LA ELASTICIDAD EN LAS FUNCIONES VECTORIALES

Del Académico Numerario
EXCMO. SR. DR. D. ALFONSO RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ

I. Introducción

Es sobradamente conocida por todos la transcendencia que para la Economía Matemática tiene el instrumento analítico que informa de cual es la reacción de una función, en un punto, ante las alteraciones de su argumento, con independencia de las unidades en que se midan variable y función. Tal instrumento analítico es la *derivada elástica* en tal punto que, para las funciones reales de variable real, se define

$$E_x f(x_o) = \frac{x_o}{f(x_o)} f'(x_o)$$

donde $E_x f(x_o)$ es el valor de la elasticidad o derivada elástica de la función, $y = f(x)$, en el punto x_o, mientras que $f'(x_o)$ simboliza la derivada simple en el mismo punto.

La *invariancia* de la derivada elástica, respecto a las unidades de medida, es consecuencia del análisis dimensional de tal magnitud. En efecto, mientras que la derivada simple, considerada como magnitud deducida de las fundamentales (X) e (Y), responde a la ecuación dimensional

$$(D) = (X)^{-1}.(Y)^{1}$$

teniendo, por tanto, dimensiones (-1;1), significativas al cambio de unidades, la magnitud derivada elástica procede de la ecuación dimensional

$$(E) = (X)^{o}.(Y)^{o}$$

con dimensiones (0;0), invariante pues a toda alteración de las unidades de medida de las magnitudes (X) e (Y).

La correspondencia entre puntos y elasticidades, en aquel intervalo en que se hallen definidas, es recogida por la función derivada elástica

$$E_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Ahora bien, cuando consideramos funciones reales, de variable vectorial n-dimensional, el análisis global cede, en este punto, al análisis parcial, tanto para la elaboración de la derivada simple, como para la derivada elástica, como consecuencia directa de la ausencia de definición de un único *cociente incremental* y sí de una pluralidad de cocientes incrementales *parciales*.

Ello es lamentable porque resta al análisis potencia descriptiva del comportamiento de la función en el punto, que solo es explicado a través de las derivadas parciales y de las elasticidades parciales, bajo restricciones *caeteris paribus*. Ello es aún más sensible por cuanto los modelos altamente explicativos, en Economía, rara vez se refieren a funciones de variable real, sino vectorial, por lo que tal deficiencia del análisis puede estimarse general, en este aspecto.

Bien es verdad que el Análisis Matemático provee de la derivada direccional, instrumento analítico que permite el estudio del comportamiento de la función real, en un punto, según una trayectoria del argumento n-dimensional que pase por él. Así, considerada la función vectorial

$$z = f(\mathbf{x}) \quad , \text{ para } \mathbf{x}(x_1, x_2, .. x_n) ; \; x_i, z \varepsilon R$$

siguiendo $\mathbf{x}$ la trayectoria t, en el punto $\mathbf{x}_o(x_1^o, x_2^o, .. x_n^o)$, supuesta dicha trayectoria definida por n funciones paramétricas, $x_i = \phi_i(t)$, con cosenos directores, por tanto, en t_o,

$$\cos \alpha_i = \lim_{t \to t_o} \frac{\phi_i(t) - \phi_i(t_o)}{\sqrt{\Sigma[\phi_i(t) - \phi_i(t_o)]^2}}$$

la derivada direccional, según t, en el punto $\mathbf{x}_o$, es

$$f'_t(\mathbf{x}_o) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{x}_o) . \cos \alpha_i$$

donde $f'_{x_i}(\mathbf{x}_o)$ son las derivadas parciales de la función, respecto a las componentes x_i del argumento x, en el punto x_o, al que corresponde el parámetro t_o, en la trayectoria t.

Pero tal derivada direccional —instrumento, por otro lado, de uso no muy desarrollado por la Teoría Económica— no es adimensional, ya que responde a la ecuación

$$(D) = (X_1)^{-1}(X_2)^{-1}..(X_n)^{-1}(Z)^1$$

siendo sensible, entonces, al cambio de unidades de medida.

