Real Academia
de Ciencias Económicas y Financieras

Desigualdad Económica y Zonoides de Lorenz

La realización de esta publicación
ha sido posible gracias a

GOBIERNO DE ESPAÑA · MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

con la colaboración de

Obra Social "la Caixa"

Barcelona 2018

Publicaciones de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras

Sarabia Alegría, José María

Desigualdad económica y zonoides de Lorenz/discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras…José María Sarabia Alegría…y contestación…Montserrat Guillén Estany

Bibliografía
ISBN-978-84-09-02717-0

I. Título II. Guillén Estany, Montserrat III. Colección

1. Distribución de la renta—Modelos matemáticos 2. Economía—Modelos matemáticos
3. Discursos académicos

HB523

La Academia no se hace responsable de las opiniones científicas expuestas en sus propias publicaciones.
(Art. 41 del Reglamento)

Académico Coordinador: Dr. Ramón Poch Torres

ISBN: 978-84-09-02717-0
Depósito legal: B 15604-2018

Nº registro: 2018037639

Imprime: Ediciones Gráficas Rey, S.L.—c/Albert Einstein, 54 C/B, Nave 12-14-15
Cornellà de Llobregat—Barcelona

Esta publicación ha sido impresa en papel ecológico ECF libre de cloro elemental, para mitigar el impacto medioambiental

Publicaciones de la Real Academia de Ciencias
Económicas y Financieras

Desigualdad Económica y Zonoides de Lorenz

Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras
como Académico Correspondiente para Cantabria, leído el 21 de junio de 2018,
por

ILMO. SR. DR. JOSÉ MARÍA SARABIA ALEGRÍA

Laudatio y Discurso de contestación por la Académica de Número

EXCMA. SRA. DRA. MONTSERRAT GUILLÉN ESTANY

Barcelona, 2018

Sumario

Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Económicas
y Financieras como Académico Correspondiente para Cantabria,
leído el 21 de junio de 2018 por,

ILMO. SR. DR. JOSÉ MARÍA SARABIA ALEGRÍA

Laudatio y Discurso de contestación por la Académica de Número

EXCMA. SRA. DRA. MONTSERRAT GUILLÉN ESTANY

ILMO. SR. DR. JOSÉ MARÍA SARABIA ALEGRÍA

RESUMEN

En el presente discurso se estudia la medición de la desigualdad económica, junto con algunos de sus aspectos actuales. El trabajo se divide en tres partes. En la primera parte se comentan los dos pilares básicos de la medición de la desigualdad y se presentan varios conceptos económicos de actualidad en los que la medición de la desigualdad económica es el centro. A continuación se explican los diferentes tipos de desigualdad y algunas cuestiones relacionadas con el concepto de desigualdad y la unidad de medida.

En la segunda parte se propone un marco conceptual y metodológico para el análisis de desigualdad en datos económicos y sociales. Se estudian los instrumentos básicos del análisis y las regularidades empíricas de las distribuciones de ingreso y riqueza. A continuación se presenta la curva de Lorenz, el orden de Lorenz y el índice de Gini. Se continúa con la contribución fundamental de Atkinson (1970), que establece una conexión entre ordenaciones de las funciones de bienestar, de distribución del ingreso, de las curvas de Lorenz y su relación con el principio transferencias de Pigou-Dalton, así como las medidas de desigualdad asociadas. Se sigue con el planteamiento axiomático de la desigualdad y la modelización mediante funciones de distribución y curvas de Lorenz. Se continúa con las medidas de desigualdad más importantes, destacando las medidas de entropía generalizada y los índices de Theil para finalizar con la medición de la desigualdad categórica

La tercera parte del discurso se dedica a dos nuevos e importantes campos de aplicación de la desigualdad económica: la econofísica y su aplicación en desigualdad y los indicadores multidimensionales. El desarrollo de los diferentes indicadores multidimensionales se establece a partir de las ideas de Atkinson, extendidas a más de una dimensión. Finalmente, se presentan las superficies y los zonoides de Lorenz, como una extensión multidimensional de la curva de Lorenz clásica. Los zonoides permiten estudiar la concentración de varias variables económicas de forma simultánea, y estudiar posibles ordenaciones estocásticas en más de una dimensión.

Palabras clave
Principio de transferencias de Pigou-Dalton; funciones de bienestar; ingreso y riqueza; curva de Lorenz; pobreza y exclusión social; aversión a la desigualdad; axiomas de desigualdad; índice de Gini; descomponibilidad aditiva; índices de Atkinson, de entropía generalizada y de Theil; distribuciones de Pareto y lognormal; ley de Zipf; desigualdad categórica; econofísica; leyes de potencia; indicadores multidimensionales; superficies y zonoides de Lorenz

INDICE

PALABRAS DE AGRADECIMIENTO

Excelentísimo Señor Presidente
Excelentísimas y Excelentísimos Señores Académicos y Autoridades
Señoras y Señores

Permítanme que mis primeras palabras sean de agradecimiento.

Agradecimiento a los miembros de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras y, en especial, a su Presidente, por hacerme merecedor de tan alta distinción.

Es para mí un honor formar parte de esta institución y más aún, compartir con sus miembros no sólo ideas y pensamientos, sino también formar parte -a su lado- de la historia de esta Real Academia a la que hoy me incorporo.

Todos los que estamos aquí somos buscadores de la verdad, ya sea en las palabras, las figuras, las ideas, las funciones o los números.

Una verdad que nos lleva a sacar lo mejor de nosotros mismos para alcanzarla y que sólo cobra valor cuando los demás la reconocen en nuestro trabajo.

Académicos: muchas gracias por reconocer el valor de mi trabajo y hacerme merecedor de este gran privilegio, al que respondo:

- con el compromiso de no desfallecer,
- con la responsabilidad de quien sabe que otros más sabios nos ayudarán a mantenernos firmes en el empeño
- y con la humildad de un alumno incansable que no dejará nunca de aprender.

Porque quien ha encontrado la verdad, sabe que no tiene límites.

Parte I: Introducción a la Desigualdad Económica

1.1 Introducción

El siguiente discurso versará sobre la medición de la desigualdad económica, junto con algunos de sus aspectos actuales a los que he dedicado buena parte de mi trabajo investigador.

Me referiré a diversas cuestiones de carácter tanto empírico como metodológico sobre desigualdad económica junto con la elaboración de *índices de desigualdad multidimensional* y *zonoides de Lorenz*, que son instrumentos dirigidos a la medición del bienestar en una sociedad cuando medimos más de una variable, por ejemplo, el ingreso y la riqueza de los individuos que la componen. En este contexto, hablaré también de una nueva disciplina científica con importantes conexiones con determinados aspectos de la desigualdad, que es la *econofísica.*

La desigualdad ha pasado a convertirse en uno de los temas principales de la investigación económica actual. Durante parte del siglo XX la investigación económica relativa a la distribución de la riqueza estuvo apenas estudiada, en parte por el auge de la economía neoclásica, que no consideraba este tema como algo prioritario (Galbraith, 2016; Cook, 2018).

La situación actual es muy diferente, y la importancia de los aspectos relativos a la distribución y desigualdad del ingreso ha venido confirmada por la concesión de dos recientes premios Nobel de Economía. Me estoy refiriendo a Amartya Sen en 1998 y Angus Deaton en 2015.

Amartya Sen recibió el premio Nobel por sus importantes contribuciones relativas a la economía del bienestar, la teoría de la elección social y el estudio de la desigualdad, relacionando los diferentes índices existentes con las funciones de bienestar, así como por su definición de índices de pobreza y otros indicadores de bienestar, junto con sus investigaciones sobre las hambrunas.

Angus Deaton, centró parte de sus investigaciones en el estudio de cómo los datos sobre el consumo pueden usarse para analizar el bienestar, la pobreza y el desarrollo económico.

A pesar de los importantes avances en este tema y la creciente disponibilidad de información estadística sobre datos de ingreso, riqueza, pobreza y otros indicadores de distribución, tanto a nivel nacional como mundial (muchos de ellos disponibles en la base de datos del Banco Mundial) existe un cierto desconocimiento de las metodologías y las técnicas de medición de la desigualdad. Estudiaremos cómo medir la desigualdad tanto en una como en más dimensiones. En este contexto, el zonoide es un instrumento que permite estudiar la concentración de varias variables económicas simultáneamente, así como las correspondientes ordenaciones estocásticas.

1.2 Los dos pilares de la medición de la desigualdad

La medición de la desigualdad económica se basa en dos pilares fundamentales:

- Por un lado, el llamado "*Principio de transferencias de Pigou-Dalton*" y por otro,

- La metodología que establece cómo realizar un reparto, haciendo uso de la bien conocida *curva de Lorenz*.

El principio de transferencias de Pigou-Dalton (Pigou, 1912; Dalton, 1920), establece que si se realiza una transferencia de una unidad de ingreso desde un individuo más rico a uno más pobre, la desigualdad en la sociedad debe disminuir. Este principio se conoce también como *principio de transferencias de Robin-Hood* (Arnold, 1987), en honor a este héroe literario que con ayuda de su arco robaba el dinero a los ricos para dárselo a los pobres.

Este principio o axioma de transferencias de *carácter normativo*, tiene su enunciado en términos matemáticos, el cual es conocido desde principios del siglo XX. Su prueba y verificación se basa en la *teoría matemática de la mayorización*, establecida por los grandes matemáticos Godrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood y George Polya (Hardy, Littlewood, y Polya, 1929, 1959; Marshall, Olkin, y Arnold, 2011) que caracterizaron este principio en términos de transformaciones de vectores de ingresos, por medio de matrices *doblemente estocásticas*.

El carácter normativo del principio de Pigou-Dalton permite realizar juicios de valor sobre el reparto y la distribución del ingreso. Estos aspectos sobre distribución están directamente relacionados con el bienestar de la sociedad, medido en términos de las llamadas *funciones de bienestar*, de modo que a mayor valor de la función de bienestar, la sociedad gozará de un menor grado de desigualdad.

El segundo de los pilares de la medición de la desigualdad se basa en cómo realizar el reparto. La solución la proporcionó el economista Max Otto Lorenz (Lorenz, 1905) en una importante contribución, donde introducía la denominada *curva de Lorenz*.

Para medir desigualdad en una variable económica, dicha variable debe ser susceptible de ser repartida, y la curva de Lorenz permite conocer cómo se realiza este reparto. La solución es simple: se ordenan los ingresos de menor a mayor, se acumulan y se comparan, en términos relativos, con los correspondientes porcentajes de población. La siguiente pregunta se refiere a la cuantificación de la desigualdad mediante un indicador, sencillo y fácil de calcular y de interpretar. Esta cuestión fue respondida por el científico italiano Corrado Gini, haciendo uso de área encerrada entre la curva de Lorenz y la recta de equidistribución del ingreso. Tenemos entonces el bien conocido índice de Gini, medida universalmente aceptada para la medición de la desigualdad de ingreso y riqueza.

Finalmente, ¿cómo encajan entre sí ambos pilares de la desigualdad?. La respuesta a esta cuestión fue establecida por Kolm (1969) y Atkinson (1970): el hecho de imponer el principio de transferencias de Pigou-Dalton a una distribución de ingresos determina la clase de los índices de desigualdad que lo verifican, y el índice de Gini pertenece a esta clase de índices. Además, dichos autores (entre otras cosas) caracterizaron la clase de índices de desigualdad que verifican esta equivalencia. En el siguiente discurso veremos cómo se determinan y de qué índices se trata. Necesitaremos de algunas herramientas y de algunos principios de desigualdad, además del de Pigou-Dalton.

1.3 Desigualdad por todas partes

Con las siguientes palabras, Amartya Sen prologaba la primera de las ediciones del libro "*Sobre la Desigualdad Económica*" (Sen, 1973) que supuso uno de los puntos de partida en el tratamiento científico de la desigualdad económica:

"*El concepto de desigualdad es, simultáneamente, muy simple y muy complejo. A cierto nivel es el más simple de los conceptos que ha movido a los pueblos con un atractivo directo no superado por ningún otro. A otro nivel, sin embargo, es una noción extremadamente compleja que hace muy problemáticos los juicios sobre la desigualdad y, por tanto, ha sido objeto de investigación para los filósofos, los estadísticos, los teóricos de la política, los sociólogos y los economistas*".

Las palabras de Amartya Sen tienen en la actualidad una especial relevancia, dado el interés público que despierta y el desarrollo investigador alcanzado por el tema.

La desigualdad se está tratando desde muchos puntos de vista, y está en el centro del debate social, político y económico. Sólo por citar algunos ejemplos, hablaré de algunos temas en los que la idea de desigualdad está presente. En concreto, comentaremos brevemente cuatro aspectos: los indicadores de pobreza y exclusión social; la contribución de Piketty al estudio de la desigualdad de la riqueza; desigualdad y riesgos mundiales y algunos nuevos conceptos surgidos a partir de la idea de desigualdad.

1.3.1 Indicadores de pobreza y exclusión social

Dentro de los indicadores multidimensionales de carácter económico y social que han despertado especial interés en los últimos años se encuentra el indicador AROPE.

Se trata de un indicador de carácter multidimensional, que tiene en cuenta diversas facetas de la falta de recursos. El indicador o tasa AROPE (siglas de "At Risk Of Poverty or social Exclusion") es uno de los indicadores de la estrategia Europa 2020 de la Unión Europea, definido según unos criterios establecidos por Eurostat.

Según el INE (2016), el indicador AROPE mide el riesgo de pobreza o exclusión social y se construye con la población que se encuentra bien en riesgo de pobreza, o con carencia material o con baja intensidad en el empleo. Por tanto, dicho indicador combina tres condiciones de diferente naturaleza (donde se debe de cumplir al menos una de las tres), cuyas referencias temporales y espaciales son diferentes. El interés actual de este tipo de indicadores compuestos es indudable.

1.3.2 La desigualdad de la riqueza según Piketty

El bestseller económico "El Capital en el Siglo XXI" del profesor Thomas Piketty (Piketty, 2014), ha supuesto un interés de la sociedad por las investigaciones académicas acerca de la desigualdad a nivel mundial con datos históricos. En dicho libro, Piketty establece que, los sistemas capitalistas tienden a aumentar las desigualdades de renta y sobre todo de riqueza. El punto de partida de esta investigación es la ya conocida desigualdad,

$$r > g$$

que establece que en un sistema capitalista, la tasa de rendimiento de la riqueza financiera (el capital en la terminología de Piketty) crecerá por encima de la tasa de crecimiento de la economía, dada por g (una crítica a esta hipótesis puede verse en Mankiw, 2015). Esta hipótesis viene fundamentada por una amplia base de datos sobre la distribución de la riqueza a partir de datos fiscales de algunos países como Francia, Reino Unido, Estados Unidos, Canadá, Suecia etc. Piketty considera el aumento de la ratio capital-renta K/Y a que el crecimiento de la economía es más lento que el de los rendimientos de capital. La propuesta de Piketty a este hecho es radical y cuanto menos controvertida y consiste en "un impuesto global progresivo sobre el capital". Un acertado comentario acerca de las tesis de Piketty puede encontrarse en Galbraith (2014).

1.3.3 Desigualdad y riesgos mundiales

El "*World Economic Forum*" en su informe 2017 sobre riesgos mundiales, alerta sobre la persistencia de la desigualdad mundial y sus consecuencias. Dicho informe señala: "*el potencial que tienen las tendencias persistentes a largo plazo, como la desigualdad y el aumento de la polarización social y política, para exa-*

cerbar los riesgos asociados con, por ejemplo, la debilidad de la recuperación económica y la velocidad del cambio tecnológico".

En este sentido de los cinco desafíos a los que el mundo se enfrenta según el *World Economic Forum*, dos se encuentran en la categoría económica. Los participantes de la encuesta sobre riesgos mundiales señalaron que: "*el aumento de los ingresos y la desigualdad en la distribución de la riqueza*", eran una de las tendencias más importantes a la hora de predecir los acontecimientos que se producirán en el mundo durante los próximos diez años. El foro sugiere "*la necesidad de revitalizar el crecimiento económico y realizar reformas al capitalismo de mercado*".

