \\ 0.357 \\ 1 \\ 0.900 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 6.995$$

El vector propio correspondiente obtenido será la primera fila de la relación borrosa buscada.

Para C_2 (coste de equipo), dado que se trata de una preferencia minimizadora se tendrá:

$$[C_2] . [1] = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 20/12 & 8/12 & 18/12 & 16/12 & 25/12 & 28/12 \\ 12/20 & 1 & 8/20 & 18/20 & 16/20 & 25/20 & 28/20 \\ 12/8 & 20/8 & 1 & 18/8 & 16/8 & 25/8 & 28/8 \\ 12/18 & 20/18 & 8/18 & 1 & 16/18 & 25/18 & 28/18 \\ 12/16 & 20/16 & 8/16 & 18/16 & 1 & 25/16 & 28/16 \\ 12/25 & 20/25 & 8/25 & 18/25 & 16/25 & 1 & 28/25 \\ 12/28 & 20/28 & 8/28 & 18/28 & 16/28 & 25/28 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.583 \\ 6.350 \\ 15.875 \\ 7.055 \\ 7.937 \\ 5.080 \\ 4.535 \end{bmatrix} =$$

$$= 15.875 . \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.400 \\ 1 \\ 0.444 \\ 0.499 \\ 0.320 \\ 0.285 \end{bmatrix} = 15.875 . [A_2]$$

$$[A_2]\,.\,[C_2] = \begin{bmatrix} 4.662 \\ 2.797 \\ 6.993 \\ 3.108 \\ 3.496 \\ 2.237 \\ 1.998 \end{bmatrix} = 6.993\,.\,\begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.400 \\ 1 \\ 0.444 \\ 0.499 \\ 0.320 \\ 0.285 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 6.993$$

Se obtiene, así, el vector propio correspondiente que constituirá la segunda fila de la relación borrosa.

Para C_3 (condiciones financieras) será necesario realizar ciertas adaptaciones habida cuenta de la manera como vienen expresadas las informaciones iniciales. Proponemos cuanto sigue:

1.°) Con los datos obtenidos se establece una escala de preferencia. En este caso será la siguiente:

Preferencia:

1°: E_5
2°: E_2
3°: E_6
4°: E_3
5°: E_7
6°: E_4
7°: E_1

2°) Se busca el grado de preferencia, que puede ser estimado por las veces que se prefiere un tipo de fraccionamiento sobre los demás. Así el E_5 se prefiere 2 veces al de E_2, 3 veces sobre el de E_6, ... y así sucesivamente se podría obtener un cuadro como el que se incluye a continuación:

Veces que se prefiere:

	E_5	E_2	E_6	E_3	E_7	E_4
E_5	a					
E_2	2	a				
E_6	3	2	a			
E_3	4	3	2	a		
E_7	6	5	3	2	a	
E_4	8	6	5	4	3	a
E_1	10	8	7	6	5	3

3º) Con estas informaciones se puede elaborar la siguiente matriz que componemos con el vector [1]

$$[C_3] . [1] = \begin{array}{c|ccccccc|} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \\ \hline E_1 & 1 & 1/8 & 1/6 & 1/3 & 1/10 & 1/7 & 1/5 \\ E_2 & 8 & 1 & 3 & 6 & 1/2 & 2 & 5 \\ E_3 & 6 & 1/3 & 1 & 4 & 1/4 & 1/2 & 2 \\ E_4 & 3 & 1/6 & 1/4 & 1 & 1/8 & 1/5 & 1/3 \\ E_5 & 10 & 2 & 4 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ E_6 & 7 & 1/2 & 2 & 5 & 1/3 & 1 & 3 \\ E_7 & 5 & 1/5 & 1/2 & 3 & 1/6 & 1/3 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.067 \\ 25.500 \\ 14.083 \\ 5.075 \\ 34.000 \\ 18.833 \\ 10.200 \end{bmatrix} =$$

$$= 34 . \begin{bmatrix} 0.060 \\ 0.750 \\ 0.414 \\ 0.149 \\ 1 \\ 0.553 \\ 0.300 \end{bmatrix} = 34 . [A_3]$$

Se realizan sucesivamente las composiciones $[A_3] . [C_3]$, $[A^{I}_3] . [C_3]$, $[A^{II}_3] . [C_3]$, $[A^{III}_3] . [C_3]$, y finalmente $[A^{IV}_3] . [C_3]$, y se obtiene:

$$[A^{IV}_3] . [C_3] = \begin{bmatrix} 0.421 \\ 4.888 \\ 2.093 \\ 0.728 \\ 7.279 \\ 3.135 \\ 1.360 \end{bmatrix} = 7.279 . \begin{bmatrix} 0.057 \\ 0.671 \\ 0.287 \\ 0.100 \\ 1 \\ 0.430 \\ 0.186 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 7.279$$

Este nuevo vector propio correspondiente constituirá la tercera fila de la relación borrosa buscada.

