EXTENSIÓN DE LA DUALIDAD MATEMÁTICA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LA NO LINEAL. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA GENERAL DE LA DUALIDAD. APLICACIÓN DE LA DUALIDAD ECONÓMICA GENERAL A LA IMPUTACIÓN DE LOS COSTES COMUNES A PRODUCTOS MÚLTIPLES EN LA PRODUCCIÓN CONJUNTA

por el

Excmo. Sr. Dr. D. Alfonso Rodríguez Rodríguez
Catedrático y Académico de Número de la Real Academia de
Ciencias Económicas y Financieras

Con esta comunicación pretendo una divulgación resumida en nuestro entorno académico de la que fue mi tesis doctoral leída el 22 de diciembre de 1966, en la Universidad Complutense madrileña, con máxima calificación. Considero que mantiene un especial interés, tanto por mostrar una aportación en el método matemático para realizarla –la existencia y extensión de la dualidad a la programación no lineal– como por las particulares conclusiones económicas y sus posibles aplicaciones.

En una primera exposición evitaré, en lo posible, excesivos desarrollos analíticos que rigurosamente conducen a las conclusiones matemáticas. Posteriormente mostraré tales desarrollos resumidos en dos Anexos finales, que concluyen y completan la exposición.

Objetivo del trabajo

A) EN CUANTO AL MÉTODO.

Partiendo de las propiedades matemáticas conocidas del programa *dual* en programación lineal, investigo su extensión a la no lineal, donde la existencia de la dualidad y de sus propiedades es desconocida. Su interés económico radica en la interpretación de sus propiedades en el equilibrio, más concretamente para nuestro trabajo, para una imputación no subjetiva de los costes comunes de procesos y factores en la producción múltiple conjunta, mediante una atribución del *valor interno* de su requerimiento en el programa productivo óptimo.

Considerando que las propiedades matemáticas de la dualidad, en programación lineal, debieran lógicamente ser extensibles a un equilibrio menos restrictivo, hemos investigado la existencia de la dualidad matemática y sus posibles propiedades en una programación no lineal, logrando una extensión paralela de sus propiedades, y de su interpretación económica desconocida en un equilibrio más amplio y general.

B) EN CUANTO A LAS CONCLUSIONES Y SUS APLICACIONES.

En la optimización de la función lineal objetivo, con variables condicionadas por restricciones lineales, la *dualidad matemática* demuestra que existe un programa lineal paralelo denominado *dual* –reflejo del *primal*– cuyas variables interpretan una *valoración interna* de la participación de las restricciones en la definición del *punto óptimo*[1]. Esta dualidad invierte en el *dual* el significado de las variables de la función objetivo y de las restricciones que limitan el programa *primal*. Internamente asume la existencia en programación lineal de un *punto de silla minimax*, en donde confluyen las dos programaciones lineales primal y dual, pero con opuesta interpretación. La *primal* pretende lograr un *mínimo* condicionado por restricciones lineales en sus variables. La *dual* muestra la aplicación óptima (*máxima*) de los niveles de las restricciones, fundiéndose ambas soluciones, *primal* y *dual,* en un óptimo común (el punto de silla *minimax*).

Las propiedades que se derivan de la *dualidad* lineal son trasladables a un equilibrio económico más amplio condicionado por restricciones. No todas ls restricciones o especificaciones participan con igual significado económico en el programa óptimo. Pueden algunas llegar a ser inoperantes totalmente, por no intervenir en la definición del programa óptimo cuando son satisfechas con holgura. Otras que son eficaces, actuando como efectivas restricciones, lo son en diferente *grado*. Precisamente este grado es lo que muestra el programa *dual* mediante la consideración de su comportamiento matemático *en el entorno próximo al óptimo*, permitiendo asignar a

1. *"Linear Programing and Economic Analysis"*. Samuelson, Dorfman y Solow. Mc Graw-Hill (1958).

las restricciones una *valoración matemática con interpretación económica,* en atención a su influencia en el punto de equilibrio del programa óptimo.

Si la función objetivo es una función económica (en nuestra aplicación la función de coste de la producción múltiple con factores comunes) que pretendemos optimizar (minimizar) sometida a restricciones o especificaciones condicionantes (niveles de procesos y factores), el óptimo *primal* determina el programa productivo más conveniente. A su vez, el óptimo *dual* informa del valor asignable a cada restricción en su participación en el óptimo *primal,* lo que permite –con criterio no subjetivo (que es lo habitual), sino interno en el propio equilibrio y exclusivamente económico– la imputación del coste de cada uno de los procesos o factores comunes a cada uno de los múltiples productos obtenidos, atendiendo al grado de su participación en el programa productivo óptimo.