1.3.4 Conceptos surgidos a partir del estudio de la desigualdad

El impacto del concepto de desigualdad en el mundo económico y académico es realmente importante.

Existen una diversidad de conceptos y teorías recientes en economía, nacidas a partir del interés teórico y empírico por describir aspectos relacionados con el fenómeno de la desigualdad.

Como primer aspecto, indicar las investigaciones de A. Sen y A. B. Atkinson (Sen, 1976; Atkinson, 1987) sobre la construcción de los índices de pobreza, cuestión íntimamente relacionada con el concepto de desigualdad.

A continuación tenemos la formulación del índice de desarrollo humano (IDH) del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. Este indicador, junto con sus variantes más recientes, nacieron a partir de las investigaciones de Amartya Sen basadas en la teoría de las capacidades y de la medición de la pobreza.

La teoría de la *privación relativa* establece una comparación de la renta de un individuo en relación a la de su grupo. Se basa en la teoría de Runciman (1966) y fue desarrollada desde un punto económico por Yitzhaki (1979), estableciendo la función de satisfacción y privación del individuo, y relacionándola con la de toda la sociedad a través del índice de Gini.

El concepto de *polarización* ha adquirido una importante relevancia en el estudio de la distribución de la renta. La polarización es una medida que indica el nivel de conflictividad potencial que puede haber en una sociedad (Esteban y Ray, 1994; Duclos, Esteban y Ray, 2004). El concepto de polaridad y los diferentes índices existentes ya forman parte de muchos de los estudios empíricos sobre renta y riqueza.

Otro concepto muy relacionado con la desigualdad y que ha despertado un creciente interés se refiere a la reciente *teoría de igualdad de oportunidades* (Roemer, 1998), donde al principio clásico del mérito, se opone la igualdad de oportunidades en la adquisición del mérito.

Finalmente, destacar la reciente rama científica denominada *econofísica*, disciplina que, entre otras cosas, estudia las propiedades de la distribución de renta y riqueza en su conjunto, y a la que haremos referencia en la última parte de este discurso.

1.4 Los diferentes tipos de desigualdad y su medición

Otro de los aspectos relevantes a la hora del estudio de la desigualdad es el tipo de desigualdad a la que nos estamos refiriendo.

En su ensayo sobre la desigualdad, Galbraith (2016) distingue hasta seis formas diferentes de desigualdad económica y social:

- *Desigualdad de clase*: se refiere a la pertenencia a un grupo. Si bien, en el pasado su delimitación era más estricta, en la actualidad se encuentra en ocasiones presente.
- *Desigualdad de rango*: se usa para establecer la posición de un individuo en algún tipo de escala, social o económica (éxito, ingresos, poder, etc.)
- *Desigualdad de riqueza*: describe el valor financiero de los bienes personales o familiares.
- *Desigualdad de renta o ingreso*: referida al flujo de ingresos en un periodo de tiempo.

- *Desigualdad de ciudadanía*: establece una jerarquía de derechos de acceso a bienes comunes y protecciones sociales.
- *Desigualdad categórica*: es un tipo de desigualdad que puede englobar algunos aspectos de las anteriores, y se refiere a la inclusión de los individuos en los grupos a los que pertenecen, y mide las desigualdades entre esos grupos, mediante algún tipo de comparación (si la variable es cardinal, usando la mediana del grupo, etc.). Dentro de este tipo de desigualdad, nos encontramos con la desigualdad entre grupos raciales, que viene asociado con el concepto de *segregación* (Duncan y Duncan, 1955; Arnold y Gokhale, 2014), la *desigualdad de género*, etc.

Desde el punto de vista de la medición, cada uno de estos tipos de desigualdad requiere el uso de un tipo diferente de medida. La desigualdad asociada a variables cardinales (es decir la desigualdad de ingreso y de riqueza), es la medición estándar usada en economía, haciendo uso de la curva de Lorenz y del índice de Gini. Sin embargo, las desigualdades de clase, rango, ciudadanía y categóricas, requieren de otro tipo de medidas de desigualdad, de más reciente implantación en economía. Nos referimos precisamente a la medición de la desigualdad en variables categóricas. La medición de estas desigualdades, tan habituales en la actualidad, requiere de otras metodologías y axiomas, que comentaremos en la segunda parte de este discurso.

1.5 Algunos aspectos de la desigualdad económica

La desigualdad económica estudia (Black, Hashimzade y Myles, 2017):

"*Las diferencias en la distribución de stocks o flujos de variables económicas entre los diferentes agentes de la economía*".

De este modo, la desigualdad en la riqueza, se refiere a la distribución del stock total de la riqueza, mientras que la desigualdad de ingreso se refiere a la distribución del flujo de ingreso.

Por otro lado, la desigualdad puede surgir entre individuos de un grupo, entre grupos de una población o bien entre regiones o países.

La definición anterior parece clara, pero existen algunos aspectos adicionales que necesitamos especificar. En primer término, necesitamos conocer cuál es la unidad de medida y en segundo lugar cuál es el tipo de variable económica en estudio.

El considerar una unidad de medida u otra nos llevará a un concepto diferente de desigualdad y a resultados bien diferentes. En este contexto, Milanovic (2005) diferencia entre tres conceptos de desigualdad de ingresos, que vienen asociados a la unidad de medida.

El primero de ellos se refiere a la desigualdad no ponderada que contempla cada país como una unidad, con independencia del tamaño de su población. En principio, este concepto puede parecer poco representativo, ya que países como Luxemburgo tienen el mismo peso en el índice que países grandes como China, que representa un sexto de la población mundial (Decancq y Lugo 2012). Sin embargo, en un contexto en el que los países pueden considerarse como unidades territoriales donde se implementan las mismas políticas de desarrollo a nivel nacional (Ravallion, 2004), que además se caracterizan como un conjunto de experiencias (Milanovic, 2005), esta concepción de la desigualdad adquiere una mayor coherencia y validez.

El segundo de los conceptos representa la desigualdad ponderada. Bajo este punto de vista se supone que la distribución interna de cada país es totalmente equitativa, por lo que todos los individuos llevarían asignado el valor nacional de la variable objeto de estudio. De esta manera el sujeto de análisis serían los ciudadanos y no los países.

El concepto tercero de desigualdad establecido por Milanovic, se refiere a la desigualdad entre individuos, de modo que todos los individuos (personas o familias), son tratados por igual. En este caso se tiene en cuenta la distribución interna de la variable considerada en cada una de los países, así como la existente entre ellos. Los sujetos del estudio son también los individuos pero considerando su situación específica con respecto a la variable objeto de estudio. No hay duda de que este enfoque proporciona conclusiones más realistas sobre la distribución de la variable en cuestión. Sin embargo, su cálculo requiere disponer de datos más detallados a nivel individual.

El siguiente aspecto se refiere al tipo de variable económica que queremos estudiar. Como hemos comentado anteriormente, tradicionalmente en economía sólo se estudiaban las desigualdades cuyas variables se podían mediar con dinero, y que fueran de tipo stock o flujo.

Sin embargo, en muchas situaciones estamos interesados en estudiar la desigualdad de clase, de rango, de ciudadanía o más en general la desigualdad de una variable categórica. Existen muchas variables económicas de carácter categórico. Dentro de este grupo, se encuentran las variables que se miden por medio de nuestra percepción, a través de una escala. Existen dos ejemplos de esta situación: percepción del estado de salud y percepción de la felicidad.

La salud de un individuo se mide por medio de la salud percibida, por medio de una escala de menor a mayor. Se trata por tanto de una variable de carácter categórico ordinal. La misma situación ocurre con la variable felicidad, que es subjetiva y se vuelve a medir en una escala a través de su percepción.

La medición de la desigualdad en este tipo de variables supone un desafío en la investigación económica actual, y lo comentaré en la segunda parte de este discurso.

1.6 Contenido del discurso

Los diversos temas planteados en esta introducción son de gran interés empírico y teórico, y requieren de una metodología adecuada y rigurosa.

La desigualdad y muchos de sus temas asociados afectan en gran medida a la percepción de hechos importantes. Por tanto, es necesaria una reflexión acerca del significado de estas cifras y del alcance de su significado. La economía ha realizado un importante esfuerzo en incluir el enfoque normativo en todas sus reflexiones. Sin embargo, en el debate público, no siempre se tiene en cuenta sus enseñanzas y esto nos puede llevar a una mala interpretación de la realidad.

En las partes segunda y tercera del discurso hablaré sobre cómo medir la desigualdad y discutiré diversos aspectos de la econofísica y de los indicadores multidimensionales de desigualdad, que incluyen los zonoides de Lorenz. Terminaré con algunas conclusiones.

Parte II: Cómo Medir la Desigualdad

2.1 Introducción

En esta parte del discurso hablaremos de los aspectos metodológicos de la medición de la desigualdad. Propondremos un marco conceptual y metodológico para el análisis de datos de desigualdad. Dicho marco nos permitirá una correcta interpretación de las diferentes medidas de desigualdad.

2.2 Instrumentos básicos

Comenzaremos introduciendo las funciones de distribución, de densidad y de cuantiles.

2.2.1 Funciones de distribución y de densidad del ingreso

En los orígenes de la investigación sobre desigualdad rara vez se distinguía entre muestra y población, y la naturaleza de la variable en estudio no estaba en ocasiones determinada.

En su trabajo pionero Atkinson (1970), hace uso de distribuciones de ingresos correspondientes a variables aleatorias de tipo continuo, mientras que Sen (1973) utiliza variables aleatorias de naturaleza discreta. El uso de variables aleatorias continuas para representar el ingreso presenta varias ventajas metodológicas. En algunas ocasiones se comienza definiendo los índices desde el punto de vista muestral (que se puede extender fácilmente al caso de variables aleatorias de naturaleza discreta), para posteriormente considerar la versión poblacional. En otras situaciones el obtener la versión poblacional de una medida a partir de la versión muestral no resulta evidente.

En este apartado describiremos dos instrumentos básicos para el estudio de la desigualdad en términos de poblaciones de carácter continuo. Realizaremos la discusión en términos de ingreso y lo representamos por medio de una variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$. Dicha función de distribución viene definida por,

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

que representa el porcentaje de individuos (que pueden ser personas, hogares, regiones, etc.) con ingresos menores o iguales que x , y por tanto x es la unidad de observación.

A partir de un conjunto de datos $x_1,\ldots,x_n$ la versión muestral de $F(x)$ constituye la función de distribución empírica.

Si suponemos que $F(x)$ es continua y diferenciable, obtenemos la función de densidad $f(x)$ de X por medio de la derivada de la función de distribución. La función de densidad es la versión poblacional del histograma, de modo que,

$$f(x_j) \approx \frac{\Pr(x_{j-1} < X < x_j)}{\Delta x_j}$$

donde $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$. Un inconveniente del histograma es su variabilidad cuando elegimos la amplitud de los intervalos. Con objeto de tener una estimación más precisa, se consideran como estimadores de la función de densidad los estimadores tipo núcleo (Silverman, 1986).

Es importante tener en cuenta que los niveles de desigualdad dependen de la forma de la función de densidad. Por tanto, una correcta especificación y estimación de las funciones de distribución y de densidad será determinante a la hora de describir los datos de renta y riqueza.

2.2.2 Cuantiles y función de cuantiles

Los cuantiles suponen una de las formas más simples y habituales de describir una distribución de ingresos. La idea es ordenar las observaciones de menor a mayor y considerar grupos de ingresos con el mismo porcentaje de individuos.

Si consideramos grupos del 10 por ciento tenemos los deciles, mientras que si los grupos son del 20 por ciento tenemos los quintiles.

En términos poblacionales, la función que define los cuantiles viene definida por,

$$X(p) = F^{-1}(p), \ \ 0 \leq p \leq 1$$

mediante la cual se obtiene el valor del ingreso que deja a la izquierda el por ciento del total de los datos.

La correspondiente representación gráfica de la función de cuantiles empírica se conoce en el ámbito de desigualdad como “cabalgata de Pen”.

Los cuantiles se usan en ocasiones en el estudio de ingresos para definir clases sociales. De este modo los individuos pobres se encuentran en el cuantil 10, es decir su ingreso está por debajo del cuantil 10, y los ricos en el cuantil 90.

Los cocientes de cuantiles, son habitualmente utilizados como medidas de desigualdad, y presentan la propiedad de no depender de la unidad monetaria.

Por ejemplo, si consideramos la distribución de la renta en términos de deciles, podemos considerar tres cantidades que miden la desigualdad en términos de clase. La cantidad $X(90)/X(10)$ describe las veces que el percentil 90 contiene al percentil 10, y puede ser interpretada como una medida de desigualdad sin tener en cuenta los valores extremos y que mide la brecha entre ricos y pobres. Este índice de desigualdad (también llamado cociente de dispersión de deciles) es utilizado por el Banco Mundial. De igual forma el cociente $X(90)/X(50)$ describe la desigualdad entre la clase media y la alta, mientras que $X(50)/X(10)$ puede interpretarse como la privación relativa de las clases bajas respecto las medias (Galbraith, 2016). Piketty (2014) hace un uso intensivo de estas cantidades para el análisis de la desigualdad de la riqueza.

Si ahora definimos la distribución de la renta en términos de quintiles, podemos considerar el indicador cociente $X(80)/X(20)$, usado por Eurostat como indicador de desigualdad del ingreso.

Los cocientes de cuantiles son muy usados como medidas de desigualdad, en parte por su facilidad de cálculo. Igualmente se interpretan fácilmente en términos de desigualdad categórica como acabamos de ver. Sin embargo, estas medidas cocientes presentan el inconveniente de ser insensibles frente a transferencias en determinados tramos de renta y por tanto no verifican el principio de transferencia.

2.3 Regularidades empíricas en distribuciones de renta y riqueza

Las regularidades empíricas en las distribuciones de renta y de riqueza han sido descritas en la literatura económica.

Se observan principalmente dos tipos de regularidades: el carácter asimétrico de la distribución y las colas pesadas.

Con objeto de ilustrar estas dos regularidades, consideramos la distribución de los ingresos equivalentes por hogar en Austria, recopilados por el EU-SILC (European Union Statistics on Income and Living Conditions) correspondientes a 58.654 observaciones, y disponibles dentro del paquete “eusilcP”, del software estadístico R. Hay que señalar que la muestra de datos disponible no se corresponde con total de la muestra, habiéndose prescindido de un porcentaje de los ingresos extremos. Se ha elegido la muestra de Austria, simplemente por el hecho de que recoge las características típicas de una distribución de ingresos.

El histograma de los datos, junto con una estimación tipo núcleo de la función de densidad, aparecen representados en la Figura 2.1.

Se observa en primer lugar una *asimetría positiva* en la distribución, que refleja la falta de equidistribución en los ingresos. El segundo aspecto a considerar es la *cola pesada* de la distribución, que indica la existencia de ingresos extremos. Este hecho se corresponde con el comportamiento tipo Pareto (o de ley de potencias) en la cola de la distribución. La Figura 2.2 muestra la gráfica de la función de distribución empírica junto con la cabalgata de Pen. Algunas medidas de desigualdad de los datos aparecen recogidas en la Tabla 2.1. El hecho de que la muestra no incluya todos los ingresos extremos hace que los valores de algunas medidas de desigualdad sean más moderados que lo habitual.

Figura 2.1: Histograma y estimación tipo núcleo de la función de densidad, para los datos de ingresos de Austria.