Cuando la Teoría Económica realiza análisis parciales, mediante derivadas y elasticidades parciales, contempla tan solo las diferentes reacciones de la función debidas a la alteración de una sola de las componentes del argumento. Pero aquí resulta esencial hacer una importante observación que suele pasar absolutamente desapercibida y que no ha sido recogida en los tratados, a nuestro alcance al menos. Es la siguiente: mientras que la derivada parcial interpreta fielmente la derivada según la dirección de uno de los ejes, precisamente aquel que representa la componente alterada, cuya influencia se aísla bajo una hipótesis *caeteris paribus*, porque derivada parcial y derivada direccional *coinciden* plenamente, *no es así* en cuanto a la elasticidad parcial y la elasticidad direccional, según el eje correspondiente. Por ello, la interpretación de la hipótesis *caeteris paribus*, realizada mediante elasticidades parciales, resulta formalmente *incorrecta*, como demostraremos más adelante.

Al consecuentemente necesario perfeccionamiento de los análisis parciales en un punto, de las funciones vectoriales, mediante elasticidades, así como al más ambicioso fin de la introducción de la elasticidad en el análisis global, destinamos el contenido de esta *comunicación* a la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras de Barcelona, a la que nos honramos en pertenecer.

II. Exposición

Los conceptos de derivada y elasticidad en funciones de variable real, como límites de la relación de incrementos, simples o relativos, respectivamente, cuando la variable *tiende* al punto, según la única dirección posible que es la de su propio eje, tropiezan, para su generalización completa a las funciones vectoriales, con la única dificultad de la previa conceptuación del incremento de la variable, puesto que, en relación con el de la función, este sigue manteniendo su sentido como diferencia

$$\Delta f(\mathbf{x}_o) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o)$$

Pero tampoco la conceptuación del incremento de la variable $\mathbf{x}$ halla gran dificultad cuando, apartándonos de la tradicional concepción de la función vectorial como función de *varias variables* reales, alcanzamos la más propia de función de *una sola variable* n-dimensional, que incluye la función de variable real como función de variable vectorial monodimensional. Tal orientación permite una perfecta generalización de los conceptos antedichos.

En efecto, el incremento de la variable puede seguir siendo medido por la *norma, módulo o longitud* del vector diferencia, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_o$, es decir,

$$\Delta\mathbf{x}_o = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|$$

o bien,

$$\Delta\mathbf{x}_o = \sqrt{(\Delta x_1^o)^2 + (\Delta x_2^o)^2 + \ldots + (\Delta x_n^o)^2}$$

donde es $\Delta x_i^o = x_i - x_i^o$. (1)

De este modo, la razón incremental simple tomará la expresión,

$$\frac{\Delta f(\mathbf{x}_o)}{\Delta\mathbf{x}_o} = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o)}{\sqrt{\Sigma(\Delta x_i^o)}}$$

(1) Obsérvese que tal concepción del incremento vectorial, lógica por otro lado, permite una más amplia generalización que puede alcanzar a los conceptos de derivada y elasticidad en las funciones "vectoriales" de variable vectorial, ya que, para ellas, el incremento de la función puede ser definido

$$\Delta\mathbf{z}_o = \sqrt{(\Delta z_1^o)^2 + (\Delta z_2^o)^2 + \ldots + (\Delta z_m^o)^2} \text{ ; siendo, } \Delta z_j^o = z_j - z_j^o.$$

Ello abriría camino a un importante análisis, que ahora desbordaría el contenido de esta comunicación, cuya aplicación a la Teoría Económica es del mayor interés (Teoría de la Producción múltiple o conjunta, por ejemplo).

mientras que la razón incremental relativa, será

$$\frac{|\mathbf{x}_o|}{f(\mathbf{x}_o)}\,\frac{\Delta f(\mathbf{x}_o)}{\Delta \mathbf{x}_o} = \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_o)}{f(\mathbf{x}_o)}\sqrt{\frac{\Sigma(x_i^o)^2}{\Sigma(\Delta x_i^o)^2}}$$

habiendo considerado para su determinación el módulo del vector argumento, en el punto,

$$|\mathbf{x}_o| = \sqrt{\Sigma(x_i^o)^2}$$

la primera con ecuación dimensional,

$$(D) = (X_1)^{-1}(X_2)^{-1}..(X_n)^{-1}(Z)^1$$

y, la segunda,

$$(E) = (X_1)^0.(X_2)^0...(X_n)^0.(Z)^0$$

esto es, adimensional e invariante a las unidades de medida.