El *dual* permite además –como consecuencia de tal imputación de costes– la *ordenación* de los productos obtenidos con un criterio exclusivamente económico interno, fundado sólo en el equilibrio óptimo, y la *clasificación* consiguiente de los productos obtenidos en *principales, subproductos, residuos o "productos libres"* en atención al coste que el *dual* les asignó a cada uno de ellos.

El método matemático

Sin pérdida de generalidad alguna, para el mejor seguimiento y comprensión, haremos en la exposición constantes referencias a la interpretación del dual en la producción múltiple y conjunta con participación de factores o procesos productivos comunes.

La producción conjunta puede formalizarse mediante el *vector de productos* obtenidos $\mathbf{x}$ resultado de la transformación $\mathbf{T}$ del *vector de niveles* de procesos productivos o factores $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$$

El vector $\mathbf{x}$ pertenece a un espacio n-dimensional coincidente con el número de productos requeridos, mientras que el vector $\mathbf{u}$ pertenece a un espacio m-dimensional de decisión empresarial, es decir, al de niveles de actividad de los procesos productivos aplicados. La transformación **T** formaliza la producción en el espacio (*n,m*), interpretando la transformación productiva **u** en productos **x**.

Corresponde al programa **u** un coste de la producción (escalar) $\mathbf{c} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, en donde **f** es una *función vectorial*.

Si $\mathbf{u}^{o}$ es el programa óptimo para el objetivo de producción $\mathbf{x}^{o}$, con menor coste condicionado por las restricciones, debe cumplir las propiedades del mínimo condicionado,

$$\begin{gathered} \mathit{min}\ \ \mathbf{c} = \mathrm{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{x}^{o} \\ \mathbf{u} \geq 0 \end{gathered}$$

Restrinjamos la generalidad de este planteamiento mediante las siguientes hipótesis:

1ª. *Aditividad* de la función **c** respecto a los costes parciales de cada proceso. También *proporcionalidad* de tales costes a su nivel de actividad **u**.

2ª. *Proporcionalidad* de la productividad de cada proceso a su nivel de actividad.

De la primera hipótesis deriva la *linealidad* en la función **f**. De la segunda, deriva la transformación **T(u)** en el *producto* **A.u**, en donde **A** es una matriz (*n,m*) cuyas columnas son vectores transformados, en el espacio de **x**, de los vectores productivos, en el espacio de **u**. Entonces $\mathbf{u}^{o}$ es solución de la programación, de naturaleza lineal,

$$\begin{gathered} \mathit{min}\ \ \mathbf{c} = \mathbf{c}^{o\prime}.\mathbf{u} \\ \mathbf{A}.\mathbf{u} \geq \mathbf{x}^{o} \\ \mathbf{u} \geq 0 \end{gathered}$$

en donde $\mathbf{c}^{o}$ es un vector cuyas componentes son los *costes unitarios* de los procesos activos empleados en el programa óptimo para lograr la producción requerida.

A tal programa *primal* lineal le corresponde el siguiente *dual,*

$$\mathit{max}\ \mathbf{r} = \mathbf{x}^{o\prime}.\mathbf{v}$$
$$\mathbf{A}'.\mathbf{v} \leq \mathbf{c}^{o}$$
$$\mathbf{v} \geq 0$$

en donde $\mathbf{v}^o$, solución del dual, tiene la interpretación económica del *valor imputado* al vector de especificaciones y restricciones $\mathbf{x}^o$, en la solución $\mathbf{u}^o$ del programa primal[2].

Conviene recordar las propiedades matemáticas que relacionan ambos programas *dual* y *primal*[3]:

a) Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{x}$ tienen la misma dimensión (*n*).

b) Es *max* $\mathbf{r}$ = *min* $\mathbf{c}$, o bien, $\mathbf{x}^{o\prime}.\mathbf{v} = \mathbf{c}^{o\prime}.\mathbf{u}$.

c) La componente v_j^o del vector $\mathbf{v}^o$ es nula, si la condición x_j^o se cumplió con holgura en la solución *primal*, en otro caso es un número real positivo.

Tales propiedades muestran la aptitud de $\mathbf{v}^o$ para valorar $\mathbf{x}^o$, estimando cuantitativamente la influencia de cada restricción en el programa óptimo. En efecto:

a) Existe una biunívoca correspondencia entre los vectores de valoración y de restricciones, $\mathbf{v}^o$ y $\mathbf{x}^o$.

b) El coste total del programa primal $\mathbf{c}^o$ es *exactamente imputado* a las restricciones $\mathbf{x}^o$.

c) Si la restricción x_j^o intervino efectivamente en la definición del programa óptimo primal $\mathbf{u}^o$, v_j^o es un número real significativo, siendo nulo en otro caso.

2. *"Linear Programing and Economic Analysis".* Samuelson, Dorfman y Solow. Mc Graw-Hill (1958).
3. Vid. Las condiciones de Kuhn y Tucker. Anexo I, pag. 13.