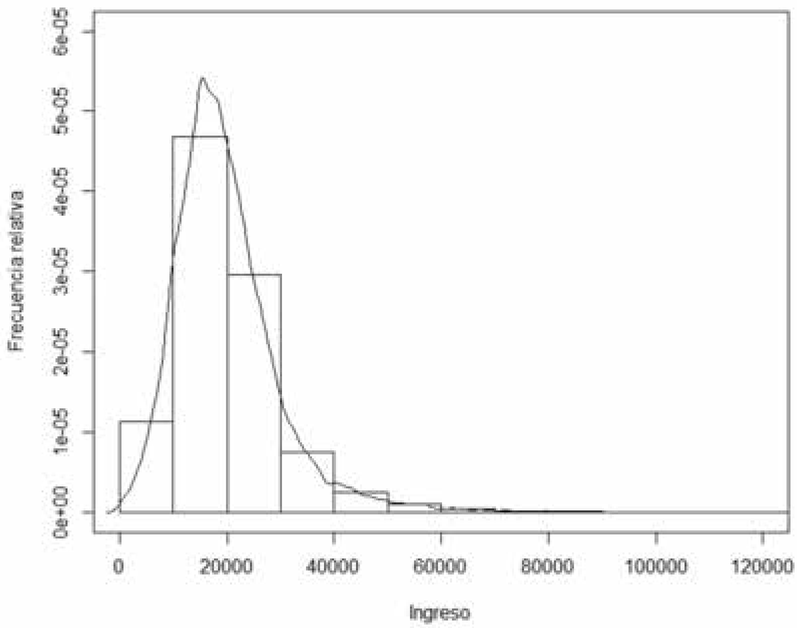


Figura 2.2: Función de distribución empírica (ecdf(muestra)) y diagrama de Pen (Pen's Parade) de los datos de ingresos de Austria.

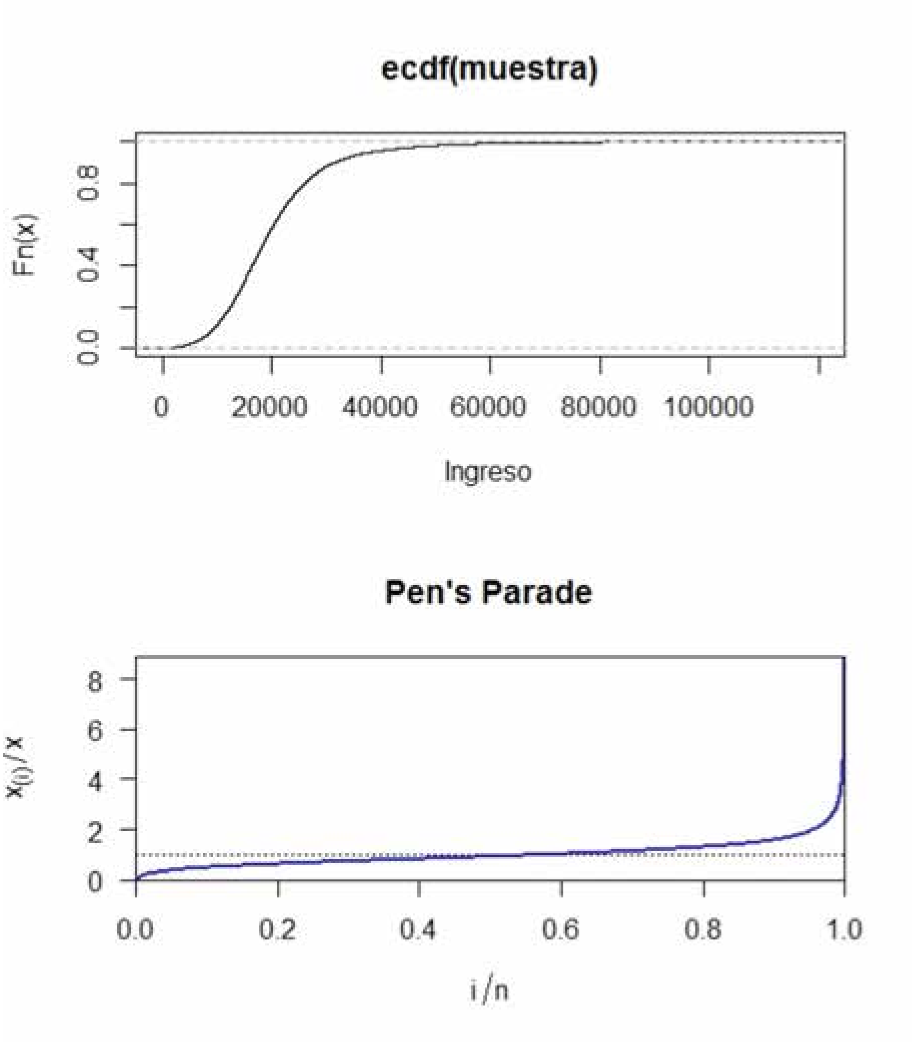


Tabla 2.1: Medidas descriptivas y de desigualdad para los datos de ingresos de Austria.

Medidas Descriptivas y de Desigualdad	Indicadores
Ingreso medio	20.160
Ingreso mediano	18.320
Ingreso máximo	179.900
Coeficiente de asimetría	2,57
Coeficiente de curtosis	17,77
Cuantil 10	9.572
Cuantil 25	13.540
Cuantil 75	24.280
Cuantil 90	31.763
$X(90)/X(10)$	3,32
$X(90)/X(50)$	1,73
$X(50)/X(10)$	1,91
Indice de Gini	0,27

2.4 La curva de Lorenz, el orden de Lorenz y el índice de Gini

La curva de Lorenz fue introducida en 1905 por el economista Americano Max Otto Lorenz, y es un potente e imprescindible instrumento para estudiar la desigualdad en el ámbito del ingreso, riqueza y otras variables económicas.

Según el Banco Mundial: "*La curva de Lorenz representa los porcentajes acumulados de renta correspondientes a un porcentaje acumulado de población, empezando por los individuos o grupos más pobres*".

La curva de Lorenz se define por puntos (p_i ,q_i), donde p_i representa la proporción acumulada de individuos de la población y q_i la proporción acumulada de renta. Si tenemos datos de ingresos individuales, tras ordenarlos de menos a mayor, la curva de Lorenz se define por medio de los puntos,

$$(p_i, q_i) = \left(\frac{i}{n}, \frac{x_{1:n} + \cdots + x_{i:n}}{x_{1:n} + \cdots + x_{n:n}}\right), \qquad i = 1,2,\dots,n$$

para a continuación interpolarlos linealmente.

La Tabla 2.2 muestra los datos de quintiles de ingresos en España en 2014, y los correspondientes puntos de la curva de Lorenz.

Tabla 2.2 Datos de quintiles de ingreso en España, 2014 y puntos de la curva de Lorenz. Fuente: Banco Mundial

Grupo de población	**Proporción de Ingreso**	p_i	q_i
20% más pobre	5,7%	20%	5,7%
Segundo grupo	11,8%	40%	17,5%
Tercer grupo	17,0%	60%	34,5%
Cuarto grupo	23,6%	80%	58,1%
20% más rico	41,9%	100%	100,0%

En el caso de variables aleatorias continuas, la curva de Lorenz se define sobre el cuadrado unidad como,

$$\left(F(x), F_{(1)}(x)\right),$$

donde $F(x)$ es la función de distribución del ingreso y $F_{(1)}(x)$ la distribución del primer momento incompleto,

$$F_{(1)}(x) = \frac{\int_0^x y dF(y)}{\int_0^\infty y dF(y)}$$

es decir, la proporción del ingreso total que percibe la correspondiente proporción de la población.

Existe una definición más general de la curva de Lorenz que engloba los casos discreto y continuo. Para ello consideramos la clase $\mathcal{L}$ de las variables aleatorias no negativas con esperanza finita y positiva. Si definimos la inversa de la función de distribución como,

$$F_X^{-1}(y) = inf\{x: F_X(x) \geq y\}$$

La curva de Lorenz correspondiente a la variable aleatoria X viene definida por (Gastwirth, 1971),

$$L_X(p) = \frac{1}{\mu_X}\int_0^p F_X^{-1}(y)dy\,, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

donde μ_X representa la media de la variable aleatoria X.

2.4.1 El orden de Lorenz

Otra de las principales aplicaciones de las curvas de Lorenz es poder realizar comparaciones y establecer rankings de distribuciones de menor a mayor igualdad. Para ello se define el *orden de Lorenz* de la siguiente manera. Si X e Y son dos variables aleatorias pertenecientes a la clase $\mathcal{L}$, se dice que X presenta menor desigualdad que Y en el sentido de Lorenz y se representa por

$$X \leq_L Y$$

si y sólo si

$$L_X(p) \geq L_Y(p), \qquad \forall\, p \in [0,1]$$

y se da la desigualdad estricta para algún valor de p. Como posteriormente veremos mediante el Teorema de Atkinson (1970), si dos distribuciones de ingresos presentan curvas de Lorenz que no se cortan, entonces pueden ordenarse sin ambigüedad en términos de funciones de bienestar que sean simétricas, crecientes y cuasi-cóncavas.

El orden de Lorenz permitirá establecer un ranking de distribuciones a través de medidas de desigualdad *relativas*. Para que exista orden de Lorenz se tiene que dar una dominación total entre las dos curvas de Lorenz, que no siempre es posible. Se trata por tanto de un *orden parcial*.

El orden de Lorenz equivale a la siguiente condición (Arnold, 1987; Arnold y Sarabia, 2018),

$$E\left[g\left(\frac{X}{\mu_X}\right)\right] \leq E\left[g\left(\frac{Y}{\mu_Y}\right)\right]$$

para toda función $g\ (x)$ continua y convexa, y donde $E(U)$ es el operador esperanza matemática de una variable aleatoria U. En consecuencia, cualquier función continua y convexa tiene asociada un índice de desigualdad que es monótono respecto el orden de Lorenz, y viene definido como,

$$I_g(X) = E\left[g\left(\frac{X}{\mu_X}\right)\right]$$

Por ejemplo, es coeficiente de variación al cuadrado se puede escribir de esta forma,

$$CV^2 = \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} = \frac{E(X-\mu_X)^2}{\mu_X^2} = E\left(\frac{X}{\mu_X} - 1\right)^2$$

2.4.2 El índice de Gini

El índice de Gini es sin lugar a dudas la medida de desigualdad más popular y de más amplia utilización en la medición de la desigualdad, tanto económica como social.

Se trata de un índice relativo que no depende de la unidad monetaria en que se mide el ingreso, y que por tanto permite realizar comparaciones entre poblaciones de un modo simple. Por otro lado, es un índice compatible con el orden de Lorenz y que cumple el principio de transferencias de Pigou-Dalton. Su cálculo es sencillo, y se puede calcular a partir de los datos brutos, de los datos agrupados en intervalos o de los datos definidos en términos de los cuantiles.

Según la definición del Banco Mundial: "*el índice de Gini mide el área entre la curva de Lorenz y la hipotética línea de absoluta igualdad, como un porcentaje de la máxima área bajo la curva de Lorenz*".

El índice de Gini se encuentra entonces entre 0 y 100, de modo que si es igual a 0 representa la perfecta igualdad, es decir, todos los individuos perciben el mismo ingreso, mientras que si es igual a 100 se da la perfecta desigualdad, es decir, un solo individuo percibe el total del ingreso.

Analíticamente, el índice de Gini se define, en términos de la población, como

$$G(X) = 2\int_0^1 [p - L_X(p)]dp = 1 - 2\int_0^1 L_X(p)dp$$

La Tabla 2.3 muestra el valor del índice de Gini para el ingreso, para una muestra de ocho países, de más a menos igualitario. El país más igualitario en términos de ingreso es Suecia y donde existen niveles más altos de desigualdad es en Brasil.

Otra forma alternativa de expresar y calcular el índice de Gini es por medio de la expresión,

$$G(X) = \frac{E|X_1 - X_2|}{2\mu_X} = \frac{1}{2\mu_X}\int_0^\infty \int_0^\infty |x_1 - x_2| dF_X(x_1)dF_X(x_2).$$

Esto supone comparar todas las parejas de datos de renta, promediarlas y a continuación dividirlas por el doble de la media. En consecuencia, se trata de un índice que es sensible a las transferencias en la parte central de la distribución.

Señalaremos a continuación otras dos características de este índice. En primer lugar, para su cálculo debemos disponer de información primaria, en términos de una encuesta o de registros fiscales, o de información secundaria descrita en términos de algún tipo de cuantiles. Como es habitual, la información de encuestas de ingresos es difícil de obtener y la frecuencia de publicación suele ser, cuanto menos, superior al año.

El segundo de los aspectos se refiere a la propiedad de descomponibilidad en subgrupos de población. Señalar que existen dos tipos de descomposiciones: por factores y por grupos de población.

Supongamos una población dividida en grupos o subpoblaciones. En esta situación, la obtención del índice Gini en toda la población, a partir de la información de los índices de Gini de las subpoblaciones no es sencilla, puesto que el índice de Gini no pertenece a la clase de índices descomponibles aditivamente. En su descomposición en términos de subpoblaciones, aparecen diversos componentes, algunos de los cuales no tienen una fácil interpretación (ver Chotikapanich, Griffiths y Rao, 2007 y Arnold y Sarabia, 2018). Sin embargo, se trata de un índice *descomponible por factores* aditivos. Este tipo de descomposiciones han sido propuestas por Lerman y Yitzhaki (1985), y dan lugar a una suma de componentes con tres factores, de fácil cálculo e interpretación.

Una extensión del índice de Gini viene definida por medio de la siguiente expresión (Donaldson y Weymark 1980; Kakwani, 1980; Yitzhaki (1983),

$$G_\nu(X) = 1 - \nu(\nu+1)\int_0^1 (1-p)^{\nu-1} L_X(p)dp$$

donde ν es un parámetros que indica la aversión a la desigualdad. Si ν =1 tenemos el índice de Gini. Si el valor del parámetro ν crece, el efecto es que damos más peso a la parte baja de los ingresos, de modo que,

$$G_\infty = mínimo\{X_i\}$$

que es el criterio de desigualdad establecido por Rawls. Esta forma de medir la desigualdad expresa que el bienestar de la sociedad depende del bienestar del individuo más pobre.

Tabla 2.3 Indices de Gini del ingreso para una muestra de países del mundo. Fuente: Banco Mundial

País y año	Indice de Gini
Suecia (2015)	25.4
Bélgica (2015)	25.9
Reino Unido (2015)	32.4
Portugal (2015)	34.0
España (2015)	34.6
USA (2014)	46.4
México (2014)	48.9
Brasil (2014)	49.5

2.5 La contribución de Atkinson (1970)

En esta sección presentaremos la contribución de Atkinson, destacando la importancia e influencia que ha tenido en las investigaciones posteriores sobre desigualdad. El trabajo fue publicado en 1970 en el *Journal of Economic Theory*, y establece un marco teórico para la medición de la desigualdad y un desarrollo matemático que ha sido el origen de las posteriores metodologías utilizadas en este campo.

Los elementos del trabajo de Atkinson son: las funciones de bienestar (junto con la función de evaluación social), la función de distribución del ingreso, la curva de Lorenz asociada y los criterios de dominación estocástica asociados junto con el principio de transferencias.

Existen dos contribuciones principales en el trabajo de este autor. La primera de ellas establece una línea normativa, de modo que los juicios de la desigualdad se basan en las herramientas clásicas de la teoría del bienestar (Sen, 2001). El teorema básico de Atkinson establece que la ordenación de dos curvas de Lorenz puede interpretarse como una ordenación del bienestar de las distribuciones de ingreso, suponiendo un ingreso fijo, las mismas necesidades y otros supuestos sobre la función de bienestar, como la cuasi-concavidad.

La segunda contribución de Atkinson consiste en un procedimiento para convertir de modo unívoco las funciones de bienestar en medidas de desigualdad. Esta correspondencia sirve para definir nuevas medidas de desigualdad y para describir los juicios de valor implícitos en los indicadores de desigualdad utilizados.