Para C_4 (rapidez asistencia técnica) se puede establecer una preferencia inversa a la duración, lo que dará lugar a $[C_4]$.

Se inicia la convolución:

$$
[C_4]\,.\,[1] = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 3/5 & 14/5 & 10/5 & 1/5 & 2/5 & 8/5 \\
5/3 & 1 & 14/3 & 10/3 & 1/3 & 2/3 & 8/3 \\
5/14 & 3/14 & 1 & 10/14 & 1/14 & 2/14 & 8/14 \\
5/10 & 3/10 & 14/10 & 1 & 1/10 & 2/10 & 8/10 \\
5 & 3 & 14 & 10 & 1 & 2 & 8 \\
5/2 & 3/2 & 14/2 & 10/2 & 1/2 & 1 & 8/2 \\
5/8 & 3/8 & 14/8 & 10/8 & 1/8 & 2/8 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 8.4 \\ 14.333 \\ 3.071 \\ 4.3 \\ 43 \\ 21.5 \\ 5.375 \end{bmatrix}
=
$$

$$
= 43\,.\begin{bmatrix} 0.195 \\ 0.333 \\ 0.071 \\ 0.100 \\ 1 \\ 0.500 \\ 0.125 \end{bmatrix} = 43\,.\,[A_4]
$$

$$
[A_4]\,.\,[C_4] = \begin{bmatrix} 1.333 \\ 2.322 \\ 0.497 \\ 0.696 \\ 6.968 \\ 3.484 \\ 0.871 \end{bmatrix} = 6.968\,.\begin{bmatrix} 0.199 \\ 0.333 \\ 0.071 \\ 0.099 \\ 1 \\ 0.500 \\ 0.125 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_4 = 6.968
$$

El vector correspondiente será la fila cuarta de la relación borrosa.

Ahora bien, para este mismo elemento de decisión C_4, también se puede establecer una gradación en las preferencias distinta de la proporcionalidad, que podría ser la siguiente:

Veces que E_i prefiere a E_j:

	E_5 prefiere	E_6 prefiere	E_2 prefiere	E_1 prefiere	E_7 prefiere	E_4 prefiere
E_5						
E_6	2					
E_2	3	2				
E_1	5	4	2			
E_7	10	6	4	2		
E_4	12	8	5	4	2	
E_3	10	12	8	5	4	2

Se obtendría, así, la matriz recíproca $[C_4]$ que se somete al proceso de convolución.

$[C_4] \cdot [1] =$

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7		[1]
E_1	1	1/2	5	4	1/5	1/4	2		1
E_2	2	1	8	5	1/3	1/2	4		1
E_3	1/5	1/8	1	1/2	1/14	1/12	1/4		1
E_4	1/4	1/5	2	1	1/12	1/8	1/2	·	1
E_5	5	3	14	12	1	2	10		1
E_6	4	2	12	8	1/2	1	6		1
E_7	1/2	1/4	4	2	1/10	1/6	1		1

$=$

$$= \begin{bmatrix} 12.950 \\ 20.833 \\ 2.229 \\ 4.158 \\ 47.000 \\ 33.500 \\ 8.016 \end{bmatrix} = 47.000 \cdot \begin{bmatrix} 0.275 \\ 0.443 \\ 0.047 \\ 0.088 \\ 1 \\ 0.712 \\ 0.170 \end{bmatrix} = 47.000 \cdot [A_4]$$

$$[A_4] \cdot [C_4] = \begin{bmatrix} 1.801 \\ 3.178 \\ 0.374 \\ 0.596 \\ 8.542 \\ 5.486 \\ 1.000 \end{bmatrix} = 8.542 \cdot \begin{bmatrix} 0.210 \\ 0.372 \\ 0.043 \\ 0.069 \\ 1 \\ 0.642 \\ 0.117 \end{bmatrix} = 8.542 \cdot [A'_4]$$