Dualidad matemática y dualidad económica

La interpretación matemática de la dualidad –resumida en las propiedades expuestas por **Khun** *y* **Tucker**– se prolonga a la interpretación económica del fenómeno al que nos referimos. En efecto, la solución productiva determina simultáneamente dos categorías de variables: una que cuantifica los niveles óptimos de los procesos productivos $\mathbf{u}$, la otra que informa de un sistema de valores o costes imputables a los productos por su participación $\mathbf{v}$.

En el equilibrio económico–óptimo del sistema– ambas categorías se condicionan mutuamente, de tal modo que la determinación de una de ellas sólo tiene sentido económico si viene referida a la otra. Así, en el equilibrio del consumidor las cantidades demandadas de bienes se fijan en consideración a una imputación de valor a los mismos implícita en una hipotética función de utilidad. En el equilibrio de la producción, las ofertas de productos están en íntima relación con la imputación de valor interno que supone la fijación de su coste. La *dualidad económica* –interpretación de la dualidad matemática– permite determinar una categoría de variables conocida la otra. La reciprocidad entre ambos programas, el *primal* y el *dual,* cobra así un preciso sentido económico.

Centrándonos en la formulación de un programa productivo bajo hipótesis restrictivas, sometido a una programación lineal, la dualidad económica se corresponde estrictamente con la matemática. La resolución del *programa dual* imputa y distribuye el coste total de la producción conjunta múltiple con costes comunes a los diversos productos obtenidos, de un modo consistente con el programa productivo que es considerado óptimo. Conocida la solución *primal,* la determinación del óptimo *dual* no haría imprescindible la resolución de un nuevo programa lineal, pues, considerando la referida propiedad *c),* debe cumplirse en la desigualdad condicionante

$$\mathbf{A'.v} \leq \mathbf{c^o}$$

una igualdad estricta

$$A'.\mathbf{v} = c^o,$$

en donde A' es la *submatriz* de $\mathbf{A'}$ correspondiente a los procesos productivos con nivel significativo en el programa óptimo, y c^o es el *subvector* de costes unitarios de los mismos. También sabemos nulas las componentes v_j^o que corresponden a las x_j^o

satisfechas en el primal con holgura. Entonces, si la solución *primal* no fue degenerada, el sistema de ecuaciones expuesto resulta determinado, resolviendo con la interpretación económica ya atribuida la imputación de los costes de los procesos a los productos obtenidos, con criterio exclusivamente económico ajeno a todo posible subjetivismo.

Una generalización económica

Los desarrollos, hasta ahora expuestos, se hallan limitados por aquellas hipótesis previas establecidas que permiten la inmediata aplicación económica de la conocida dualidad matemática en programación lineal. Prescindir de la *aditividad* de la función de coste conjunto –primera de las hipótesis– supone que el coste total no sea ya una suma de costes unitarios independientes, y que cada uno ellos pueda verse afectado por los niveles de actividad de los procesos restantes. Lo cual es frecuente en la producción conjunta. Entonces, la función del coste total abandona la linealidad, para ser ahora formalizada así

$$\mathbf{c} = f(\mathbf{u})$$

Prescindir de la segunda hipótesis, de la *proporcionalidad* de la productividad a los respectivos niveles de actividad en cada proceso, supone admitir la influencia de los restantes niveles de actividad en la productividad de cada uno de ellos. Entonces, el producto matricial $\mathbf{A.u}$, expresión particular de la transformación productiva $\mathbf{T(u)}$, toma ahora forma de *vector funcional*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})$$

en donde sus componentes $a_j(\mathbf{u})$ son funciones vectoriales no negativas que muestran la productividad del programa $\mathbf{u}$ en la obtención particular del producto x_j.

En esta generalización sólo se mantienen ya en la programación las siguientes limitaciones:

a) La función de producción se limita a considerar un número finito de procesos productivos alejándose de la función de producción convencional, que admitía la sustitución continua entre factores con infinitas combinaciones productivas posibles. Sólo se acepta ahora la posible sustitución entre procesos productivos.

b) También, a diferencia de la teoría convencional, no se consideran resueltas previamente las restricciones y limitaciones que afectan a los diversos niveles de la actividad productiva, restricciones que son incorporadas ahora al modelo.