Atkinson establece un paralelismo entre la comparación de distribuciones de ingreso y la teoría de decisión bajo incertidumbre, establecida por Hadar y Russell (1969). Según esta teoría, si queremos clasificar dos funciones de distribución correspondientes a dos carteras de valores, haremos uso de la aversión al riesgo y la dominación estocástica de segundo orden. En el mundo de la desigualdad, la aversión al riesgo se convierte en *aversión a la desigualdad*, para establecer la comparación entre las dos distribuciones de ingresos.

A continuación introducimos los principios de dominación estocástica utilizados en desigualdad. La variable aleatoria Y_1 domina a la variable aleatoria Y_2 según el principio estocástico de primer orden si

$$F_2(y) \geq F_1(y)$$

para todo valor de *y*, y con desigualdad estricta para algún valor de *y*. La dominación estocástica de segundo orden se cumple si

$$\int_0^y [F_2(t) - F_1(t)]dt \geq 0$$

y con la desigualdad estricta para algún valor de *y*. La dominación estocástica de primer orden implica la de segundo orden. Si las dos variables tienen la misma media, y la variable Y_1 domina a Y_2 según el principio de segundo orden, entonces Y_1 presenta mayor concentración que Y_2 respecto la media. Indicar que existe un tercer orden de dominación estocástica, para ordenaciones en el caso que las curvas de Lorenz se corten en *m* puntos.

El siguiente paso consiste en especificar la clase de funciones de bienestar aditivas, definidas como

$$W(Y) = \int_0^\infty U(y)dF_Y(y)$$

donde $U'(y) > 0$ y $U''(y) \leq 0$, es decir, se trata de una función creciente y (cuasi) cóncava. La función $U(\cdot)$ puede ser vista como una función de evaluación social, no necesariamente correspondiente a una función de utilidad individual. Al ser la función $U(\cdot)$ cóncava, significa que la función $W(y)$ satisface el principio de *aversión a la desigualdad*. Si $U(0) = 0$ y $U'(z) = k$, entonces $W(Y) = E(Y)$, y por tanto el bienestar social coincide con la renta per cápita, lo que supone indiferencia a la desigualdad.

El Teorema establecido por Atkinson es el siguiente.

Teorema. Si F_1 (y) y F_2 (y) son dos funciones de distribución de ingresos de tipo continuo con la misma media, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $W(Y_1) \geq W(Y_2)$, para toda función $U(y)$ tal que $U'(y) > 0$ y $U''(y) \leq 0$.

(ii) F_2 (y) se puede obtenerse desde F_1 (y) por medio de una serie de transferencias regresivas.

(iii) F_1 (y) domina a F_2 (y) según la dominación estocástica de segundo orden.

(iv) Las curvas de Lorenz cumplen L_1 $(p) \geq L_2$ (p), para todo $p \in [0,1]$.

En relación a la segunda de las aportaciones, y para la obtención del correspondiente índice de desigualdad, consideremos la función de bienestar $W(X)$. A continuación, se busca el denominado: "*ingreso equivalente igualitariamente distribuido*", que es el ingreso per capita, de modo que si lo tuvieran todos los individuos de la población proporcionaría el mismo bienestar a toda la sociedad. Por tanto, dicho ingreso verifica que,

$$W(X_e) = W(X)$$

y para el cálculo del índice tenemos la relación:

$$I(X) = 1 - \frac{X_e}{\mu_X}$$

Finalmente, si imponemos la condición de invarianza de escala en la función de bienestar, llegamos a que el ingreso equivalente igualitariamente distribuido lo podemos calcular como

$$X_e = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\varepsilon} \right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

y por tanto,

$$I_\varepsilon(X) = 1 - \frac{1}{\mu_X}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

si ε ≠ 1 y

$$I_1(X) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu_X}\right)^{1/n}$$

para el caso ε =1. De este modo, si el valor del índice fuese igual a 0,25 significaría que el 75 por ciento del valor total de la renta sería necesario para alcanzar el mismo valor de bienestar, si los ingresos estuviesen igualmente distribuidos. Los índices de desigualdad anteriores reciben el nombre de índices de *desigualdad de Atkinson*.

Los índices de Atkinson presentan claramente un carácter normativo, de modo que al asignar diversos valores al parámetro ε, ponderamos de forma diferente a las diversas partes de la distribución de los ingresos. El parámetro ε mide por tanto el nivel de aversión a la desigualdad. Cuando ε aumenta, asignamos más peso a las transferencias en la parte baja de la distribución y menos peso a las transferencias en la parte alta. El caso límite cuando $\varepsilon \to \infty$ da lugar al mínimo de los ingresos, que sólo tiene en cuenta las transferencias en la parte baja de la distribución (criterios de Rawls). Si ε es igual a cero, obtenemos una función de utilidad lineal que ordena las distribuciones según la renta total (Atkinson, 1970).

El resultado de Atkinson fue inmediatamente reconocido en el ámbito académico, y fue uno de los elementos básicos del libro del premio Nobel de Economía Amartya Sen publicado en 1973 y dedicado a los principios de la desigualdad económica.

Posteriormente, Dasgupta, Sen y Starrett (1973) generalizaron el resultado de Atkinson, probando que la función *W*(*y*) no tenía que ser necesariamente aditiva, y que la concavidad de *U*(*y*) podía ser relajada.

Las medidas de desigualdad consideradas por Atkinson, y muchas de las medidas usadas en la práctica, son de tipo relativo, es decir, se trata de medidas normalizadas por la media. Sin embargo, si queremos establecer medidas de bienestar referidas a una sociedad, tendremos que considerar medidas de carácter absoluto. Se define entonces la curva de Lorenz generalizada como (Shorrocks, 1983)

$$GL_X(p) = \mu_X L_X(p) = \int_0^p F_X^{-1}(u)du$$

donde $GL_X(0) = 0$ y $GL_X(1) = \mu_X$. Si se produce dominación en estas curvas se produce un mayor bienestar en la sociedad, entendido como renta media.

Atkinson (1970) estableció un primer resultado haciendo uso de la media de la distribución de renta. Posteriormente Shorrocks (1983), siguiendo las ideas de Atkinson fue más allá y relacionó las curvas de Lorenz generalizadas con las funciones de bienestar y los principios de dominación estocástica.

Teorema. Si F_1 (y) y F_2 (y) son dos funciones de distribución de ingresos de tipo continuo (con medias iguales o distintas), las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $W(Y_1) \geq W(Y_2)$, para toda función U(y) tal que $U'(y) > 0$ y $U''(y) \leq 0$.

(ii) F_1 (y) domina a $F_2(y)$ según la dominación estocástica de segundo orden.

(iii) Las curvas de Lorenz generalizadas cumplen $GL_1(p) \geq GL_2(p)$, para todo $p \in [0,1]$.

A la hora de comparar dos curvas de Lorenz se suelen producir cruces (especialmente en los extremos), y esto da lugar a que no se puedan establecer comparaciones sin ambigüedad. En comparaciones internacionales de distribuciones de ingreso esta situación es habitual, especialmente entre países con diferentes niveles de desarrollo. Shorrocks y Foster (1987) documentaron que únicamente un 24 por ciento de comparaciones eran posibles con el orden de Lorenz usando datos de Kuznets, si bien en algunas situaciones este porcentaje puede ser superior. Sin embargo, comparaciones usando la curva de Lorenz generalizada dan lugar a porcentajes de ordenación muy superiores (Bishop, Formby y Thistle, 1991; Sarabia y Pascual, 2001).

2.6 Los axiomas de la desigualdad

Otro planteamiento alternativo para la medición y obtención de medidas de desigualdad es el basado en *axiomas*. Un axioma o principio de desigualdad es una propiedad básica que debería de verificar cualquier medida de desigualdad, tal como vimos para el caso del principio de transferencias de Pigou-Dalton. Pasamos a enumerar los principios básicos de desigualdad.

- *Principio de transferencias de Pigou-Dalton*. Este principio establece que si se realiza una transferencia de renta de un individuo más pobre a otro más rico, la desigualdad debe aumentar, mientras que si la transferencia se realiza de uno más rico a uno más pobre, la desigualdad debe disminuir, siempre que no cambie la ordenación entre los individuos.

- *Independencia de escala*. Si se multiplican todos los ingresos por un mismo valor, el índice de desigualdad no debe cambiar.

- *Principio de población*. Este principio establece que la distribución de la renta total no debería depender del número de individuos a repartir. Es decir, si medimos la desigualdad en un conjunto con n personas, y se une a la población un segundo grupo de n con la idéntica distribución de la renta, entonces la medida de desigualdad no debería cambiar.

- *Principio de anonimato*. Si se produce una reordenación en la distribución de la renta, el valor del índice se debería de mantener.

- *Descomponibilidad por grupos de población*. La propiedad de descomponibilidad por grupos de población establece que si la población puede dividirse en k subpoblaciones en proporciones π_i,, entonces la desigualdad total se puede escribir como,

$$I(X) = H(I_1, \dots, I_k; \mu_1, \dots, \mu_k, \pi_1, \dots, \pi_k)$$

donde H es una función creciente en los primeros k argumentos, I_i son los índices de desigualdad de cada subpoblación y μ_i representan las medias de las subpoblaciones, con $i = 1,2 \dots, k$.

Estos cinco principios básicos los debería de cumplir, en principio, toda medida de desigualdad. El índice de Gini verifica los cuatro primeros. Sin embargo, la desviación típica no verifica el principio de independencia de escala. Ocurre lo mismo con el índice de desigualdad de Dalton,

$$D_\varepsilon(X) = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{1-\varepsilon} - 1\right)}{\bar{x}^{1-\varepsilon} - 1}$$

que tampoco verifica dicho principio. Si consideramos el índice de Dalton escrito de una manera genérica en términos de la función de utilidad,

$$D_U(X) = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(x_i)}{U(\bar{x})}$$

cumpliría este principio para determinadas elecciones de $U(x)$.

2.7 Modelización mediante funciones de distribución

La modelización de las distribuciones de renta y riqueza mediante formas funcionales de tipo paramétrico, es un procedimiento de uso habitual en el análisis de la desigualdad. La idea de una forma funcional paramétrica es resumir toda la información sobre los datos de ingreso en una función sencilla, que dependa de unos pocos parámetros. Una forma funcional paramétrica se puede especificar mediante diversas funciones de carácter probabilístico: funciones de distribución y de densidad, función de azar, función de elasticidad del ingreso, curva de Lorenz, etc. En esta sección nos centraremos en las funciones de densidad y de distribución.

Estudiaremos a continuación tres de las formas funcionales más utilizadas definidas por medio de dos parámetros. Se trata de las distribuciones de Pareto, lognormal y gamma. A continuación veremos algunas extensiones importantes propuestas en la literatura.

2.7.1 Distribución de Pareto o ley de potencias

La distribución de Pareto o ley de potencias, fue propuesta por el economista Vilfredo Pareto en 1896, cuando era profesor en la Universidad de Lausanne.

Esta distribución tiene su origen en las investigaciones de Pareto relativas a la distribución de la tierra en Italia. Pareto observó que el 80 por ciento de la tierra en Italia pertenecía al 20 por ciento de la población. Esta regularidad la observó en otros países, y le llevó a enunciar el conocido como principio de Pareto o ley 80-20. Este principio de Pareto, también llamado ley de escasez del factor, establece que en muchas ocasiones, el 80 por ciento de los efectos proceden de un 20 por ciento de las causas. Esto supondría que por ejemplo en un negocio, el 80 del total de ventas proceden del 20 por ciento de los clientes. Un estudio detallado de la distribución de Pareto y de sus extensiones se encuentra en Arnold (2015).

La función de distribución de la ley de Pareto viene dada por,

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\alpha}, \qquad x \geq \sigma > 0$$

donde σ representa el ingreso mínimo y α el parámetro de forma de la distribución, también conocido como exponente de Pareto. El índice de Gini viene dado por,

$$G(\alpha) = \frac{1}{2\alpha - 1}, \qquad \alpha > 1$$

que no depende del parámetro σ, al tratarse de un parámetro de escala. La función de cuantiles es,

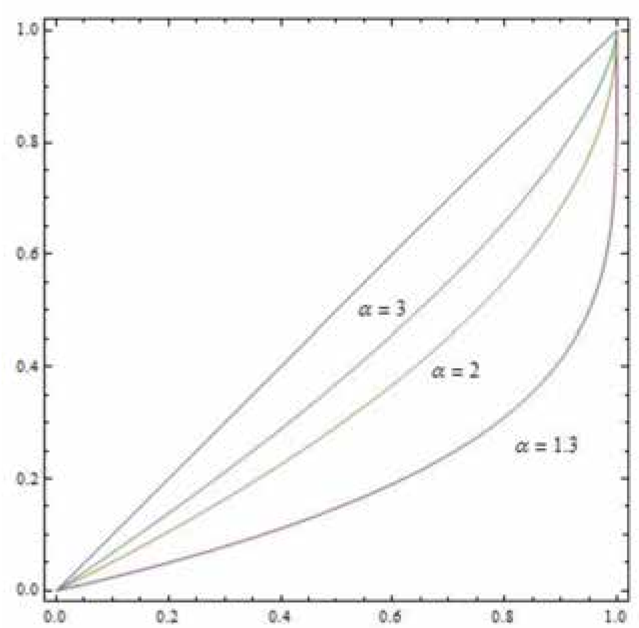
$$X(p) = \sigma(1-p)^{-1/\alpha}, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

mientras que la curva de Lorenz es,

$$L(p) = 1 - (1-p)^{1-\frac{1}{\alpha}}, \qquad 0 \le p \le 1.$$

Las curvas de Lorenz de la distribución de Pareto tienen la propiedad de que no se cortan, y por tanto se pueden establecer rankings de distribuciones sin ambigüedad. Esto significa que el orden de Lorenz es en este caso un orden completo. La Figura 2.3 presenta algunas curvas de Lorenz para la distribución de Pareto.

Figura 2.3: Curvas de Lorenz de la distribución de Pareto para una selección de valores del parámetro α.



La ley de Pareto se denomina también "ley de potencias", puesto que la función de supervivencia se puede representar mediante una potencia con exponente negativo. La distribución de Pareto presenta diversas ventajas prácticas. Por ejemplo, tenemos que

$$\log(1 - F(x)) = \alpha \log \sigma - \alpha \log x$$

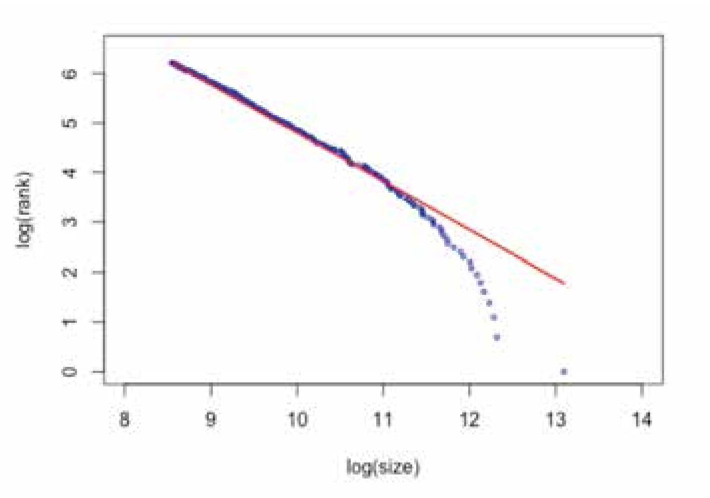
que da lugar a linealidad en escala log-log entre la función de supervivencia y los datos. Esta propiedad se puede usar como un contraste de bondad de ajuste para las leyes de potencias.