$$[A'_4] \cdot [C_4] = \begin{bmatrix} 1.481 \\ 2.603 \\ 0.320 \\ 0.503 \\ 7.050 \\ 4.496 \\ 0.832 \end{bmatrix} = 7.050 \cdot \begin{bmatrix} 0.210 \\ 0.369 \\ 0.045 \\ 0.071 \\ 1 \\ 0.637 \\ 0.118 \end{bmatrix} = 7.050 \cdot [A''_4]$$

$$[A''_4] \cdot [C_4] = \begin{bmatrix} 1.498 \\ 2.627 \\ 0.322 \\ 0.509 \\ 7.093 \\ 4.531 \\ 0.843 \end{bmatrix} = 7.093 \cdot \begin{bmatrix} 0.211 \\ 0.370 \\ 0.045 \\ 0.071 \\ 1 \\ 0.638 \\ 0.118 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_4 = 7.093$$

Se tendría así un nuevo vector propio correspondiente, que podríamos tomar como fila cuarta de la matriz.

Supongamos que la naturaleza del problema concreto que se trata, determina que se elija entre los dos vectores propios el segundo. Se tomaría, así, para la cuarta fila:

0.211
0.370
0.045
0.071
1
0.638
0.118

Para C_5 (posibilidad de venta) proponemos tomar como valores de la relación borrosa las posibilidades obtenidas anteriormente, ya que el "índice de posibilidad" es, en sí mismo, una valuación.

Disponemos, ya, de todas las valuaciones para construir la matriz borrosa buscada, que será la siguiente:

$\underset{\sim}{R}$ =

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
C_1	0.85	0.77	0.17	0.68	0.35	1	0.90
C_2	0.66	0.40	1	0.44	0.49	0.32	0.28
C_3	0.05	0.67	0.28	0.10	1	0.43	0.18
C_4	0.21	0.37	0.04	0.07	1	0.63	0.11
C_5	0.62	0.82	1	0.86	1	0.37	0.47

A partir de esta relación borrosa, se puede iniciar el proceso de selección.

DETERMINACIÓN DE LAS RELACIONES DE AFINIDAD

Vamos a realizar un tratamiento de la relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ que permita poner de manifiesto de manera visible, toda la gama de posibilidades que se le presentan al sujeto inversor, permitiéndole tomar su decisión según la importancia que considera debe tener cada uno de los elementos de decisión.

Para ello estableceremos un "umbral" a través de un subconjunto borroso, tal como:

C_1	0.80
C_2	0.40
C_3	0.25
C_4	0.10
C_5	0.60

Este umbral va a permitir convertir la relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ en una matriz booleana. La asignación de valores a cada elemento de decisión C_i, i = 1, 2, ..., 5 indica que cuando en la relación existe una valuación igual o superior al umbral establecido para el criterio, se considerará que el equipo reúne el nivel que se le exige y por tanto le asignaremos a la matriz booleana asociada un 1. Si es inferior, se estima que no llega a reunir la exigencia mínima y por lo tanto se pondrá un 0 ó un vacío en la matriz booleana.

Los niveles del umbral, evidentemente arbitrarios en este caso, son 0.80 para C_1, 0.40 para C_2, ... Se obtiene, así, la siguiente matriz booleana:

[B] =

	A	B	C	D	E	F	G
a	1					1	1
b	1	1	1	1	1		
c		1	1		1	1	
d	1	1			1	1	1
e	1	1	1	1	1		

Para el tratamiento y explotación de esta matriz recurriremos a la noción de afinidad.

Para establecer las "relaciones de afinidad" se puede recurrir, entre otros, al llamado método de eliminación.

Recordemos que se han establecido dos conjuntos, que en nuestro caso son:

$$E - \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$$

que corresponde al de los eventuales equipos, y

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

que hace referencia a los elementos de decisión.