En tal generalización a una programación no *lineal*, el programa óptimo $\mathbf{u^o}$ debe cumplir ahora las propiedades del mínimo condicionado

$$\begin{gathered} \mathit{min}\ \ \mathbf{c} = f(\mathbf{u}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{x^o} \\ \mathbf{u} \geq 0 \end{gathered}$$

Una generalización matemática

La Matemática operativa, hasta ahora, ha considerado la existencia de la dualidad sólo en la programación lineal. Ello nos impidía referirnos a una dualidad económica más general, que aquí investigamos ahora. La dualidad matemática en programación lineal se deduce de la simetría formal en $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que ofrece la expresión de **Lagrange**,

$$\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}'.\mathbf{c^o} + \mathbf{v}'(\mathbf{x^o} - \mathbf{A}.\mathbf{u}) = \mathbf{u}'.\mathbf{c^o} + \mathbf{v}`.\mathbf{x^o} - \mathbf{v}'.\mathbf{A}.\mathbf{u}$$

que refunde ambos programas, *primal* y *dual*, en el punto de silla ($\mathbf{u^o}$,$\mathbf{v^o}$), en un espacio $n + m$ dimensional.

Tal simetría ya no se existe en la anterior expresión adaptada a la general formulación de la programación *no lineal*

$$\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{v}'[\mathbf{x^o} - \mathbf{A}(\mathbf{u})] = f(\mathbf{u}) + \mathbf{v}`.\mathbf{x^o} - \mathbf{v}'.\mathbf{A}(\mathbf{u})$$

No obstante, siendo lógica la existencia de una paralela dualidad económica en el modelo de programación no lineal (de la producción en nuestra aplicación) similar a la existente en programación lineal, ello nos incitó a investigar previamente, en la programación matemática no lineal, una posible existencia de dualidad no lineal similar a la lineal. Nuestra investigación ha alcanzado los siguientes resultados[4]:

1º. *Si la programación –lineal o no– tiene una solución determinada, y las funciones que participan tienen derivada definida en el punto solución* ($\mathbf{u}^o,\mathbf{v}^o$)*,* ***existe*** *el programa dual, deducido de la simetría bilineal de la expresión de Lagrange corregida,*

$$\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}'\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^o} + \mathbf{v}'\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}^o} - \mathbf{v}'\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^o}\mathbf{u}$$

2º. *Es* ***condición necesaria y suficiente****, para que dos programas sean duales entre sí, que las matrices jacobianas de las restricciones de ambos programas sean transpuestas en el punto óptimo* ($\mathbf{u}^o,\mathbf{v}^o$)*,*

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{v}^o} = \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u}^o}$$

3º. *En el programa dual definido no lineal se mantienen las mismas* ***propiedades del lineal*** *(las propiedades de Kuhn y Tucker), extendiéndose entonces su significado matemático y económico como valores imputados al sistema de restricciones condicionantes*[5].

La determinación de los costes imputados en el modelo no lineal

Del sistema condicionante *primal* se deduce [6]

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u}^o}\mathbf{v}^o \leq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^o}$$

4. Vid. A. Rodríguez. Anexo II, pag. 16.
5. En la última notación utilizada se ha considerado como programación dual no lineal asociada,

$$\begin{gathered} \textit{max}\ \ \mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{v}) \leq \mathbf{c}^o \\ v \geq 0 \end{gathered}$$

6. Vid. Alfonso. Rodríguez. Anexo II citado, pag. 16.

donde se halla implícito un sistema de ecuaciones, para las componentes significativas de $\mathbf{u^o}$,

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\text{; para } u_i \neq 0$$

el cual permite determinar la solución *dual* $\mathbf{v^o}$, y con ello los costes unitarios imputables a los productos múltiples de los procesos activos en la producción conjunta.

Resulta inmediato observar como en la programación lineal el sistema de ecuaciones se muestra como una caso particular de ésta otra más general. En efecto, en la programación lineal es

$$\mathbf{A}' = \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}} \quad \text{y} \quad \mathbf{c^o} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}$$

Si el número de de procesos activos coincide o es superior al de restricciones activas –las satisfechas sin holgura– el sistema de ecuaciones resuelve la determinación de $\mathbf{v^o}$ (la compatibilidad del sistema está asegurada por la existencia demostrada de dualidad). Si, por el contrario, el número de procesos con nivel de actividad significativo fuese inferior al de especificaciones satisfechas –caso muy poco probable– el sistema de ecuaciones resultaría indeterminado, siendo *degenerada* la solución con el significado de presencia de algunas restricciones que, siendo activas, no son necesarias conjuntamente cuando coinciden con otras restricciones. Una selección de la solución más conforme, entre las múltiples posibles, se podría fundar en la *tendencia* o *elasticidad* manifestada por cada una de ellas en el entorno próximo al punto de equilibrio.

Interpretación de la ley económica que rige la imputación

En el referido sistema de ecuaciones,

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\text{; para } u_i \neq 0$$

explicitemos las ecuaciones existentes entre las componentes de esta expresión vectorial,

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \mathbf{u}_1{}^{o}}\mathbf{v}_1 + \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \mathbf{u}_1{}^{o}}\mathbf{v}_2 + \ldots. + \frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \mathbf{u}_1{}^{o}}\mathbf{v}_m = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_1{}^{o}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \mathbf{u}_2{}^{o}}\mathbf{v}_1 + \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \mathbf{u}_2{}^{o}}\mathbf{v}_2 + \ldots. + \frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \mathbf{u}_2{}^{o}}\mathbf{v}_m = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_2{}^{o}}$$

....