Si en la fórmula general hacemos $\alpha = 1$, obtenemos la llamada *ley de Zipf*, o *distribución tamaño-rango*, que ha despertado gran interés en geografía, economía regional y urbana, econofísica, infometría, etc. La ley de Zipf establece que

$$\Pr(X > x) = \frac{\sigma}{x}, \qquad x > \sigma$$

y por tanto tenemos una fórmula simple de proporcionalidad entre probabilidades según tamaño. La ley de Zipf se puede contrastar de forma gráfica mediante la transformación tamaño-rango ($\log x, \log(1 - F(x))$), de modo que si los datos se adecúan a esta ley, se situarán aproximadamente sobre una línea recta de pendiente -1. Si la pendiente de la recta es diferente de -1, entonces los datos se adecuarán a una ley de potencias, según la fórmula vista más arriba. La Figura 2.4 presenta los datos de Forbes para las 500 mayores fortunas a nivel mundial. Se observa una adecuación a una ley de potencias en la mayor parte del rango, con desviaciones en las mayores fortunas.

Figura 2.4 Diagrama tamaño-rango para los datos de Forbes de las 500 mayores fortunas mundiales (rank en el rango y size el tamaño).



2.7.2 La distribución lognormal

La distribución lognormal es una de las distribuciones más utilizadas para modelizar datos de ingresos y riqueza. Dicha distribución viene originada por la conocida como ley de Gibrat o ley de los efectos proporcionales, que establece que en determinado sectores de la economía, la tasa de crecimiento de una empresa es independiente de su tamaño. La distribución lognormal tiene otros orígenes. En primer lugar, se puede obtener como límite del producto de un número grande de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, es decir, por medio de la versión multiplicativa del *teorema central del límite*. Por otro lado, se puede obtener mediante el criterio de máxima entropía, suponiendo conocida la media y la varianza del logaritmo de la variable.

La función de densidad de la distribución lognormal es,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \qquad x > 0$$

que depende de dos parámetros, μ que es un parámetro de escala y σ de forma.

Una de las ventajas de esta distribución es que muchas de sus propiedades se pueden obtener de forma analítica. La función de cuantiles viene dada por la expresión,

$$X(p) = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(p)), \qquad 0 \leq \mathrm{p} \leq 1$$

mientras que la curva de Lorenz es,

$$L(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) - \sigma), \qquad 0 \leq p \leq 1$$

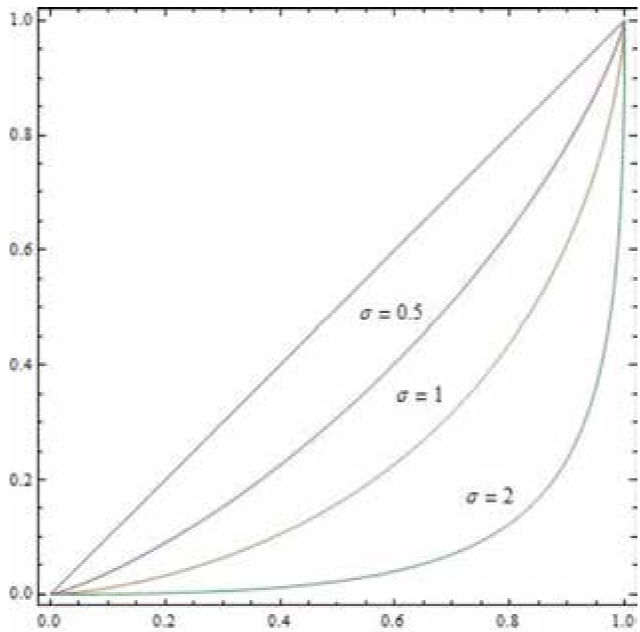
donde Φ (z) representa la función de distribución de la distribución normal estandarizada. La Figura 2.5 presenta curvas de Lorenz de la distribución lognormal, para una selección de valores del parámetro σ.

El índice de Gini es,

$$G(\sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1$$

La distribución lognormal tiene una relación muy sencilla con la distribución normal. Las curvas de Lorenz, al igual que en caso de Pareto, no se cortan, por lo que el orden de Lorenz es un orden completo y es posible establecer rankings entre distribuciones sin ambigüedad.

Figura 2.5: Curvas de Lorenz de la distribución lognormal para una selección de valores del parámetro σ.



2.7.3 La distribución gamma

La distribución gamma viene definida en términos de la función de densidad como

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\lambda}}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \qquad x > 0.$$

El parámetro λ es un parámetro de escala, mientras que α es un parámetro de forma. El uso de tal distribución en el contexto del análisis de desigualdad ha sido establecido por Salem y Mouth (1974). Si hacemos α=1 en la función de densidad gamma, obtenemos la distribución exponencial, cuya función de densidad es,

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-x/\lambda}}{\lambda}, \qquad x > 0$$

La distribución exponencial ha sido utilizada por algunos autores para la modelización de un tramo de la distribución de datos de ingreso y riqueza.

2.7.4 Otras familias de distribuciones de ingresos

Las propuestas anteriores se pueden englobar en la llamada *familia generalizada de distribuciones de ingreso*, propuesta por James B. McDonald y publicada en la revista *Econometrica* en 1984 (McDonald, 1984). Dicha familia engloba tres tipos de distribuciones: la distribución gamma generalizada (que incluye a las distribuciones exponencial y gamma), la distribución generalizada beta de primera especie (que tiene soporte acotado y que incluye a la distribución beta clásica) y la distribución generalizada beta de segunda especie (que incluye a las distribución de Pareto y lognormal, esta última como caso límite). Estas tres familias se conocen con las siglas GG, GB1 y GB2, respectivamente. La subfamilia GB2 engloba la mayor parte de las distribuciones utilizadas en el estudio de renta y riqueza. Las diferentes familias de distribuciones que componen la GB2 forman un árbol de distribuciones anidadas, con cuatro, tres y dos parámetros. Esto permite estudiar la adecuación muestral de los diferentes modelos mediante contrastes de hipótesis, y elegir la distribución de ingresos óptima que más se adecúa a los datos.

2.7.5 Sobre la elección de la forma funcional

Según hemos visto, disponemos de diversas propuestas de familias para modelizar datos de ingreso. La elección de una de estas formas funcionales depende de la definición de ingreso que estemos utilizando, así como de la parte de la distribución en la que estemos interesados trabajar.

Nos fijaremos en las tres distribuciones de dos parámetros vistas en la sección anterior. De este modo, la distribución de Pareto resulta adecuada para modelizar la parte alta de la distribución de ingresos. Por otro lado, la distribución lognormal es adecuada para ingresos individuales de carácter homogéneo. Dicha distribución se ajusta correctamente en otros contextos, tales como la distribución del tamaño de las empresas, la distribución del tamaño de las ciudades, etc. Finalmente, la distribución gamma y el submodelo exponencial, describen correctamente datos en la parte central de la distribución.

2.8 Modelización de la desigualdad mediante curvas de Lorenz

El Teorema de Atkinson (1970) abre el camino a la utilización de la curva de Lorenz como instrumento de comparación de distribuciones de renta y de riqueza. Dado que existe una relación uno a uno (salvo un factor de escala determinado a partir de la renta media) entre funciones de distribución y curvas de Lorenz, podemos especificar la distribución subyacente del ingreso por medio de una curva de Lorenz de carácter paramétrico. Una de las ventajas de este tipo de especificación es que podemos obtener (para muchas distribuciones) las restricciones sobre los parámetros para que se verifique el orden de Lorenz, y por tanto para su contrastación empírica.

En este contexto, Kakwani y Podder (1973) propusieron la familia de curvas,

$$L(p;\alpha,\beta) = p^{\alpha} e^{-\beta(1-p)}, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

mientras que Rasche et al. (1980) la forma funcional

$$L(p;\alpha,\beta) = [1-(1-p)^{\alpha}]^{\beta}, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

Villaseñor y Arnold (1989) han establecido la clase de curvas elípticas definida por

$$L(p;a,b,d) = \frac{1}{2}\left[-(bp+e) - \sqrt{\alpha p^2 + \beta p + e^2}\right], 0 \leq p \leq 1$$

donde $\alpha = b^2 - 4a$, $\beta = 2be - 4d$, $e = -(a + b + d + 1)$ y se verifican las restricciones los parámetros,

$$\alpha < 0, e < 0, d \geq 0, a + d \geq 1$$

Esta familia es muy flexible y el modo de estimarla es directo por medio de regresión, haciendo uso de la relación existente entre abscisas y ordenadas en una elipse. El índice de Gini junto con otras medidas de desigualdad y pobreza pueden ser obtenidas de forma analítica. La familia ha sido usada e implementada por investigadores del Banco Mundial para la estimación de índices de desigualdad y de pobreza.

Sarabia, Castillo y Slottje (1999) han propuesto una familia jerárquica y ordenada de curvas de Lorenz, que unifica y amplía muchas de las propuestas existentes. Si comenzamos por una curva inicial $L_0(p)$, podemos considerar la familia jerárquica de curvas,

$$L_1(p;\alpha) = p^{\alpha} L_0(p), \qquad 0 \leq p \leq 1$$

$$L_2(p;\beta) = [L_0(p)]^{\beta}, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

$$L_3(p;\alpha,\beta) = p^{\alpha}[L_0(p)]^{\beta}, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

donde los parámetros verifican ciertas restricciones. Una de las ventajas de esta familia es que sus componentes se pueden ordenar fácilmente en términos de uno de los parámetros, de modo que, por ejemplo

$$L_1(p;\alpha_1) \geq L_1(p;\alpha_2) \ \ si \ \ \alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$$

En el trabajo antes citado se propone un procedimiento de estimación basado en los puntos de la curva de Lorenz empírica. Los errores estándar de los parámetros se pueden obtener fácilmente mediante técnicas bootstrap. Un ejemplo de la metodología anterior lo constituye la familia de curvas de Lorenz de Pareto, que aparece descrita y estudiada en Sarabia, Castillo y Slottje (1999). Otras propuestas de formas paramétricas se encuentran en Sarabia (1997) y Sarabia, Castillo y Slottje (2001).

2.9 Medidas de desigualdad

Además del índice de Gini y de las medidas basadas en cociente de cuantiles, el catálogo de medidas de desigualdad es amplio. Sen (1973) clasificó las medidas de desigualdad en normativas y positivas, dependiendo que empleasen o no algún concepto de bienestar social en su definición, si bien esta clasificación de medidas no es estricta. De este modo, Sen estudió en detalle las siguientes medidas de desigualdad: el rango o campo de variación, la varianza y el coeficiente de variación, la desviación típica de los logaritmos, el índice de Gini, el índice de Theil, y los índices de Dalton y de Atkinson. Posteriormente, estableció una detallada interpretación de estas medidas en términos del bienestar. Un estudio detallado de diversas medidas de desigualdad junto con sus propiedades exactas y asintóticas (es decir, cuando el tamaño de muestra tiende a infinito) puede encontrarse en Arnold (2015) y Arnold y Sarabia (2018).

2.9.1 Medidas de desigualdad obtenidas a partir de la curva de Lorenz

En este apartado discutiremos dos medidas de desigualdad obtenidas a partir de la curva de Lorenz y congruentes con el orden de Lorenz.

El índice de Pietra se define como la máxima distancia vertical entre la curva de Lorenz y la recta de equidistribución,

$$P(X) = máx_{0 \le p \le 1}\{p - L_X(p)\}$$

Este índice ha recibido diversos nombres en la literatura, tales como índice de Robin Hood, de Hoover, de Schutz, de Ricci y de Lindahl.

Otra forma alternativa de escribir el índice de Pietra es:

$$P(X) = \frac{E|X - \mu_X|}{2\mu_X} = E\left[g_P\left(\frac{X}{\mu_X}\right)\right]$$

donde $g_P(x) = \frac{1}{2}|x - 1|$, que es una función continua y convexa, y por tanto se trata de un índice congruente con la ordenación de Lorenz. A partir de una muestra de datos de ingreso, dicho índice se puede obtener como

$$P_n(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Sarabia y Jordá (2014b) han obtenido expresiones analíticas de este índice para las familias más importantes de distribuciones de renta y riqueza.

Otro índice definido a partir de la curva de Lorenz y congruente con el orden inducido, es el índice de Amato. Dicho índice viene definido como la longitud de la curva de Lorenz. Su expresión analítica es,

$$A(X) = \int_0^1 \sqrt{1 + L_X'(p)}dp$$

donde $L_X(p)$ es la curva de Lorenz de la variable aleatoria de ingreso X. El índice de Amato se puede escribir como (Arnold, 2012)

$$A(X) = E\left[\sqrt{1 + (X/\mu_X)^2}\right]$$

que nuevamente es la media de una función convexa. La versión muestral del índice de Amato es,

$$A_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{X_i}{\bar{X}}\right)^2}$$

lo que permite su cálculo de una forma sencilla a partir de una muestra de datos de ingreso.

2.9.2 Indices de Entropía Generalizada e Indices de Theil

En esta sección estudiaremos los llamados índices de entropía generalizada y los índices de Theil, que son casos particulares de los índices de entropía.

La idea de Theil era desarrollar una fundamentación teórica para las medidas de desigualdad a partir de las medidas de información. En primer término necesitaba especificar una función $h(x)$ que evaluara un suceso a partir de sus probabilidades asociadas. A dicha función impuso tres axiomas heredados de la teoría de la información (Theil, 1967; Cowell, 2006):

1. Evaluación cero de la certidumbre $h(1)=0$:

2. Evaluación decreciente de probabilidades. Si $p_1 > p_2$ entonces $h(p_1) < h(p_2)$:

3. Aditividad en sucesos independientes: $h(p_1 p_2) = h(p_1) + h(p_2)$.

La única función continua que verifica estos axiomas es $h(p) = -\log p$. A continuación, las propuestas de los índices de desigualdad de Theil se basan en la proporción de renta, para finalmente obtener dos medidas:

$$T_0(X) = G_0(X) = -E\left[\log\left(\frac{X}{\mu}\right)\right]$$

también llamada MLD (siglas en inglés de *Mean Logarithmic Deviation*), junto con la medida,

$$T_1(X) = G_1(X) = E\left[\frac{X}{\mu}\log\left(\frac{X}{\mu}\right)\right]$$

Los dos índices previos de desigualdad son casos particulares de la clase de medidas de entropía generalizada que viene definida por,

$$G_\theta(X) = \frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[E\left(\frac{X}{\mu}\right)^\theta - 1\right], \qquad \theta \neq 0{,}1$$

Si tomamos el límite cuando θ tiende a cero en la expresión anterior, obtenemos el índice MLD y para el caso de que θ tienda a 1, obtenemos el segundo de los índices propuestos por Theil. El parámetro θ controla el peso de las colas, de modo que si $\theta > 0$ se da más peso a la cola superior y si $\theta < 0$ a la cola inferior.

La principal ventaja de los índices de Theil y de entropía generalizada es que se pueden descomponer a partir de subgrupos de población. Es decir, si un país está formado por dos regiones, norte y sur, entonces a partir de los índices de Theil (y de entropía) de las regiones norte y sur, podemos conocer el índice de desigualdad global del país. La descomposición de los índices es muy simple, y se puede interpretar en términos de desigualdad dentro de los grupos (*within groups*) y desigualdad entre grupos (*between groups*).

El siguiente resultado caracteriza a los índices de entropía generalizada en términos de axiomas (Shorrocks, 1984).

Teorema. *Cualquier medida de desigualdad que verifique simultáneamente los axiomas de:*

- *Principio de transferencias*
- *Principio de población*
- *Independencia de escala*
- *Descomponibilidad aditiva por grupos de población*

debe ser de la forma $G_\theta(X)$ *o de alguna transformación ordinalmente equivalente a* $G_\theta(X)$*, donde es un* θ *parámetro real.*

Veamos ahora cómo se hace explícita la descomposición. Supongamos que la población (país, región o cualquier variable de clase o categórica) está subdividida en k regiones, con pesos p_1, de modo que,

$$F_X(x) = p_1F_1(x) + \cdots + p_kF_k(x)$$

donde $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, y $E(X_i) = \mu_i$. Entonces, el índice $T_1(X)$ de Theil se puede escribir como,

$$T_1(X) = \sum_{j=1}^{k} s_j T_1(X_j) + \sum_{j=1}^{k} s_j \log\left(\frac{s_j}{p_j}\right)$$

donde $s_j = p_j\ \mu_j/\mu$, son las proporciones de renta de cada subpoblación. Esta descomposición se puede interpretar y utilizar en los dos sentidos, es decir, a partir de la desigualdad en regiones podemos construir la desigualdad total, y la desigualdad total la podemos descomponer en los componentes de desigualdad referidos a las regiones.