Para un desarrollo más cómodo vamos a utilizar una nueva notación resultante de hacer:

$$E_1 = A\ ,\ E_2 = B\ ,\ \ldots,\ E_7 = G \text{ y } C_1 = a\ ,\ C_2 = b\ ,\ \ldots,\ C_5 = e$$

En base a estos dos conjuntos, se construye el mayor conjunto posible con los elementos de C (el denominador "power set" de C) que será en nuestro caso:

$$P(C) = \{\phi, a, b, c, d, e, ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, abcd, abce, abde, acde, bcde, E^{(2)}\}$$

A cada elemento de P(C) se le hará corresponder el o los elementos del conjunto de partes P(E), construido con elementos de E para los niveles de α establecidos, según la matriz booleana anterior.

Se tendrán en cuenta los elementos no vacíos de P(E) y los subconjuntos de C que no se hallan incluidos en otros. Se tendrá así:

a → AFG,
b → ABCDE,
c → BCEF,
d → ABEFG,
e → ABCDE,
ab → A,
ac → F,
ad → AFG,
ae → A,
bc → BCE,
bd → ABE,
be → ABCDE,
cd → BEF,
ce → BCE,
de → ABE,

abc → ϕ
abd → A,
abe → A,
acd → F,
ace → ϕ
ade → A,
bcd → BE,
bce → BCE,
bde → ABE,
cde → BE,
abcd → ϕ
abce → ϕ
abde → A
acde → ϕ
bcde → BE,
abcde → ϕ

$\Rightarrow$

A → abde
F → acd
BE → bcde
ABE → bde
AFG → ad
BCE → bce
BEF → cd
BCEF → c
ABCDE → be
ABEFG → d

De ahí se derivan las siguientes afinidades:

(abde, A), (acd, F), (bcde, BE), (bde, ABE), (ad, AFG),
(bcd, BCE), (cd, BEF), (c, BCEF), (be, ABCDE), (d, ABEFG)

Nos podemos plantear, ahora, si existe la posibilidad de realizar un tratamiento distinto de una matriz booleana [B] para llegar a un resultado que permita tomar una decisión para la inversión en un objeto. Para ello vamos a considerar de nuevo la utilizada anteriormente que puede servir como ejemplo:

[B] =

	A	B	C	D	E	F	G
a	1					1	1
b	1	1	1	1	1		
c		1	1		1	1	
d	1	1			1	1	1
e	1	1	1	1	1		

Veamos lo que sucede si recurrimos a la teoría de clanes. Como es conocido, dada una matriz booleana se puede construir un "clan" K a partir de los "minitérminos" o "átomos". Pasaremos, pues, en primer lugar, a obtener los átomos:

$\{a, b, \bar{c}, d, e\} = \{A\}$, $\{a, \bar{b}, c, d, e\} = \phi$, $\{\bar{a}, b, c, d, e\} = \{B, E\}$,

.... $\{a, \bar{b}, c, d, \bar{e}\} = \{F\}$, ...

$\{\bar{a}, b, c, \bar{d}, e\} = \{C\}$, ... , $\{a, \bar{b}, \bar{c}, d, \bar{e}\} = \{G\}$,

.... $\{\bar{a}, b, \bar{c}, \bar{d}, e\} = \{D\}$, ...

Se observa que los minitérminos o átomos no vacíos son {A}, {B, E}, {C}, {F}, {G} cuya correspondencia es la siguiente:

{A} → {a, c, d, e}

{B, E} → {b, c, d, e}

{C} → {b, c, e}

{D} → {b, e}

{F} → {a, c, d}

{G} → {a, d}

El conjunto formado por los átomos, todas sus posibles uniones y ϕ formarán un clan.

Si al establecer las correspondientes uniones de los elementos de la izquierda (A, B, ..., G) se realizan las intersecciones de los elementos de la derecha (a, b, c, d, e), se obtendrán las siguientes correspondencias no vacías[4]:

{A, B, E}	→ {b, d, e}	{A, C}	→ {b, e}	{A, D}	→ {b, e},
{A, F}	→ {a, d}	{A, G}	→ {a, d}	{B, C, E}	→ {b, c, e},
{B, D, E}	→ {b, e}	{B, E, F}	→ {c, d}	{B, E, G}	→ {d},
{C, D}	→ {b, e}	{C, F}	→ {c}	{F, G}	→ {a, b},
{A, B, C,E}	→ {b,e}	{A, B, D, E}	→ {b, e}	{A, B, E, F}	→ {d},
{A, B, E, G}	→ {d}	{A, C, D}	→ {b, e}	{B, C, D, E}	→ {b, e},
{B, C, E, F}	→ {c}	{A, F, G}	→ {a, d}	{A, B, C, D, E}	→ {b, e},
{A, B, E, F, G}	→ {d} .				