Para pasar a los correspondientes conceptos de *derivada total* y *elasticidad total*, es preciso el paso al límite cuando el incremento de la variable tiende a cero. Pero, así como la función de variable real sólo existe una posible trayectoria para la variación de x, cuya dirección coincide necesariamente con la del eje real, para la función de variable vectorial una infinidad de trayectorias conducen a la variable al punto $\mathbf{x}_o$. El límite puede consiguientemente diferir según cual fuere la trayectoria escogida, condicionando así los valores de la derivada y la elasticidad de la función vectorial, en el punto.

Si aceptamos que la trayectoria defina en $\mathbf{x}_o$ una determinada dirección, de cosenos directores cos α_i, coinciden la derivada según la trayectoria con la derivada direccional (1), resultando

$$f'_t(\mathbf{x}_o) = \lim_{t\to t_o}\frac{\Delta f(\mathbf{x}_o)}{\Delta \mathbf{x}_o} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{x}_o).\cos\alpha_i$$

(1) Una demostración rigurosa y completa puede encontrarse en nuestra obra Matemática para Economistas, pág. 646. Univ. Barcelona, 1975.

donde la expresión $t \to t_0$ equivale a la $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o$, siguiendo la trayectoria t.

Evidentemente, si la trayectoria define en $\mathbf{x}_o$ la dirección de uno de los ejes reales donde se representa la componente x_j^o, es cos $\alpha_i = 1$, para $i=j$, y cos $\alpha_i = 0$, para $i \neq j$, coincidiendo la derivada según tal trayectoria con la correspondiente derivada parcial.

En cuanto a la *elasticidad total,* según la trayectoria t, es

$$_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \frac{|\mathbf{x}_o|}{f(\mathbf{x}_o)} \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta f(\mathbf{x}_o)}{\Delta \mathbf{x}_o} = \frac{|\mathbf{x}_o|}{f(\mathbf{x}_o)} . f'_t(\mathbf{x}_o)$$

y teniendo presente, por otro lado, que son las componentes de $\mathbf{x}_o$,

$$x_i^o = |\mathbf{x}_o| \cos \alpha_i^o$$

donde cos α_i^o son los cosenos directores del vector $\mathbf{x}_o$, es también,

$$_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^o}{f(\mathbf{x}_o)} f'_{x_i}(\mathbf{x}_o) \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_i^o} = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} f(\mathbf{x}_o) \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_i^o}$$

donde han sido tenidas en cuenta las *elasticidades parciales,*

$$E_{x_i} f(\mathbf{x}_o) = \frac{x_i^o}{f(\mathbf{x}_o)} f'_{x_i}(\mathbf{x}_o)$$

La *elasticidad según la dirección de un eje,* el $x_i' x_i$, por ejemplo, es entonces

$$_{x_i}E_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{\cos \alpha_i^o} E_{x_i} f(\mathbf{x}_o)$$

resultando demostrada su disparidad con la elasticidad parcial, así como su relación con la misma.

Podemos así llegar a la expresión que relaciona la elasticidad total, según la trayectoria t, con las elasticidades direccionadas por los ejes, en $\mathbf{x}_o$,

$$_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \sum_{i=1}^{n} {}_{x_i}E_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) . \cos \alpha_i$$

de estructura muy similar a la obtenida para la derivada total.