El resultado es igualmente válido (con diferentes pesos) para los dos índices de Theil y en general para el índice de entropía generalizado.

Habitualmente, podemos trabajar con la definición empírica de los índices de entropía, sin hacer uso de hipótesis acerca de la población subyacente. Sin embargo, si conocemos la distribución de la población de ingresos (haciendo uso de algunas de las familias que hemos visto anteriormente), podemos estimar igualmente la desigualdad. Una ventaja de este último método consiste en poder estimar los índices de entropía de las regiones por medio de información parcial o limitada.

2.9.3 Estimación de la renta mundial con información limitada

La siguiente sección presenta una aplicación empírica de los índices de entropía generalizada.

Una de las principales ventajas de los índices de entropía generalizada y de Theil es que permiten obtener la desigualdad de un país a partir de la de sus regiones, con una mínima información. Esta propiedad se puede aplicar para estimar la distribución de la renta mundial a partir de la renta de las regiones del mundo.

Esta metodología se puede aplicar usando datos del índice de Gini y del PIB per cápita por países y se basa en los trabajos de Jordá, Sarabia y Prieto (2014) y Sarabia, Jordá y Trueba (2017).

En una primera etapa se estiman las distribuciones de renta de los países con un modelo de dos parámetros. Dicho modelo corresponde a la clase de distribuciones de Lamé (Sarabia, Jordá y Trueba, 2017) que incluyen parámetros de escala y forma. La distribución permite ajustar datos cero modales y unimodales y se obtiene mediante un modelo económico sencillo. La distribución se relaciona con modelos de ingresos habitualmente usadas en la literatura económica, como son las distribuciones de Singh-Maddala y de Dagum, que son casos particulares de la distribución GB2.

A continuación y en una segunda etapa se estima la distribución de la correspondiente región y la distribución a nivel mundial. Para ello se hace uso de una mezcla finita de distribuciones, donde los pesos vienen dados por las proporciones de población de cada país o región. Las fuentes de datos se obtienen en las cuentas nacionales de cada país (PIB per cápita) en paridad de poder adquisitivo y el índice de Gini se obtiene por medio de la base de datos World Income Inequality Database (WIID), pero estandarizada (Solt, 2006). Se trabaja con 127 países, que supone el 93 por ciento de la población mundial en 1990, 1995 y 2000. Las regiones del mundo consideradas son: Asia oriental y Pacífico, Latino América y Caribe, Sudeste de Asia, Europa occidental norte América y Oceanía, Africa Sub-Sahariana y Europa oriental y Asia central. El modelo se valida mediante la comparación con otras distribuciones de similares características. La precisión de los modelos se realiza mediante procedimientos "scoring" (Klugman, Panjer y Willmot, 2012).

Las principales conclusiones son las siguientes (Jordá, Sarabia y Prieto, 2014): se aprecia una reducción de la desigualdad entre países derivada de la convergencia en el ingreso experimentado por algunos de los países más poblados como India y China, que presentaron un crecimiento asombroso de su PIB per cápita durante el período de estudio. Sin embargo, la desigualdad dentro de los países aumentó notablemente durante los años noventa, aunque no lo suficiente como para eclipsar la mejora en las disparidades entre países. En consecuencia, se sugiere una reducción en la desigualdad global. Sin embargo, los patrones globales no se pueden extrapolar a todas las regiones que se caracterizan por una combinación de experiencias.

2.9.4 Nuevas medidas de desigualdad: el índice de Palma

El índice de Palma es una medida de desigualdad propuesta recientemente por el economista chileno Gabriel Palma (Palma, 2011), y que ha llamado la atención del mundo académico. Dicha medida viene definida por medio del cociente de los ingresos acumulados por el 10 por ciento más rico de la población y el 40 por ciento más pobre.

La elección de estos porcentajes de comparación se debe a que, según las estimaciones de Palma, entre los deciles 5 y 9 del ingreso se encuentra aproximadamente la mitad del ingreso total. Esta regularidad observada por Palma se da, según sus investigaciones, en una gran variedad de países y circunstancias: en países pobres o ricos, grandes o pequeños, dictaduras o democracias, con recursos naturales o sin ellos, etc.

El índice de Palma es una propuesta bien reciente, que recoge aspectos importantes de la desigualdad. Es pronto para decidir su aplicabilidad como medida estándar de desigualdad.

2.10 Medición de la desigualdad categórica

En este último apartado hablaremos sobre la medición de la desigualdad en variables de tipo categórico. Se trata de una línea de investigación muy reciente, donde se están produciendo importantes avances.

En la actualidad, hay un acuerdo en que el bienestar de una sociedad debe tener en cuenta diversas dimensiones, en las que se incluye la renta, educación, salud y el nivel de felicidad. El considerar medidas cardinales para la salud y la felicidad es difícil y controvertido. Sin embargo, no es complicado el considerar estas dos variables como variables ordinales, puesto que habitualmente se miden en una escala de esta naturaleza. Por otro lado, si queremos realizar comparaciones entre países y regiones en términos de estas dos variables, necesitamos comparar las diferentes categorías, y podemos hacer uso de las dominaciones estocásticas de primer y segundo orden.

Vamos a comenzar considerando variables categóricas de carácter nominal, es decir, variables donde no existe una ordenación entre las diferentes categorías. Disponemos entonces de k categorías $C_1,\dots,C_k$ con probabilidades $p_1,\dots,p_k$. El considerar los diferentes momentos, tanto centrales como no centrales, no tiene significado en variables de tipo categórico. Una medida de variabilidad para este tipo de variables viene definida por,

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i(1-p_i) = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i^2$$

La variación mínima se produce cuando alguna de las probabilidades es 1, y la máxima cuando p_i=1/k , con un valor de V(X) igual a (k-1)/k. Esta medida de concentración fue propuesta por Gini (1912) y usada por Goodman y Kruskal (1954). Otras dos medidas de concentración son:

$$V_1(X) = 1 - máx_i\{p_i\}$$

y

$$V_2(X) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i$$

Estas tres medidas poseen la propiedad de ser Schur-cóncavas, y por tanto preservan el orden de mayorización, que es equivalente al orden de Lorenz en el caso de que las distribuciones a comparar tengan la misma dimensión (Marshall, Olkin y Arnold, 2011).

Las medidas anteriores no caracterizan una distribución categórica, en el sentido que pueden tomar el mismo valor para dos variables de tipo categórico con diferentes distribuciones de probabilidad (Biswas y Mandal, 2010). Para evitar este inconveniente, Biswas y Mandal (2010) definen las medidas de variabilidad,

$$V_3(X) = \sum_{i \neq j} p_i p_j (1 - p_i - p_j)$$

y

$$V_4(X) = \sum_{i \neq j} \sum_{r \neq i,j} p_i p_j p_r (1 - p_i - p_j - p_r)$$

que pueden usarse como medidas alternativas de concentración.

Las siguientes medidas que se presentan a continuación se usan en el caso de variables categóricas de tipo ordinal. Abul Naga y Yalcin (2008) han desarrollado un índice de desigualdad basado en los axiomas de continuidad, invarianza de escala, normalización y aversión a desigualdad extrema en el sentido de Allison y Foster (2004). Esta medida viene dada por

$$I_X(\alpha,\beta) = \frac{\sum_{j<m}[F_X(j)]^\alpha - \sum_{j\geq m}[F_X(j)]^\beta + (k+1-m)}{(m-1)(0.5)^\alpha - (1+(k-m)(0.5)^\beta) + (k+1-m)}$$

donde m es el índice que define la mediana, $F_X(x)$ es la función de distribución de la variable y los parámetros α y β reflejan los juicios de la sociedad a la hora de valorar la desigualdad. Por ejemplo, si β es fijo y α tiende a infinito, se asigna menos peso a la desigualdad por debajo de la mediana. La elección de estos dos parámetros puede reflejar una amplia variedad de juicios sobre la desigualdad. Jordá, López-Noval y Sarabia (2018) han probado que, dependiendo de las configuraciones de los parámetros α y β, el índice anterior puede medir desigualdad categórica o bien polaridad.

A partir de un planteamiento axiomático, Cowell y Flachaire (2017) obtienen clases de índices para variables nominales del tipo entropía generalizada.

Parte III: Econofísica e Indices Multidimensionales de Desigualdad

3.1 Introducción

En esta parte del discurso se habla de dos importantes campos de aplicación de la desigualdad económica, y tal como indiqué en la introducción, han sido y son parte de mi trabajo investigador. Se trata de la *econofísica* y de los *indicadores multidimensionales de desigualdad*, en los que se incluyen los zonoides de Lorenz.

3.2 Econofísica

3.2.1 Introducción a la Econofísica

El nombre de "econofísica" fue propuesto por el físico teórico Eugene Stanley y colegas en una conferencia científica celebrada en 1995 en Calcuta.

La palabra "econofísica" es un neologismo utilizado originalmente para describir la física de los sistemas complejos y las dinámicas no lineales dentro de los mercados financieros. La disponibilidad reciente de enormes volúmenes de datos financieros de alta frecuencia, permitió a la econofísica el estudio de nuevas propiedades y regularidades empíricas hasta ahora desconocidas. Las metodologías utilizadas en econofísica proceden tanto de las matemáticas como de la física estadística.

Podemos definir la econofísica como: "*una nueva disciplina científica de carácter interdisciplinar que ayuda a entender y resolver problemas planteados en economía, haciendo uso de herramientas y teorías desarrolladas en la física y las matemáticas*".

Desde sus orígenes la econofísica estuvo relacionada con los sistemas complejos y con la búsqueda de grandes fluctuaciones y sucesos extremos en series financieras por medio de las llamadas *leyes de potencia*. Con alguna excepción, las leyes de potencia tuvieron siempre en la economía clásica una consideración muy marginal, puesto que las principales hipótesis de muchos modelos económicos y econométricos hacen uso de la hipótesis de normalidad. Esto supone que, bajo dicha hipótesis de normalidad, las grandes desviaciones en los datos son casi imposibles. Sin embargo, la econofísica admite modelos y situaciones con grandes desviaciones (muy por encima de las 3 desviaciones típicas admitidas por el modelo normal de distribución) por medio de determinadas leyes de potencias. Este tipo de modelización permite la explicación de sucesos como los ocurridos en la crisis financiera de 1987, donde el índice Down Jones se desplomó hasta un 22 por ciento, o la más reciente crisis de 2008. En este contexto, las modelizaciones de dependencias financieras haciendo uso de cópulas normales, no tienen sentido.

Durante algún tiempo, y en sus orígenes, la econofísica se presentaba únicamente como una ciencia de carácter positivo que proporcionaba una mayor base empírica para el estudio de determinados patrones y fenómenos económicos que no habían sido estudiados hasta el momento en la economía convencional. Sin embargo, la econofísica es algo más profunda tanto en sus planteamientos como en sus metodologías.

La econofísica se acerca a la economía desde otro punto de vista, aprovechando los métodos de la física y de las matemáticas, y considerando un sistema económico como un *sistema adaptativo complejo*. De este modo, las economías son abiertas (lo que supone que existen relaciones entre toda la economía y su entorno), dinámicas (y por tanto evolucionan presentando una dinámica fuera del equilibrio que dependerá de las condiciones iniciales y de los hechos pasados, con un comportamiento no predecible a medio y largo plazo), donde la innovación es constante creándose nuevos mercados, tecnologías y nuevas instituciones y donde se muestran propiedades *emergentes* y fenómenos de *auto-organización* (Krugman, 1997b). Los agentes en econofísica se consideran *heterogéneos*.

Desde los inicios de los años 90, las principales aplicaciones de la econofísica se han centrado, entre otros, en los siguientes aspectos: el estudio de las regularidades y grandes fluctuaciones en datos financieros de alta frecuencia; el estudio de la distribución del tamaño de las ciudades; el análisis de las distribuciones de renta, riqueza, salarios y beneficios, junto con el estudio de la distribución del tamaño de las empresas y en los llamados modelos basados en agentes (Agent

Based Models). Otros campos relevantes de investigación lo constituyen la teoría de juegos dinámicos y las redes complejas (Pereira, da Silva y Pereira, 2017).

Continuaremos el discurso con algunos comentarios relativos al estudio de la distribución de renta y riqueza, la teoría de las leyes de potencia aplicadas a las fluctuaciones en los mercados financieros y otras aplicaciones entre las que se incluyen la distribución del tamaño de las ciudades.

3.2.2 ¿Cuál es la distribución de la renta y la riqueza?

La investigación sobre la distribución de la renta y la riqueza tiene una larga historia en economía. Un estudio detallado acerca de los modelos explicativos de las distribuciones de renta puede encontrarse en Cowell (2011) y Arnold (2015).

Los orígenes de esta investigación se centran en Pareto (1897), donde propone la distribución que lleva su nombre (es decir, una ley de potencias en el contexto de la econofísica), y que hemos comentado en la segunda parte de este discurso. Las contribuciones de Mandelbrot (1960) y del premio Nobel de economía Herbert A. Simon (1955) se mueven en este ámbito. Mandelbrot (1960) propuso que la ley de Pareto únicamente era válida en la parte alta de la distribución de ingresos. Simon (1955) propuso un modelo estocástico que explicaba distribuciones de frecuencias de carácter asimétrico, en una amplia variedad de contextos sociológicos, biológicos y económicos. En particular, este autor consideraba la distribución de la frecuencia de palabras en textos escritos en prosa, la distribución del tamaño de las ciudades, la distribución de géneros biológicos por el número de especies, la distribución del número de artículos publicados por científicos y la distribución de la renta. El modelo que finalmente obtuvo Simon es una variante de la distribución de Yule, cuyo comportamiento en la cola coincide con el modelo propuesto por Pareto. Otros modelos explicativos de la distribución de la renta y la riqueza han sido establecidos por Gibrat (1931), que mediante un proceso estocástico de carácter multiplicativo obtiene la distribución lognormal. Kalecki (1931) criticó el modelo lognormal, dado su carácter no estacionario, puesto que observó que su variabilidad no era constante y crecía con el tiempo. Parker (1999) obtuvo la distribución GB2 mediante un modelo neoclásico de optimización del comportamiento de la empresa, para de esta manera predecir la distribución del salario de los trabajadores.

A pesar de la disponibilidad de diversos modelos económicos, existen un número no muy extenso de trabajos empíricos con datos de renta y riqueza.

Estos aspectos han sido estudiados en econofísica, entre otros, por Yakovenko y sus coautores en una serie de trabajos tanto empíricos como teóricos. Los métodos usados por Yakovenko son diferentes de los habitualmente utilizados en economía.

En una primera aportación, y con datos de ingresos individuales de renta del Reino Unido y USA durante varios años (Dragulescu y Yakovenko, 2001), estos autores concluyen que aproximadamente los ingresos del 95 por ciento de la población se explican mediante una distribución de tipo exponencial. El resto del 5 por ciento de los ingresos más altos se aproximan correctamente mediante una ley de Pareto, es decir una ley de potencias. Estos modelos varían de un año a otro, pero la conclusión es la misma si los corregimos (es decir, cambiamos de escala), por medio de las temperaturas medias de cada año en el caso de Reino Unido, y las temperaturas anuales medias de cada estado en el caso de USA.

Con datos de riqueza Yakovenko obtiene conclusiones similares para el caso del Reino Unido. Indicar que la distribución de la riqueza no es tan fácil de medir y muchas veces no está disponible al nivel de desagregación deseado. En el caso del Reino Unido estos autores utilizaron los datos proporcionados por the Inland Revenue a partir de la información suministrada por las herencias con carácter fiscal.