Así, pues, son estos elementos, junto a los átomos no vacíos obtenidos anteriormente y ϕ los que forman un clan K. Pues bien, si se reúnen todos los conjuntos que tienen los mismos elementos a la derecha y de entre ellos se escoge el mayor de la izquierda, se comprobará que posee todos los elementos que existen en los demás. El resultado coincide con la correspondencia hallada en el epígrafe anterior. En efecto:

(4) Con objeto de no alargar innecesariamente esta exposición omitimos aquellas relaciones, cuya intersección a la derecha da lugar a ϕ.

$\{A\} \rightarrow \{a, b, d, e\} \quad \leftarrow$

$\{B, E\} \rightarrow \{b, c, d, e\} \quad \leftarrow$

$\{F\} \rightarrow \{a, c, d\} \quad \leftarrow$

Entre: $\{C\} \rightarrow \{b, c, e\}$

$\{B, C, E\} \rightarrow \{b, c, e\}$

se escoge: $\{B, C, E\} \rightarrow \{b, c, e\} \quad \leftarrow$

$\{A, B, E\} \rightarrow \{b, d, e\} \quad \leftarrow$

Entre: $\{G\} \rightarrow \{a, d\}$

$\{A, F\} \rightarrow \{a, d\}$

$\{A, G\} \rightarrow \{a, d\}$

$\{F\ G\} \rightarrow \{a, d\}$

$\{A, F, G\} \rightarrow \{a, d\}$

se escoge: $\{A, F, G\} \rightarrow \{a, d\} \quad \leftarrow$

$\{B, E, F\} \rightarrow \{c, d\} \quad \leftarrow$

Entre: $\{C, F\} \rightarrow \{c\}$

$\{B, C, E, F\} \rightarrow \{c\}$

se escoge: $\{B, C, E, F\} \rightarrow \{c\} \quad \leftarrow$

Entre:	{D}	$\rightarrow$ {b, e}
	{B, E, D}	$\rightarrow$ {b, e}
	{C, D}	$\rightarrow$ {b, e}
	{A, B, C, E}	$\rightarrow$ {b, e}
	{A, C}	$\rightarrow$ {b, e}
	{A, B, D, E}	$\rightarrow$ {b, e}
	{A, C, D}	$\rightarrow$ {b, e}
	{A, D}	$\rightarrow$ {b, e}
	{B, C, D, E}	$\rightarrow$ {b, e}
	{A, B, C, D, E}	$\rightarrow$ {b, e}

se escoge: {A, B, C, D, E} $\rightarrow$ {b, e} $\leftarrow$

Entre:	{B, E, G}	$\rightarrow$ {d}
	{A, B, E, F}	$\rightarrow$ {d}
	{A, B, E, F}	$\rightarrow$ {d}
	{A, B, E, F, G}	$\rightarrow$ {d}

se escoge: {A, B, E, F, G} $\rightarrow$ {d} $\leftarrow$

Se obtienen así las relaciones de afinidad, que constituyen una base que permite el estudio de la selección de inversiones bajo la óptica de los distintos criterios elegidos como elementos de decisión.

En efecto, las relaciones de afinidad así obtenidas, son susceptibles de ser presentadas en forma de retículos de Galois.

ESTABLECIMIENTO DE PREFERENCIAS MEDIANTE RETÍCULOS DE GALOIS

Recordemos que en una configuración o estructura algebraica se puede considerar un conjunto T y dos leyes de composición interna $*$ y $*'$ en T.

Si:

$\forall\, x, y, z \in T$

se cumplen las propiedades de conmutividad, asociatividad, idempotencia y absorción:

$$x * y = y * x \qquad\qquad \text{conmutividad}$$
$$x *' y = y *' x$$

$$x * (y * z) = (x * y) * z \qquad\qquad \text{asociatividad}$$
$$x *' (y *' z) = (x *' y) *' z$$

$$x * x = x \qquad\qquad \text{idempotencia}$$
$$x *' x = x$$

$$x * (x *' y) = x \qquad\qquad \text{absorción}$$
$$x *' (x * y) = x$$

el conjunto T se denomina retículo.