Utilizando, ahora, la siguiente notación vectorial: $\vec{D}$ para el vector *gradiente* de la función $f(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}_o$, $\vec{E}$ para el vector *gradiente elástico,* para la misma función y punto, según ahora definiremos, y $\overrightarrow{\cos\alpha}$ para el vector de cosenos directores de la dirección de t en $\mathbf{x}_o$, es decir,

$$\vec{D} = \left[f'_{x_i}(\mathbf{x}_o) \right]; \qquad \vec{E} = \left[{}_{x_i}E_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) \right]; \qquad \overrightarrow{\cos\alpha} = \left[\cos\alpha_i \right]$$

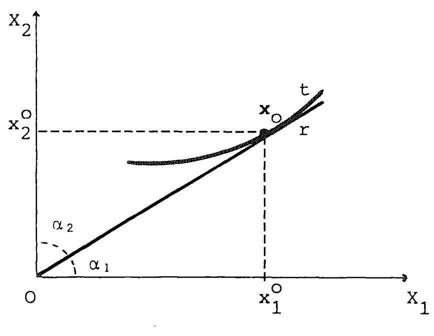
derivada total y *elasticidad total,* de la función en el punto, según la trayectoria t, son respectivamente,

$$f'_t(\mathbf{x}_o) = \vec{D}' . \overrightarrow{\cos\alpha}$$

$${}_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \vec{E}' . \overrightarrow{\cos\alpha}$$

Finalmente, y antes de pasar a redactar las conclusiones, creemos interesante resaltar una propiedad inmediata de la elasticidad total, que venimos estudiando: *Si la dirección de la trayectoria de variación de la variable vectorial, en el punto, incide en el origen, la elasticidad total de la función es suma de las elasticidades parciales.*

Hacemos una representación gráfica del campo analítico, para el caso más simple de variable vectorial bidimensional,



La propiedad se cumple, ya que es $\cos\alpha_i = \cos\alpha^o_i$, por tanto,

$$ {}_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} f(\mathbf{x}_o) $$

Tal propiedad tiene un contenido económico, por cuanto que tal variación de la variable vectorial supone una constancia proporcional en las asignaciones de factores o bienes, respecto a la que determina la combinación $\mathbf{x}_o$.

Procede ya que pasemos a redactar las conclusiones más directas de este análisis.

III. Conclusiones

Se deducen, de la exposición realizada en el anterior apartado, como más directas conclusiones, las que se enuncian:

1. Es factible una generalización formal y *natural*, a las funciones de variable vectorial, de los conceptos analíticos *derivada total* y *elasticidad total*, que estudia la teoría de funciones de variable real, conservando tales instrumentos su significado propio. Esta ampliación recoge a las funciones de variable real como funciones vectoriales monodimensionales.

Las expresiones respectivas para la *derivada* y *elasticidad totales*, en el punto $\mathbf{x}_o$ y según la trayectoria t, son:

$$ f'_t(\mathbf{x}_o) = \vec{D}\cdot\overrightarrow{\cos\alpha} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{x}_o)\cdot\cos\alpha_i $$

$$ {}_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \vec{E}\cdot\overrightarrow{\cos\alpha} = \sum_{i=1}^{n} {}_{x_i}E_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o)\cdot\cos\alpha_i $$

siendo $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\overrightarrow{\cos\alpha}$, los vectores *gradiente, gradiente elástico,* y de *cosenos directores*, respectivamente.

Tal generalización es susceptible de nueva ampliación a las funciones vectoriales de variable vectorial, si bien ella excede de los límites de esta comunicación.

2. Las *elasticidades direccionadas* por los ejes no coinciden con las *elasticidades parciales*, diferenciando así su comportamiento del de las derivadas parciales. La relación entre ambas elasticidades es,

$$ {}_{x_i}E_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{\cos\alpha_i} E_{x_i} f(\mathbf{x}_o) $$

donde la primera es la elasticidad direccionada por el eje $x_i'x_i$, y la última, la elasticidad parcial respecto a x_i.

Esta observación es sumamente transcendente en el análisis económico parcial, que utiliza la hipótesis *caeteris paribus*, pues invalida en él la simple aplicación de las elasticidades parciales, que deben ser reemplazadas por las direccionadas según los ejes, del modo que hemos expuesto, incurriéndose de otro modo en importante incorrecciones.

3. El conocimiento de las elasticidades totales que la función presenta, en un punto, según diferentes trayectorias, permite el análisis económico global, descubriendo las rigideces, inelasticidades o elasticidades de comportamiento de una función económica, en un punto y en el campo analítico de su variable.