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \mathbf{u}_n{}^{o}}\mathbf{v}_1 + \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \mathbf{u}_n{}^{o}}\mathbf{v}_2 + \ldots. + \frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \mathbf{u}_n{}^{o}}\mathbf{v}_m = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_n{}^{o}}$$

El primer miembro, de cada una de ellas, explica la *productividad marginal* de la producción respecto a cada una de las variables de decisión (del nivel de actividad u_i del proceso activo) valorado con el *sistema de valores* $\mathbf{v}^o$. El segundo miembro expresa el *coste marginal* del programa respecto a la misma variable de decisión u_i. Entonces, cada ecuación nos informa de que, *en el programa óptimo el sistema de valores imputados a la producción programada es tal que implica que la productividad marginal, así valorada para cada uno de los niveles de actividad de los procesos, exactamente coincide con el correspondiente coste marginal del programa.* De otro modo, *que el coste imputado a la producción marginal, respecto a todos y cada uno de los niveles de actividad de los procesos, debe ser igual al coste marginal del programa respecto al correspondiente nivel.*

Tal propiedad en el equilibrio económico, exigente en la imputación del coste a cada producto, determinan la valoración adecuada para cada especificación o restricción. La simple intuición confirmaría la razón de esta exigencia económica que ya en la teoría convencional determina el equilibrio. Pero, contrariamente, ahora *es el equilibrio el que determina la imputación de los costes comunes, una vez esté definido por el óptimo condicionado*. Y es que la dualidad implica –como reiteradamente venimos manifestando– una simultánea correspondencia en la definición de ambas categorías de variables, la producción y la imputación, de tal modo que, conocida la solución óptima de una de ellas, sea primal o dual, se sigue la necesaria determinación de la restante. Tal es la íntima significación de la solución *punto de silla* ($\mathbf{u}^o$, $\mathbf{v}^o$).

Una observación respecto a los costes fijos

Hemos de entender que las conclusiones referidas son sólo oportunas respecto a la imputación de los *costes variables comunes* a los productos múltiples, en la producción conjunta. Por su propia naturaleza, los costes fijos de los factores o procesos de producción, independientes de las cantidades de producto obtenidas, no pueden ser imputados por un sistema de valoración deducido del programa dual, pues éste sólo considera argumentos variables. Ello es lógico, si consideramos que el sistema de valores que incorpora el dual se funda en una valoración económica de la relación del factor o proceso productivo con la producción, relación inexistente cuando se refiere a factores o procesos fijos independientes de cuales sean las cantidades producidas.

La imputación o atribución de los costes fijos de la producción a los diversos productos múltiples obtenidos, a diferencia de los variables, debe ser convencional y opinática. Habitualmente relacionada con alguna otra magnitud económica (el propio coste total variable, el laboral, el energético, los precios de mercado de los productos, etc.) sin otro significado que el de atribución de cuotas convencionales de recuperación de los costes fijos en los costes imputados a los productos. Tal asignación, artificiosa en los criterios, carece de un sentido propiamente económico. Siendo necesaria e indispensable, en la producción su colaboración es indirecta. Son *costes de empresa*, naturalmente de empresa productiva. Previamente a la asignación de los costes fijos a los productos los costes variables proporcionan un *resultado bruto* de la producción obtenido en los diversos productos obtenidos, pleno de significación económica para las decisiones que orientan la política productiva de la empresa. La posterior asignación de los costes fijos a los productos desvirtúa este sentido. Proporcionan la determinación de otra magnitud, el *beneficio neto* de la producción, información económica necesaria e indispensable pero sólo para decisiones empresariales posteriores.

La clasificación económica y la "ordenación" de la producción conjunta

La imputación de los costes comunes en la producción múltiple conjunta, que facilita el programa dual, permite una ordenación de los productos obtenidos con criterio económico, basada en el esfuerzo empresarial es exigido para la producción de cada producto. La habitual diferenciación de la producción, en productos principales, secun-darios y residuales, o bien, en productos, subproductos y residuos, realizada con criterios externos y subjetivos, se funda en una imputación convencional de los costes comunes. En esta imputación económica interna ls función se invierte. Es la imputación de los costes variables la que define la importancia económica de los diversos productos y los clasifica, no lo contrario. El coste asignado a cada producto supone su valor interno asumido en la programación productiva. No supone una clasificación cualitativa –como la convencional– sino estrictamente cuantitativa permitiendo la ordenación de los diversos productos por su estricta participación económica en la producción óptima.