Esta noción juega un papel fundamental en casi todos los ámbitos de las matemáticas en los que se considera el concepto de conjunto ordenado.

Se conoce una variedad de tipos de retículo, que corresponden a particularidades de configuración que tienen mucha utilidad en las matemáticas. Prestaremos atención a un tipo de retículo, por su relación con el concepto de afinidad: Los retículos de Galois.

Consideremos dos conjuntos finitos E y C y sus respectivos conjuntos de las partes P(E) y P(C).

Estableceremos, ahora, dos relaciones de orden definidas de la siguiente manera:

$$\forall X, X' \in P(E) \;, \quad \forall Y, Y' \in P(C) :$$

$$((X, Y) \preccurlyeq (X', Y')) \Leftrightarrow (X \subset X',\; Y \supset Y')$$

El extremo superior de (X, Y) será designado por X ∇ Y y el extremo inferior de este par por X Δ Y. Estos extremos se hallan inducidos por la relación de orden $\preccurlyeq$.

Se introduce de la misma manera la relación de orden opuesta:

$$\forall X, X' \in P(E) \ , \quad \forall Y, Y' \in P(C) :$$

$$((X, Y) \succcurlyeq (X', Y')) \Leftrightarrow (X \supset X', \ Y \subset Y')$$

El extremo superior de (X, Y) se designará por (X ∇ Y) y el extremo inferior por (X Δ Y). Estos extremos se hallan inducidos por la relación de orden anterior.

Se introducen respectivamente los pares (ϕ, C) y (E, ϕ) como extremo inferior y como extremo superior.

Cuando se verifican las propiedades siguientes, el conjunto T que las posee tiene una configuración llamada "retículo de Galois".

$$(U, V) = (X, Y) \ \nabla (X', Y')$$

$$(U \supset X \cup X' \text{ y } V \subset Y \cap Y')$$

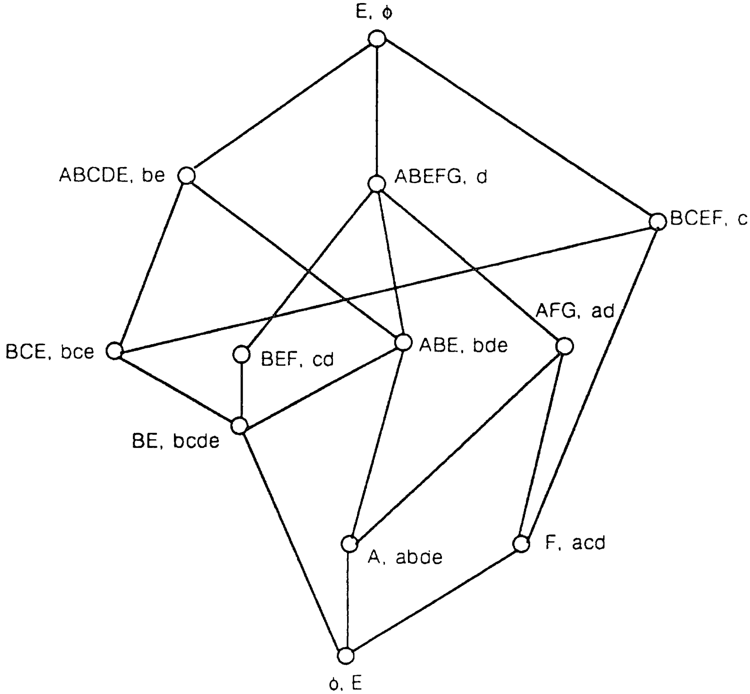
y también:

$$(Z, S) = (X, Y) \ \Delta (x', Y')$$

$$\Rightarrow (Z \subset X \cap X' \text{ y } \quad S \supset Y \cup Y')$$

Cuando una relación $\underset{\sim}{R} \subset E \times C$ se toma a un o a unos niveles α como hemos hecho nosotros para proporcionar [B], las subrelaciones máximas a las que se han adjuntado (ϕ, C) y (E, ϕ), forman un retículo de Galois. El estudio de un retículo de este tipo, pone de manifiesto de manera muy explícita como se sitúan unas afinidades en relación con las otras.