En un trabajo posterior Banerjee, Yakovenko y Di Matteo (2006) obtuvieron conclusiones similares para datos de renta en Australia durante varios años, comparando en este caso las distribuciones exponencial, lognormal y gamma. El modelo exponencial explicaba la distribución de la renta del 98 por ciento del total de individuos, con una corrección para las rentas nulas, y haciendo uso de colas de Pareto. Estos autores señalan que dichas distribuciones pueden ser mejoradas con modelos de carácter más complejo como es el caso de la distribución beta generalizada de segunda especie GB2, ya comentada en la parte segunda del discurso. Sin embargo, esta clase de distribuciones complican el modelo en términos del número de parámetros, con una ganancia mínima en términos de los indicadores de la bondad de ajuste.

La teoría explicativa de los modelos de Yakovenko se basa en una analogía con la *física de la materia condensada*. La distribución exponencial, también conocida en física como *distribución de Boltzmann-Gibbs*, es típica de variables físicas de conservación como es el caso de la energía. Dragulescu y Yakovenko (2000) argumentan que el dinero en efectivo se conserva, y por tanto su distribución de probabilidad debe ser de tipo exponencial, según argumentos estándar de la física de la materia condensada. Este argumento no se aplica a la riqueza, que puede aumentar o disminuir por sí misma, mientras que el dinero sólo puede ser transferido de un agente a otro.

Los resultados de Yakovenko han tenido cierto impacto en el campo de la economía. La revista "*Science*" dedicó en el año 2014 un número especial a la desigualdad económica, donde se debatieron los diversos avances en este campo, y en particular en el tema de la distribución de la renta y la riqueza. Algunas de las opiniones recogidas en este número especial mostraban un cierto excepticismo respecto a los resultados obtenidos por Yakovenko.

3.2.3 Las leyes de potencia en los mercados financieros

El estudio de las grandes fluctuaciones de las variables financieras constituye uno de los principales campos de estudio de la econofísica, dentro de la dinámica de los mercados financieros vistos como sistemas dinámicos complejos.

Las leyes de potencia se ajustan de un modo razonable a los histogramas de importantes variables que definen los mercados financieros tales como las fluctuaciones de los precios de diversos productos financieros así como el volumen y número de transacciones financieras.

Una ley de potencias viene caracterizada por un exponente, y uno de los principales descubrimientos en econofísica es que dichos exponentes son bastantes similares tanto si consideramos diferentes tipos y tamaños de mercados, como si consideramos diferentes coyunturas económicas y aun considerando diferentes países. En este contexto, aparece la denominada *ley inversa del cubo*.

Representamos por p_t el precio de una acción en el momento t y por r_t el rendimiento de la acción entre t-Δt y t, es decir, $r_t = log\ p_t - log\ p_{t-\Delta t}$. De acuerdo con la ley de potencias, la probabilidad de que el rendimiento en valor absoluto tenga un valor por encima de x es,

$$P(|r_t| > x) \sim x^{-\xi_r}$$

donde $\xi_r \approx 3$. La ecuación anterior representa la ley inversa del cubo (Gabaix et al. 2003). Según las investigaciones de Gabaix et al. (2003), dicha ley es "universal" y se cumple para valores de la frecuencia del rendimiento entre un minuto y un mes, para diferentes tipos de acciones, periodos de tiempo e índices de mercado, admitiéndose variaciones de hasta 80 desviaciones típicas, lo que explica muchas de las grandes desviaciones ocurridas en las mayores crisis financieras.

Si ahora consideramos el volumen de transacciones en t, se cumple que,

$$P(V_t > x) \sim x^{-\xi_V}$$

con $\xi_V \approx 1.5$. Para el caso del número de transacciones tenemos,

$$P(N_t > x) \sim x^{-\xi_N}$$

siendo el valor del exponente $\xi_N \approx 3.4$. Finalmente, si consideramos los mayores agentes en los mercados financieros, los fondos de inversión, en cada año del período 1961-1999 y para la distribución del 10 por ciento de los mayores fondos el valor de mercado S verifica,

$$P(S > x) \sim x^{-\xi_S}$$

donde $\xi_S = 1.05 \pm 0.08$.

La Tabla 4.1 muestra algunas características universales de estos valores financieros. En el caso de los fondos de inversión (considerando el 10 por ciento de los más grandes) se observa un patrón de ley de Zipf, lo que lleva a una falta de regularidad en media, desviación típica e índice de Gini. En el caso de la distribución de los rendimientos (en valor absoluto) se cumple la ley inversa del cubo con un índice de Gini de 0.2 lo que parece mostrar una cierta igualdad entre los valores absolutos de los fondos. Se observa una mayor concentración en el caso del volumen de transacciones, con un valor del índice de Gini de 0.5.

Tabla 3.1: Características de variables financieras descritas por las leyes de potencia.

Variable	Exponente	Media/Escala	Desviación Típica	Indice de Gini
Rendimientos	3	1.5	0.9	0.20
Volumen de transacciones	1.5	3	No existe	0.50
Número de transacciones	3.4	1.4	0.6	0.17
Fondos de Inversión	1	No existe	No existe	No existe

Fuente: Gabaix et al. (2003) y elaboración propia.

3.2.4 Otras aplicaciones de la econofísica

La econofísica estudia regularidades empíricas en otros campos de la economía. Tal es el caso del estudio de la distribución del número de empresas por sectores, o la distribución del tamaño de las ciudades. Las ciudades se consideran en la actualidad como sistemas complejos y su tamaño, escala y forma son objeto de estudio en muchas disciplinas, incluidas geografía (Krugman, 1997a), economía urbana, demografía y econofísica. En el caso del tamaño de las ciudades, la ley de Zipf ha sido contrastada usando diferentes escalas y países. Sarabia y Prieto (2009) han propuesto un modelo descriptivo para la modelización del tamaño de las ciudades, con la ventaja de modelizar datos en todo el rango de la distribución y no únicamente en la parte alta de los datos. Esta nueva distribución, denomina Pareto estable positiva, incluye a la ley de Zipf como caso particular. La validez del modelo ha sido contrastada frente a otros modelos alternativos con datos de los municipios de España en el periodo comprendido entre 1998 y 2006.

Otras aplicaciones en econofísica y sistemas no lineales incluyen la distribución de la deuda a nivel municipal para el periodo 2008-2014 (Prieto y Sarabia, 2017) y la distribución de fallos en redes eléctricas, en el caso de energía no suministrada, pérdida total de potencia y tiempo de recuperación (Prieto, Sarabia y Sáez, 2014).

3.3 Indicadores multidimensionales de desigualdad

Los indicadores multidimensionales son mediciones económicas que se encuentran muy presentes en el discurso político y social actual y que ya forman parte de la cultura económica. Estos indicadores miden diversos aspectos económicos, como por ejemplo el bienestar o diversos aspectos de la pobreza y la exclusión social. El ejemplo más relevante de este tipo de indicadores lo constituye el IDH (junto con sus diversas variantes) elaborado por Naciones Unidas, a partir de la propuesta teórica de Amartya Sen sobre la teoría de las capacidades.

La literatura económica sobre medición de la desigualdad se ha dedicado en su mayoría al estudio de indicadores en una sola dimensión. Tal es el caso del estudio de la desigualdad del ingreso o de la riqueza. La investigación relativa al estudio de la desigualdad en indicadores multidimensionales tiene una historia más reciente y presenta importantes desafíos y aspectos por investigar.

Los orígenes de los indicadores multidimensionales se pueden situar en la medición del bienestar, como un fenómeno no puramente económico. Tradicionalmente la desigualdad en el bienestar se asociaba a la desigualdad de ingresos. Bajo esta concepción, la desigualdad del bienestar se ha incrementado en los últimos siglos. Se podría suponer que el ingreso está correlacionado de forma positiva con diversos aspectos del bienestar, tales como la educación o la salud. Sin embargo, colocar el crecimiento económico en el centro del bienestar ofrece una visión parcial de dicho proceso el cual engloba otras dimensiones no monetarias e igualmente relevantes (Jordá, Trueba y Sarabia, 2014). Según el nuevo enfoque iniciado por Sen (1985), el bienestar puede considerarse como un proceso multidimensional (Sen, 1985; Streeten, 1994; Stiglitz, Sen y Fitoussi, 2009), no existiendo razones para suponer que la distribución de sus componentes no monetarios evolucione de la misma forma que la del ingreso (Bourguignon y Morrison, 2002). En este sentido, mientras que las décadas de los ochenta y los noventa se caracterizaban por un proceso de divergencia en el ámbito económico, la desigualdad del bienestar estaba disminuyendo (Konya, 2008; Martínez, 2012; McGillivray y Markova, 2010; Jordá, Trueba y Sarabia, 2014).

En consecuencia, la medición de la desigualdad en el bienestar debe realizarse desde una perspectiva multidimensional en la que, además de considerar los aspectos puramente económicos, se consideren otras dimensiones constitutivas del concepto de bienestar tales como la educación, la salud o la felicidad. Esto nos lleva a un interés por los indicadores de tipo multidimensional. Como hemos señalado anteriormente, el índice de desarrollo humano, puede considerarse como uno de los indicadores multidimensionales más conocidos y utilizados en la actualidad.

A la hora de sintetizar y elaborar una agenda de investigación en este campo de los indicadores multidimensionales, parece razonable hacer uso del Teorema básico de Atkinson, que hemos comentado en la segunda parte. De acuerdo con dicho Teorema, existen cuatro herramientas fundamentales que nos conducirían a versiones multidimensionales de los índices de desigualdad. Se trata de:

- Las funciones de bienestar en sus correspondientes versiones multidimensionales, donde ahora debemos considerar simultáneamente los individuos de la población junto con las diferentes dimensiones del índice. Las correlaciones entre las diferentes dimensiones son otro aspecto a tener en cuenta a la hora de definir estas nuevas funciones de bienestar.

- La función de distribución conjunta multivariante o mutidimensional del ingreso y de los otros componentes del índice. Una vez especificada esta función, disponemos tanto de las distribuciones marginales como de la estructura de dependencia. En este caso, y de forma equivalente, podemos hacer uso de la cópula asociada a la función de distribución en m dimensiones.

- Las curvas de Lorenz y sus correspondientes versiones multidimensionales, donde aparecen las superficies y los zonoides de Lorenz.

- Los órdenes estocásticos asociados al vector multidimensional de componentes de la desigualdad. Al igual que en una dimensión, tenemos diversas definiciones alternativas.

Quizás unos de los aspectos característicos más importantes de los índices multidimensionales y de sus indicadores de desigualdad es que no tenemos una única alternativa. A la hora de elegir un indicador de desigualdad debemos ser conscientes de la teoría subyacente utilizada en su construcción y de sus consecuencias normativas.

En esta sección comentaremos diversos aspectos relativos a la medición multidimensional de la desigualdad, a partir de las cuatro herramientas antes descritas.

La discusión de esta sección la realizaremos en términos de la elaboración de un índice multidimensional para la medición del bienestar, y se puede extender a la elaboración de otro tipo de índices económicos.

3.3.1 Un marco teórico para índices multidimensionales de bienestar

En el siguiente apartado comentaremos un marco de referencia teórico para la construcción de un índice multidimensional del bienestar.

Dicha metodología se basa en Decancq y Lugo (2013), que hacen uso de uno de los indicadores multidimensionales de bienestar más utilizados en este ámbito (ver, por ejemplo Seth, 2013). Una de las ventajas de la metodología propuesta es que proporciona las herramientas necesarias para el uso práctico y la interpretación normativa del indicador. Por otro lado, el índice considerado contiene, como caso particular, muchos de los índices multidimensionales utilizados en la literatura, como es el caso del IDH.

El procedimiento establece tres etapas: obtención de los índices agregados de los individuos por dimensión, elección del parámetro β para la obtención de los índices transformados y finamente diversas metodologías alternativas para la elección de los pesos asociados a cada uno de los índices transformados por dimensión.

El índice multidimensional del bienestar se define como,

$$I_\beta(x) = \left[w_1 I_1(x_1)^\beta + \cdots + w_m I_m(x_m)^\beta\right]^{1/\beta}, \qquad \beta \neq 0$$

y

$$I_0(x) = \prod_{j=1}^{m} I_j(x_j)^{w_j}$$

si $\beta = 0, \text{con } w_j \geq 0 \text{ y } \sum_{j=1}^{m} w_j = 1.$ El bienestar se define entonces como una media ponderada de los índices transformados por dimensión. Son varios los aspectos a destacar. Blackorby y Donaldson (1982) han proporcionado una caracterización axiomática de este tipo de índices. Los índices por dimensiones cubren un amplio espectro de posibilidades.

El parámetro β está relacionado con la elasticidad de sustitución entre dimensiones y $\sigma = \frac{1}{1-\beta}$. Si $\beta < 1$, entonces el índice de bienestar es una función cóncava, que refleja la preferencia por un vector igualitario en los índices de las dimensiones transformadas. Si $\beta = 1$, se obtiene una media aritmética ponderada de los índices entre dimensiones. Los indicadores transformados permiten asignar diversos pesos a las diferentes partes de la distribución del índice.

El siguiente aspecto a considerar es la interpretación del peso de las dimensionales entre los indicadores transformados. Este peso puede interpretarse por medio de un método habitual en microeconomía para entender el tipo de juicio de valor implícito en el índice.

Se trata de la tasa marginal de sustitución entre dimensiones definida por:

$$TMS_{j_1,j_2} = \frac{\partial I(x)}{\partial I(x_{j_1})} \Big/ \frac{\partial I(x)}{\partial I(x_{j_2})} = \frac{w_{j_1}}{w_{j_2}} \cdot \frac{I'_{j_1}(x_{j_1})}{I'_{j_1}(x_{j_2})} \cdot \left(\frac{I_{j_2}(x_{j_2})}{I_{j_1}(x_{j_1})}\right)^{1-\beta} .$$

La formulación anterior establece una descomposición de la tasa marginal en tres componentes de fácil interpretación. Finalmente, señalar que Decancq y Lugo (2013) establecen una detallada revisión de metodologías para la asignación de los pesos de cada dimensión.

3.3.2 Indices multidimensionales basados en funciones de bienestar

Un aspecto fundamental en la elaboración de los índices de bienestar multidimensionales consiste en la inclusión del grado de correlación entre dimensiones, aspecto que no siempre es tenido en cuenta a la hora de elaborar un índice.

Decancq y Lugo (2012) han propuesto índices de desigualdad para datos de bienestar multidimensionales, basados en funciones de bienestar que agregan a través de los individuos y de las dimensiones. En general, agregar primero por dimensiones resulta más interesante, puesto que de este modo el índice de desigualdad obtenido dependerá de la correlación entre dimensiones.

Las funciones de bienestar que consideran estos autores son funciones

$$W_{n\times m}^{i}: \mathbb{R}_{++}^{n\times m} \to \mathbb{R}_{++}$$

de modo que existen dos posibilidades de agregación, por dimensiones, y por individuos

$$W_{n\times m}^{1}(X) = W_m[W_n(x_1), \dots, W_n(x_m)]$$

$$W_{n\times m}^{2}(X) = W_n[W_m(x^1), \dots, W_n(x^n)]$$

Para la especificación de estas funciones, Decancq y Lugo consideran hasta un total de nueve propiedades o axiomas relativos a las funciones de bienestar. Dichos axiomas son: monotonicidad, simetría, normalización, separabilidad, separabilidad según dependencia del rango, invarianza débil de cociente de escala, invarianza fuerte de cociente de escala, invarianza débil de traslaciones invarianza por replicación y agregación. Tras imponer estas propiedades o axiomas sobre una función genérica de bienestar, se obtienen dos clases diferentes de funciones. A continuación, para obtener los correspondientes índices de desigualdad, se utiliza la siguiente identidad (al igual que hizo Atkinson en el caso de una dimensión) que relaciona la función de bienestar, la matriz de renta que proporciona el mismo bienestar y el índice de desigualdad multidimensional

$$W_{n\times m}((1 - I(X)X_{\mu}) = W_{n\times m}(X)$$

El primer índice de desigualdad es

$$I^1(X) = 1 - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{r_j^i}{n}\right)^{\delta} - \left(\frac{r_j^i - 1}{n}\right)^{\delta}\right] x_j^i\right)^{\beta}\right]^{1/\beta}}{\left(\sum_{j=1}^{m} w_j \mu(x_j)^{\beta}\right)^{1/\beta}}$$

donde los pesos w_j son no negativos y suman uno y r_j^i es el rango del individuo i en la dimensión j. El segundo de los índices es

$$I^2(X) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{r^i}{n}\right)^{\delta} - \left(\frac{r^i - 1}{n}\right)^{\delta}\right]\left(\sum_{j=1}^{m} w_j (x_j^i)^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(\sum_{j=1}^{m} w_j \mu(x_j)^{\beta}\right)^{1/\beta}}$$

donde nuevamente los pesos w_j son no negativos y suman uno y $r^i = r^i$ (s) es el rango del individuo *i* sobre la base de *s*.