Un caso extremo podría ser la obtención de un producto sin incidencia para la definición de la producción óptima, siendo entonces claramente residual. Sus especificaciones se cumplen en el primal con holgura. Entonces su valoración es nula en el dual. Su coste interno es también nulo, aunque incorporase factores productivos con coste real. Se podría definir como un *producto libre* en analogía con el *bien libre* que considera la Teoría del consumo. Los restantes productos obtenidos sin holgura en la programación tienen siempre la valoración interna que les asigna el dual, con diferente grado o coste unitario, lo que permite la rigurosa ordenación interna y económica de ellos, superior a cualquier otra clasificación convencional en productos, subproductos y residuos.

ANEXO I

Justificación de las condiciones de Kuhn y Tucker en el "óptimo primal productivo" y extensión al no lineal

En la página 4 hemos hecho una referencia a las condiciones del programa primal que demostraron **Khun** y **Tucker** (1951)[7] en el óptimo matemático. Aquí prolongamos su correspondencia con las halladas en la extensión hecha por la investigación a la programación no lineal, y a sus interpretaciones matemáticas y económicas.

7. Kuhn, H.W. y Tucker, A.W. (Directores): "Contributions to the Theorie of Games. "Linear inequalities and related Systems". Annals of Mathematical Statistics and Probability. University os California Press, 1951.

Partamos del programa *primal*

$$\textit{min}\ \ \mathbf{c} = \mathrm{f}(\mathbf{u})$$

sometido a las condiciones,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{x}^{o}$$
$$\mathbf{u} \geq 0$$

donde aceptamos que las funciones son diferenciables y que existe *convexidad* en la “región factible”.

Definamos el vector de variaciones $\mathbf{du}$, en el óptimo $\mathbf{u}^{o}$, con las siguientes condiciones:

a) El subvector $\delta\mathbf{u}$, referido a niveles de actividad no nulos en $\mathbf{u}^{o}$, es

$$\delta\mathbf{u} \geq 0$$

b) Siendo $\mathrm{d}\mathbf{A}(\mathbf{u})$ el vector de variaciones de la producción debidas a $\mathrm{d}\mathbf{u}$, el subvector $\delta\mathbf{A}(\mathbf{u})$, correspondiente a especificaciones satisfechas sin holgura, entonces es

$$\delta\mathbf{A}(\mathbf{u}) \geq 0$$

Tales condiciones determinan las direcciones permisibles de variación del programa óptimo $\mathbf{u}^{o}$ que cumplen las estricciones. En efecto, se sigue de *a)*

$$\mathbf{u} + \mathbf{du} \geq 0$$

y de *b)*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathrm{d}\mathbf{A}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{x}^{o}$$

Supuesto que las variaciones, representadas $\mathbf{du}$, sean lo suficientemente reducidas para no lograr rebasar los márgenes de holgura de las especificaciones satisfechas en $\mathbf{u}^{o}$, convirtiendo los niveles de actividad positivos en negativos.

Teniendo presente ahora que

$$\mathbf{dc} = \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du}$$

y que su signo debe coincidir con el de la variación no negativa del coste, por su condición de mínimo en $\mathbf{c}^{\mathbf{o}}$, es

$$\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du} \geq \mathbf{0}$$

Para un $\mathbf{du}$ suficientemente reducido, cumpliendo las condiciones *a)* y *b).*

Aplicando a esta desigualdad el teorema de **Farkas**, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du} = \delta\mathbf{A(u)}'\ \mathbf{v} + \delta\mathbf{u}'\ \mathbf{w}$$

donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores con componentes no negativos.

También para v subvector de $\mathbf{v}$, siendo nulas las restantes componentes de éste,

$$\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du} = \mathrm{d}\mathbf{A(u)}'\ \mathbf{v} + \delta\mathbf{u}'\ \mathbf{w}$$

o bien,

$$\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du} - \mathrm{d}\mathbf{A(u)}'\ \mathbf{v} = \delta\mathbf{u}'\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

y también,

$$\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du} - \mathbf{v}^{\mathbf{o}\prime}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{du} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}} - \mathbf{v}^{\mathbf{o}\prime}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\right)\mathbf{du} \geq \mathbf{0}$$

y, por último,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}} - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{o}}}\mathbf{v}^{\mathbf{o}}\right)'\mathbf{du} \geq \mathbf{0}$$

que debe cumplirse para todo $\mathbf{du}$ con las condiciones *a)* y *b).* En particular, para los sucesivos vectores en $\mathbf{u^o}$ con componente $du_i = 1$, y las restantes nulas para cada $u_i = 0$.