En efecto, si se construye un retículo con las afinidades obtenidas, de acuerdo con las soluciones de orden definidas anteriormente, se obtiene el siguiente retículo de Galois:



Esta estructura reticular pone de manifiesto de manera visual las afinidades existentes entre los distintos objetos de la inversión en relación a los elementos de decisión. Según la importancia que los ejecutivos de la empresa asignen a cada uno de ellos se podrá considerar como interesante uno u otro de los grupos de objetos formados.

De esta manera, cuando se estiman imprescindibles, por ejemplo, los elementos de decisión b, c, d y e sólo lo cumplirán, a los niveles exigidos, los equipos B y E. Y así, sucesivamente surgen todas las posibles combinaciones de elementos de decisión y equipos.

La utilidad de la presentación en forma de retículos de Galois es evidente. Se observa como alternativamente se realizan las agrupaciones, bien mediante la asociación progresiva de elementos de decisión (partiendo de abajo hacia arriba) bien de los objetos concretos de la inversión (de arriba hacia abajo). Por otra parte se podría comprobar la existencia de cambios en la configuración del retículo cuando se modifican los niveles de α exigidos para cada elemento de decisión.

ESTIMACIÓN RELATIVA DE LOS ELEMENTOS DE DECISIÓN

Pasemos a estudiar, ahora, otra manera de considerar el hecho de que el sujeto inversor no aprecia el mismo nivel para cada uno de los elementos de decisión, como consecuencia de que no todos ellos tienen el mismo peso e importancia en el momento de decidir la hipotética adquisición de un objeto de la inversión.

Se deberá proceder al establecimiento, a la vez, de un orden y un grado de prelación de cada elemento, sobre los demás, que en nuestro hipotético caso podría ser el siguiente:

* El elemento C_1 se estima que vale 2 veces C_2, 3 veces C_3, 4 veces C_4 y 1/2 de veces de C_5.
* El elemento C_2 se estima que vale 2 veces C_3, 3 veces C_4 y 1/3 de veces de C_5.
* El elemento C_3 se estima que vale 2 veces C_4 y 1/5 de veces de C_5.
* El elemento C_4 se estima que vale 1/6 de veces de C_5.

Esto permite presentar la siguiente matriz recíproca:

$$[C] = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 1/5 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1/6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{array}$$

A partir de la matriz [C] pasaremos a obtener el valor propio dominante y el vector correspondiente.

Iniciamos el proceso:

$$[C]\,.\,[1] = \begin{bmatrix} 10.500 \\ 6.833 \\ 4.033 \\ 2.250 \\ 17.000 \end{bmatrix} = 17.000\,. \begin{bmatrix} 0.617 \\ 0.401 \\ 0.237 \\ 0.132 \\ 1 \end{bmatrix} = 17.000\,.\,[B]$$

$$[B] . [C] = \begin{bmatrix} 3.158 \\ 1.912 \\ 1.107 \\ 0.705 \\ 5.414 \end{bmatrix} = 5.414 . \begin{bmatrix} 0.583 \\ 0.353 \\ 0.204 \\ 0.130 \\ 1 \end{bmatrix} = 5.414 . [B']$$

$$[B'] . [C] = \begin{bmatrix} 2.921 \\ 1.775 \\ 1.034 \\ 0.662 \\ 5.025 \end{bmatrix} = 5.025 . \begin{bmatrix} 0.581 \\ 0.353 \\ 0.205 \\ 0.131 \\ 1 \end{bmatrix} = 5.025 . [B'']$$

Finalmente se tiene:

$$[B''] . [C] = \begin{bmatrix} 2.926 \\ 1.779 \\ 1.037 \\ 0.663 \\ 5.032 \end{bmatrix} = 5.032 . \begin{bmatrix} 0.581 \\ 0.353 \\ 0.206 \\ 0.131 \\ 1 \end{bmatrix} = 5.032 . [B''']$$

$$\Rightarrow \lambda = 5.032$$

Se normaliza $[B''']$. Para ello se hará:

$$\sum_{i=1}^{5} c_i = 0.581 + 0.353 + 0.206 + 0.131 + 1 = 2.271$$

Para cada c_j, j = 1, 2, 3, 4, 5 se obtiene: $\dfrac{c_j}{\sum_{j=1}^{5} c_j}$

que dará lugar el vector [L]:

[L] =	0.256
	0.155
	0.091
	0.058
	0.440

cuyos elementos pueden ser considerados como los pesos para la ponderación de cada uno de los elementos de decisión.