Con el fin de ofrecer una concreta aplicación de tal análisis global, nos permitimos incluir un breve ejercicio que figura en nuestra obra Matemática para Economistas, en el que se pretende conocer la trayectoria según la cual la llamada función de producción de Cobb-Douglas presenta la máxima (mínima) reacción.

Siendo la función de Cobb-Douglas,

$$z = k.x^a.y^b$$

donde x e y cuantifican las asignaciones de los factores capital y trabajo empleados para la obtención de la producción z, obtenemos las siguientes derivadas y elasticidades parciales, en el punto (x_o, y_o),

$$f'_x(x_o,y_o) = a.k.x_o^{a-1}.y_o^{b};\ E_x f(x_o,y_o) = a$$

$$f'_y(x_o,y_o) = b.k.x_o^{a}.y_o^{b-1};\ E_y f(x_o,y_o) = b$$

siendo la elasticidad total, según la trayectoria de ángulo α, y cosenos directores $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$, por tanto,

$$_tE_{\mathbf{x}} f(x_o,y_o) = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}\left[\frac{a.\cos\alpha}{x_o} + \frac{b.\operatorname{sen}\alpha}{y_o}\right]$$

donde se han tenido presentes los valores particulares de $\cos\alpha_1^o$ y $\cos\alpha_2^o$.

También puede observarse que las elasticidades direccionadas según los ejes, es decir, para 0° y 90°, son

$$
\begin{aligned}
{}_{x}E_{\mathbf{x}}f(x_o,y_o) &= \frac{a}{x_o}\sqrt{x_o^2+y_o^2}\\
{}_{y}E_{\mathbf{x}}f(x_o,y_o) &= \frac{b}{y_o}\sqrt{x_o^2+y_o^2}
\end{aligned}
$$

diferentes de a y b, elasticidades parciales, siendo aquellas y no éstas, las que permiten el análisis parcial en el punto.

Pasemos ya a la determinación de la trayectoria de máxima (mínima) reacción para la función. Esta será aquella que maximice (minimice) la elasticidad. Obtengamos, entonces, las derivadas primera y segunda, respecto a α, de la función ${}_{t}E_{\mathbf{x}}f(x_o,y_o)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,{}_{t}E_{\mathbf{x}}f}{d\alpha} &= \sqrt{x_o^2+y_o^2}\left[\frac{-a.\operatorname{sen}\alpha}{x_o}+\frac{b.\cos\alpha}{y_o}\right]\\
\frac{d^2\,{}_{t}E_{\mathbf{x}}f}{d\alpha^2} &= \sqrt{x_o^2+y_o^2}\left[\frac{-a.\cos\alpha}{x_o}-\frac{b.\operatorname{sen}\alpha}{y_o}\right]
\end{aligned}
$$

La primera derivada se anula para los valores

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{a.y_o}{b.x_o}$$

que corresponden a los dos sentidos de una sola dirección.

La segunda derivada, para la dirección que anula la primera, toma el siguiente valor,

$$\frac{d^2\,{}_{t}E_{\mathbf{x}}f}{d\alpha^2} = -\frac{2a}{x_o}\cos\alpha\sqrt{x_o^2+y_o^2}$$

negativa, para el sentido de la dirección en el primer cuadrante, y positiva, para aquel que incide en el tercero. En el primero se produce, pues, la máxima reacción elástica o adimensional, mientras que, en el segundo sentido, se obtiene la mínima.

4. La *elasticidad total* en un punto, para una función vectorial cuyo argumento siga la dirección del vector-punto, es decir, $\alpha = \alpha_o$, , es la *suma de las elasticidades parciales* en tal punto. Simbólicamente,

$$_tE_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_o) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} f(\mathbf{x}_o)$$

siendo α_o la dirección de t, en $\mathbf{x}_o$.

Tal propiedad se cumple, entonces, cuando la variación del argumento mantiene la proporcionalidad de sus componentes (factores, bienes, rectas, etc.). Así, para la referida función de producción de Cobb-Douglas, si la trayectoria en (x_o, y_o) sigue la dirección de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_o}{x_o}$$

la *elasticidad total* es,

$$_tE_{\mathbf{x}} f = a + b$$

uniforme, por tanto, para cualquier punto.