Entonces, la desigualdad anterior exige que sea

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v^o} \leq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\text{ ; para } u_i = 0 \text{ en } \mathbf{u^o}$$

Si consideramos ahora vectores $\mathbf{du}$ con todas las componentes nulas, salvo la du_i, para cada $u_i \neq 0$ en $\mathbf{u^o}$, la anterior desigualdad deberá cumplirse, tanto para du_i positiva como negativa. Ello exige que sea

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v^o} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\text{ ; para } u_i \neq 0 \text{ en } \mathbf{u^o}$$

Son ambas consecuencias las condiciones de **Kuhn** y **Tucker**, a las que ahora hemos dado forma matricial.

Entonces, se deducen para el vector $\mathbf{v^o}$ las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{v^o}$ y $\mathbf{x^o}$ tienen las mismas dimensiones (n).

b) $\mathbf{c^o = x^{o\prime}. v^o}$. En efecto, la integración de cualquiera de las componentes de la ecuación vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v^o} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\text{ ; para } u_i \neq 0 \text{ en } \mathbf{u^o}$$

conduce a la igualdad

$$\mathbf{A(u^o)'. v^o = f(u^o)}$$

en donde se anuló la constante de integración considerando la naturaleza variable de los costes en la función $\mathbf{c} = \mathbf{f(u)}$. Inmediatamente se deduce que es

$$\mathbf{x^{o\prime}. v^o = c^o}$$

c) La componente v^o_j es nula si la estricción x^o_j se cumplió con holgura, siendo no negativa en otro caso.

Estas tres propiedades habilitan al vector $\mathbf{v^o}$ como un *sistema de valores* imputables a $\mathbf{x^o}$, que distribuyen el coste total de la producción conjunta $\mathbf{c^o}$ a los *n* productos múltiples obtenidos. Sólo nos resta comprobar que $\mathbf{v^o}$ es precisamente la solución *dual*, pues se obtiene del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v^o} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}} \text{ ; para } u_i \neq 0 \text{ en } \mathbf{u^o}$$

ANEXO II

La dualidad matemática en la programación no lineal

En la página 8 aludíamos a la existencia de un programa *dual* asociado al *primal* en programación no lineal. Es resultado de la investigación que ahora resumimos.

Símbolos y notaciones

Utilizamos la siguiente *terminología matricial*:

$\mathbf{u}$ – vector columna *n*-dimensional.
$\mathbf{v}$ – vector columna *m*-dimensional.
$\mathbf{f(u)}$ – función escalar de $\mathbf{u}$.
$\mathbf{g(v)}$ – función escalar de $\mathbf{v}$.
$\mathbf{F(u)}$ – vector columna *m*-dimensional de funciones de $\mathbf{u}$.
$\mathbf{G(v)}$ – vector columna *n*-dimensional de funciones de $\mathbf{v}$.
$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$ – vector columna *n*-dimensional gradiente $\nabla \mathbf{f(u)}$.
$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}$ – vector columna *m*-dimensional gradiente $\nabla \mathbf{g(v)}$.
$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$ – matriz jacobiana *m,n*-dimensional de $\mathbf{F(u)}$.
$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}}$ – matriz jacobiana *n,m*-dimensional de $\mathbf{G(u)}$.

Simbolizamos las transposiciones (´) y el punto óptimo (º).

Hipótesis previas

- Existencia de una solución *única y definida* en el programa no lineal, situación más normal. Se excluyen entonces soluciones múltiples o imposibles, cuya consideración merece un posterior comentario.

- Las funciones cumplen las condiciones analíticas de *convexidad, continuidad y diferenciabilidad* necesarias para la existencia de solución y de los desarrollos siguientes.

Teorema

"Toda programación no lineal se corresponde con otra lineal asociada equivalente".

Demostración:

Sea el programa no lineal [1],

$$min\ \ \mathbf{c} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

sometido a las condiciones,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{x}^{o}$$
$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

El *hiperplano* tangente a la *hipersuperficie* $\mathbf{c} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, en el punto $(\mathbf{u}^{o},\mathbf{c}^{o})$, está definido por la ecuación

$$\mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{o}}\mathbf{u} - \mathbf{a}$$

siendo $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^{o}}\mathbf{u}^{o} - \mathbf{f}(\mathbf{u}^{o})$$

Por otra parte, los *hiperplanos* tangentes a las *hipersuperficies* componentes de la ecuación vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ en el punto óptimo $\mathbf{u}^{o}$, si éste pertenece a la hipersuperficie (restricción satisfecha sin holgura), o su proyección sobre ella por el radio vector, si no pertenece (restricción satisfecha con holgura), están definidos por las componentes de la ecuación vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

siendo **b**,

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u^o} - \mathbf{F}(\mathbf{u^o})$$

Entonces, el *programa lineal asociado* [2],

$$min \ \ \mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u} - \mathbf{a}$$

condicionado por

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

es equivalente al *programa no lineal* [1] en el sentido de definir el mismo óptimo $\mathbf{u^o}$.

Ello resulta evidente si consideramos que, en el entorno cerrado de $\mathbf{u^o}$, los programas [1] y [2] tienen igual comportamiento respecto a las variaciones de sus respectivas variables.