A partir de la relación borrosa $\underset{\sim}{R}$, se obtiene la suma de los elementos de cada una de sus filas:

$\underset{\sim}{R}$ =	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	suma filas
C_1	0.85	0.77	0.17	0.68	0.35	1	0.90	4.72
C_2	0.66	0.40	1	0.44	0.49	0.32	0.28	3.59
C_3	0.05	0.67	0.28	0.10	1	0.43	0.18	2.71
C_4	0.21	0.37	0.04	0.07	1	0.63	0.11	2.43
C_5	0.62	0.82	1	0.86	1	0.37	0.47	5.14

con objeto de normalizar, en el sentido probabilístico, cada una de las filas de manera que la suma de los valores obtenidos para cada una de ellas, sea igual a la unidad.

Resultará:

$\underset{\sim}{N}$ =	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
C_1	0.18	0.16	0.04	0.15	0.07	0.21	0.19
C_2	0.18	0.11	0.28	0.12	0.14	0.09	0.08
C_3	0.02	0.25	0.10	0.03	0.37	0.16	0.07
C_4	0.09	0.15	0.01	0.03	0.41	0.26	0.05
C_5	0.12	0.16	0.19	0.17	0.20	0.07	0.09

Se multiplicará a la derecha, ahora, esta relación borrosa $\underset{\sim}{N}$ por el vector normalizado [L] obtenido anteriormente, lo que dará lugar a:

$[\underset{\sim}{N}] \cdot [L] =$

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
C_1	0.18	0.16	0.04	0.15	0.07	0.21	0.19
C_2	0.18	0.11	0.28	0.12	0.14	0.09	0.08
C_3	0.02	0.25	0.10	0.03	0.37	0.16	0.07
C_4	0.09	0.15	0.01	0.03	0.41	0.26	0.05
C_5	0.12	0.16	0.19	0.17	0.20	0.07	0.09

·

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
0.256	0.155	0.091	0.058	0.440

=

=

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
0.133	0.159	0.147	0.136	0.185	0.128	0.110

Este resultado se puede expresar como un subconjunto borroso normal:

$\underset{\sim}{E} =$

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
0.718	0.859	0.794	0.735	1	0.691	0.594

Se observa, así, que se ha obtenido un orden de prelación entre los objetos de la inversión E_i, $i = 1, 2, ..., 7$, de tal manera que:

$$E_5 \succ E_2 \succ E_3 \succ E_4 \succ E_1 \succ E_6 \succ E_7$$

Como podrá comprobar el lector, al orden establecido constituye, a la vez, un orden de preferencia en el proceso de selección. Asimismo el mayor o menor alejamiento del valor de la función característica de pertenencia con respecto a la unidad, representada, también, el mayor o menor distanciamiento potencial del objeto de la inversión a su posibilidad de ser elegido.

Estas técnicas utilizadas constituyen, así, unos buenos instrumentos de ayuda a la selección de inversiones, cuando el criterio de economicidad, no puede ser el único a tener en cuenta para tomar la decisión de invertir.

BIBLIOGRAFIA

ABRAHAM, C. y THOMAS, S. *Microéconomie. Décisions óptimales dans l'entreprise et dans la nation.* Ed. Dunod, París, 1966.

GIL ALUJA, J. *El estudio dinámico de la elección de las inversiones. Revista Técnica Contable.* Febrero, 1967.

GIL LAFUENTE, ANA M.ª. *Fundamentos de Análisis Financiero.* Ed. Ariel. Barcelona, 1993.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas.* Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1986.

KAUFMANN A. y GIL ALUJA, J. *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* Ed. Hispano-Europea. Barcelona, 1987.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Modelos para la investigación de efectos olvidados.* Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1989.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Las matemáticas del azar y la incertidumbre.* Ed. Ceura. Madrid, 1990.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois láttices.* Ponencia presentada en el Euro XI Congress de Investigation Operativa. Aachen 16-19 julio, 1991.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Nuevas técnicas para la dirección estratégica.* Ed. Universidad de Barcelona, 1991.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias.* Ed. Pirámide, Madrid, 1992.

KAUFMANN y GIL ALUJA, J. *Técnicas especiales para la gestión de expertos.* Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1992.