Definición

La anterior propiedad permite definir un *programa dual* no lineal. En efecto, siendo el programa dual del lineal [2] asociado al [1], el siguiente programa [3]

$$max \ \ \mathbf{t} = \mathbf{b}'.\mathbf{v} - \mathbf{a}$$

condicionado a

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v} \leq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

podemos definir como programa dual del no lineal [1] al programa lineal [3].

Observación: La reciprocidad de la dualidad en la programación lineal se extiende así a la no lineal (el dual del primal es primal del dual).

Teorema

"Es condición necesaria y suficiente para que dos programas no lineales sean duales entre si, que las funciones objetivo cumplan

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^o) = \mathbf{g}(\mathbf{v}^o)$$

y el sistema de restricciones"

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{u}^o} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}^o}$$

Demostración:

A) La condición es necesaria:
Directamente deriva de la dualidad de los programas lineales asociados en el punto de silla ($\mathbf{u}^o$, $\mathbf{v}^o$) (condición *minimax*).

B) La condición suficiente:
Si se cumplen, los programas asociados son duales. En efecto, sean los programas no lineales,

$$\textit{min}\ \mathbf{c} = \mathbf{f}(\mathbf{u})\text{; condicionado por } \mathbf{F}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

$$\textit{max}\ \mathbf{t} = \mathbf{g}(\mathbf{v})\text{; condicionado por } \mathbf{G}(\mathbf{v}) \geq \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

con programas lineales asociados,

$$\textit{min}\ \mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u}^o}\mathbf{u} - \mathbf{a}\text{; condicionado por } \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^o}\mathbf{u} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

$$\textit{max}\ \mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{u}^o}\mathbf{v} - \mathbf{d}\text{; condicionado por } \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}^o}\mathbf{v} \geq \mathbf{e},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

siendo,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u^o} - \mathbf{f(u^o)} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u^o} - \mathbf{F(u^o)}$$

$$\mathbf{d} = \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{v^o}}\mathbf{v^o} - \mathbf{g(v^o)} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v^o}}\mathbf{v^o} - \mathbf{G(v^o)}$$

Para que ambos programas sean duales es suficiente que:

1) Las matrices condicionantes sean transpuestas. Así lo confirma la condición

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{u^o}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v^o}}$$

2) Deban ser,

$$\mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v^o}}$$

Lo confirman las condiciones de **Khun** y **Tucker** en ambos óptimos. Para $u_i \neq 0$ y $v_j \neq 0$, respectivamente en $\mathbf{u^o}$ **y** $\mathbf{v^o}$, son

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{\acute{u}^o}}\mathbf{v^o} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v^o}} = \frac{\partial \mathbf{G}'}{\partial \mathbf{v^o}}\mathbf{u^o}$$

y considerando que para los mismos valores u_i y v_j son nulos $\mathbf{F(u^o)}$ y $\mathbf{G(v^o)}$, también son

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v^o}}\mathbf{v^o} - \mathbf{G(v^o)} = \mathbf{e} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v^o}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u^o} - \mathbf{F(u^o)} = \mathbf{b}$$

3) Debe ser $\mathbf{a = d}$. De las anteriores expresiones se deduce

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u^o} = \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{v^o}}\mathbf{v^o}$$

lo que unido a $\mathbf{f(u^o)} = \mathbf{g(v^o)}$ demuestra $\mathbf{a = d}$.

Resulta demostrada así la dualidad entre las programaciones asociadas y, por tanto también la de las programaciones primitivas antecedentes.

Observación: De ser $\mathbf{f(u)}$ y $\mathbf{g(v)}$ funciones homogéneas de grado uno –caso frecuente en las funciones de naturaleza económica– se cumplirían

$$\mathbf{f(u^o)} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u^o} \quad \text{y} \quad \mathbf{g(v^o)} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v^o}}\mathbf{v^o}$$

siendo preciso, para la condición necesaria y suficiente de dualidad en la programación no lineal, solamente que las *matrices jacobianas* de los programasfueran transpuestas,

$$\frac{\partial \mathbf{F'}}{\partial \mathbf{u^o}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v^o}}$$

Una consideración final

La *dualidad general* así expuesta se sintetiza en la expresión de **Lagrange**,

$$\mathbf{L(u,v)} = \frac{\partial \mathbf{f'}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u} + \mathbf{v'}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{g'}}{\partial \mathbf{u^o}}\mathbf{v}$$

derivada, tanto del programa *primal,* como del *dual*, debido a la simetría,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u^o}} = \frac{\partial \mathbf{G'}}{\partial \mathbf{v^o}}$$

siendo el punto de silla ($\mathbf{u^o}$,$\mathbf{v^o}$) solución, a la vez, de ambos programas duales.