Dichos índices de desigualdad son generalizaciones multidimensionales de los índices de Gini generalizados vistos en la parte segunda de este discurso, y propuestos por Donaldson y Weymark (1980), Kakwani (1980) y Yitzhaki (1983).

3.3.3 Indices multidimensionales basados en la entropía generalizada

La siguiente clase de índices multidimensionales de desigualdad ha sido propuesta por Maasoumi (1986), y se basa en las medidas de entropía generalizada, ya vistas en la primera parte del discurso. Como hemos visto esta clase de medidas contienen muchas de las más populares medidas de desigualdad (incluyendo los dos índices propuestos por Theil), y además son ordinalmente equivalentes a la clase de medidas de desigualdad propuesta por Atkinson (1970).

La construcción de los índices que plantea Maasoumi (1986) se realiza mediante un procedimiento en dos etapas. En una primera etapa, el individuo viene representado por medio de una función de utilidad en todas las variables. Seguiremos la notación usada por Maasoumi (1986).

La cantidad $\{X_{ij}\}$ representa el valor de la variable $j = 1,2,\ldots, M$, para el individuo $i = 1,2,\ldots, N$, que puede ser un hogar, región etc. De este modo $X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{iM})'$ representa la fila i-ésima de la matriz $N \times M$ y $X^j = (X_{1j}, \ldots, X_{Nj})'$ la correspondiente columna de la matriz.

La función resumen o variable agregada que representa el bienestar individual se denota por $S_i = h(X_i)$. La desigualdad relativa del vector agregado de individuos (S_1,…,S_N) se mide entonces por medio de la entropía generalizada definida como

$$I_\gamma(S) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{N} p_i\left[\left(\frac{S_i^*}{p_i}\right)^{1+\gamma} - 1\right]$$

donde $S_i^* = S_i/\sum_j S_j$ y p_i y son las proporciones de la población. Los valores límites son,

$$I_0(S) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{S}_i \log(\tilde{S}_i/p_i)$$

y

$$I_{-1}(S) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log(p_i/\tilde{S}_i)$$

que corresponden con las propuestas de Theil, en un contexto de desigualdad entre individuos.

El segundo paso consiste en la elección de la utilidad del individuo. Las posibles utilidades incluyen las funciones CES con elasticidad constante de sustitución, la clase de funciones Cobb-Douglas, lineales de Leontief, etc. Maasoumi elige entonces la función de agregación haciendo mínima la siguiente medida de divergencia o información esperada entre el *S* y *X*,

$$D_\beta(S,\mathbf{X};\alpha) = \sum_{f=1}^{M} \alpha_f \left\{\sum_{j=1}^{N} S_i\left[\left(\frac{S_i}{X_{if}}\right)^{\beta} - 1\right]/\beta(\beta+1)\right\}$$

Este criterio corresponde a una suma ponderada entre parejas de divergencias, y ha sido propuesto por Burbea y Rao (1982).

La distribución *S* que minimiza la cantidad anterior viene dada por,

$$S_i \propto \left(\sum_{j=1}^{M} \delta_j X_{ij}^{-\beta}\right)^{-1/\beta}$$

donde $\delta_f = \alpha_f / \sum_f \alpha_f$. La solución anterior es una media armónica, que incluye (como casos particulares o casos límites) a la media geométrica ponderada y a las funciones lineales.

Existen varios aspectos a destacar. Si se escribe el exponente como $-\beta = 1 - 1/\sigma$, el parámetro σ se corresponde nuevamente con una elasticidad constante de sustitución, lo que permite incluir muchas de las funciones de utilidad antes citadas tales como la CES, Cobb-Douglas (con $\beta = 0$) y de Leontief, en el caso lineal.

La clase de índices propuesta por Maasoumi (1986) cumple la propiedad de descomponibilidad aditiva, al igual que ocurría en el caso de una dimensión. Esta propiedad permite además la obtención de medidas de polaridad (Gigliariano y Mosler, 2009).

Otra importante propiedad de esta clase de índices es la ordenación frente a transferencias progresivas de los atributos. En concreto, si B es una matriz doblemente estocástica (es decir, que tanto por filas como por columnas suma la unidad) y consideramos la transformación de carácter progresivo sobre la matriz original de datos $\overline{X} = BX$, entonces,

$$I_\gamma(\bar{S}) \leq I_\gamma(S)$$

para todo valor del parámetro γ y cualquier función $h(.)$ creciente y cóncava donde $S_i = h(X_i)$ y $\bar{S}_i = h(\bar{X}_i)$.

Las aplicaciones de esta clase de medidas de desigualdad son diversas. Jordá, Trueba y Sarabia (2014) han utilizado este índice multidimensional para el estudio de la desigualdad en el marco del desarrollo humano. Estos autores concluyen que, tanto en las tres dimensiones del desarrollo humano como en indicadores compuestos de estas componentes, se ha producido una disminución de la desigualdad a nivel mundial en el periodo de estudio 1980-2011. La descomposición de estas medidas en los componentes interregional e intrarregional revelan que la disminución de la desigualdad en el bienestar es debida principalmente a la disminución de la desigualdad entre regiones.

Maasoumi y Nickelsburg (1988) han construido medidas de bienestar, para el análisis de desigualdad en USA. Maasoumi y Zandvakili (1986) han estudiado la movilidad de renta a corto y medio plazo.

Otra importante aplicación de este índice multidimensional, ha sido el estudio de la desigualdad y polaridad de las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI).

La actividad humana llevada a cabo durante la era industrial ha dado lugar a un incremento drástico tanto de las emisiones de dióxido de carbono (CO2) como de otros GEI que, a pesar de estar menos presentes en la atmósfera, juegan también un papel importante en la lucha contra el cambio climático. Dado que las diferencias en los niveles de emisión de GEI entre los países pueden dificultar la consolidación de un acuerdo multilateral sobre cambio climático, la evidencia de una disminución de la desigualdad en las emisiones de GEI podría alentar a los países a establecer un compromiso más ambicioso.

En este contexto, en el trabajo de Remuzgo, Trueba y Sarabia (2016) se analiza la desigualdad en las emisiones de GEI desde una perspectiva multidimensional, considerando las emisiones de CO2, de metano (CH4), de óxido nitroso (N2O) y de gases fluorados (F-gases) durante el período 1990-2011. Para ello, se utilizan las medidas multidimensionales de entropía generalizada propuestas por Maasoumi (1986) previamente descritas, las cuales presentan la ventaja de que pueden ser descompuestas por grupos de población, según hemos visto. Los datos empleados en este análisis provienen del World Resources Institute (WRI, 2014) y los grupos de países han sido construidos de acuerdo a la cantidad de emisiones emitidas por cada uno de ellos a comienzos del periodo. Los resultados muestran que cuando se otorga un mayor peso a las transferencias de emisiones entre los países más contaminantes y se admite un bajo grado de sustitución entre los contaminantes, el descenso de la desigualdad mundial de las emisiones de GEI es mayor. Desde el punto de vista de política ambiental, la Convención Marco de Naciones Unidas sobre Cambio Climático de 1992 puede ser una de las razones de la tendencia decreciente de la desigualdad cuando los países más contaminantes reciben más importancia.

Por otro lado, en el ámbito ambiental las negociaciones sobre la reducción de emisiones se construyen a través de alianzas de grupos de países. Por tanto, además de los análisis de desigualdad, es necesario llevar a cabo estudios de polarización que permitan capturar el posible conflicto de intereses inherente a la propia distribución de GEI.

En esta línea, y haciendo uso de los índices de entropía, Remuzgo y Trueba (2017) estudian la polarización desde un punto de vista multidimensional considerando los GEI previamente mencionados a través de los índices desarrollados por Gigliariano y Mosler (2009), los cuales recurren a la descomposición por grupos de población de las medidas de desigualdad multidimensional propuestas por Maasoumi (1986). En particular, el análisis se lleva a cabo dividiendo la muestra en 4 y 8 grupos de acuerdo al nivel de emisiones de cada país en el año 2011 y considerando una agrupación endógena que consiste en minimizar la desigualdad intrarregional (Davies y Shorrocks, 1989). Los resultados revelan que la mayoría de los índices de polarización mostraron un patrón ligeramente creciente que fue similar con independencia del número de grupos considerados.

3.3.4 Indices de Theil multidimensionales

Si disponemos de un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_m)$ de dimensión m, es posible considerar índices de Theil multidimensionales definiendo,

$$T_0^{(m)}(\boldsymbol{X}) = -E\left[\log\left(\frac{X_1 \cdots X_m}{\mu_{12\cdots m}}\right)\right]$$

y

$$T_1^{(m)}(\boldsymbol{X}) = E\left[\frac{X_1 \cdots X_m}{\mu_{12\cdots m}}\log\left(\frac{X_1 \cdots X_m}{\mu_{12\cdots m}}\right)\right]$$

donde $\mu_{12\ldots m}$ es el momento producto de las m componentes.

Estos índices han sido propuestos por Sarabia, Jordá y Remuzgo (2017) y cumplen diversas propiedades de interés. En primer lugar poseen las mismas propiedades de descomponibilidad que en el caso de una dimensión, pero ahora suponiendo que los datos y las subpoblaciones proceden de un vector de *m* dimensiones.

En el caso de dos dimensiones y de que los datos procedan de un vector lognormal bidimensional, obtenemos el índice

$$T_0^{(2)}(\boldsymbol{X}) = T_1^{(2)}(\boldsymbol{X}) = \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2} + \sigma_{12}$$

donde σ_{12} representa la covarianza entre los logaritmos de las componentes. La propiedad de que ambos índices coincidan también se verifica en el caso de la distribución lognormal unidimensional. Si las dos dimensiones son independientes, entonces el valor del índice es la suma de los índices marginales.

3.3.5 Otros índices multidimensionales basados en axiomas

Entre los índices multidimensionales basados en axiomas, destacan las clases de índices propuestas por Tsui (1995, 1999). Este autor considera una serie de axiomas y una función de evaluación social sobre los individuos de la forma

$$W(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N} \left(a + b \prod_{j=1}^{M} x_{ij}^{r_j} \right)$$

De este modo, considera la clase de índices multidimensionales relativos

$$I_T(\boldsymbol{X}) = 1 - \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{x_{ij}}{\mu_j} \right)^{r_j} \right\}^{1/r}$$

donde r_j son los pesos de cada dimensión y $r = \sum_{j=1}^{M} r_j$.

Existen algunos inconvenientes de esta metodología desde el punto de vista empírico que han sido indicados por Lugo (2005). Estos inconvenientes están principalmente relacionados con el significado de los pesos: valor, grado de sustitución, grado de aversión a la desigualdad e interacción entre dimensiones.

Bourguignon (1999) ha propuesto un índice multidimensional cuyos parámetros presentan un significado más claro y una mayor relación con los criterios de dominación estocástica multidimensional proporcionados por Kolm (1977). Para ello, comienza definiendo la función de bienestar social,

$$S(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{j=1}^{M} w_j x_{ij}^{\beta} \right)^{\alpha/\beta}$$

donde α es el grado de aversión a la desigualdad, mientras que el parámetro β representa el grado de sustitución entre atributos. El índice propuesto presenta la expresión,

$$I_B(\boldsymbol{X}) = 1 - \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{M} w_j x_{ij}^{\beta} \right\}^{\alpha/\beta}}{\left\{ \sum_{j=1}^{M} w_j \mu_j^{\beta} \right\}^{\alpha/\beta}}$$

El máximo grado de bienestar social se alcanza en el caso de perfecta igualdad, de modo que cada individuo recibe la misma cantidad media por atributo.

3.3.6 Distribuciones multidimensionales e indicadores de desigualdad

A la hora de construir índices de desigualdad multidimensionales, parece lógico hacer uso de la función de distribución conjunta subyacente de las *m* dimensiones del índice. En este contexto, existen diversas propuestas plausibles para esta situación, que tienen en cuenta, tanto las características de los datos marginales, como las correlaciones entre dimensiones.

En primer lugar, existen diversas propuestas de distribuciones multidimensionales, entre las que destacamos la jerarquía de distribuciones de Pareto propuesta por Arnold (2015). Una de estas distribuciones se corresponde con la distribución multivariante de Pareto tipo II, definida por medio de la función de supervivencia multidimensional como,

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) = \left[1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right]^{-\alpha}, \qquad x_i > \mu_i$$

con $i = 1,\dots, m$. La familia de distribuciones anteriores presenta diversas ventajas. En primer lugar, tanto las distribuciones marginales como las distribuciones condicionadas son de tipo Pareto. Por otro lado, las funciones de regresión de una variable sobre el resto son de tipo lineal, mientras que las varianzas condicionadas son heterocedásticas, lo que permiten tener en cuenta la heterogeneidad de los datos.

Otra segunda opción consiste en hacer uso de la distribución lognormal multidimensional, que se obtiene mediante transformaciones monótonas de las distribuciones marginales, en una distribución normal dimensional. Dicha distribución cumple,

$$(\log X_1, \dots, \log X_m)^T \sim N_m(\mu, \Sigma),$$

siendo $N_m\,(\mu,\Sigma)$ la distribución normal multidimensional de dimensión m. Un importante atractivo de la distribución lognormal, que comparte con la distribución de Pareto multidimensional, es que tanto las distribuciones marginales como las distribuciones condicionales son de nuevo del tipo lognormal, al igual que el caso de la distribución normal multivariada.

La metodología para la elaboración del índice consiste en considerar una función de agregación para las dimensiones, y a partir de ellas elegir un índice conveniente de desigualdad.

Como ejemplo de aplicación, consideramos la distribución lognormal bidimensional en dos dimensiones, y la función de agregación

$$A(\boldsymbol{X}) = \alpha X_1^{w_1} X_2^{w_2}$$

donde w_i, i=1,2 son los pesos asignados a cada dimensión. Si consideramos como medida de desigualdad el índice de Gini, obtenemos el índice de desigualdad bidimensional,

$$G(\boldsymbol{X}) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{2}(w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}\right) - 1,$$

donde Φ (z) es la función de distribución de la normal estándar, $\sigma_i^2 =$ *var* ($logX_i$), i = 1,2 y $\rho_{12} =$ *cor* (log X_1, log X_2).

Esta metodología presenta diversas ventajas. En primer lugar, únicamente tenemos que agregar las diferentes dimensiones del índice. Por otro lado, el índice tiene en cuenta la estructura de correlación entre dimensiones a partir del coeficiente de correlación entre los logaritmos de las variables, y la estimación de los parámetros del modelo es sencilla, teniendo en cuenta la relación del modelo con la distribución normal. Las propiedades estadísticas del índice no parecen complicadas. La distribución asintótica cuando el tamaño de muestra se hace grande, se puede obtener por medio de la versión multivariante multiplicativa del Teorema central del límite. Por otro lado, la variabilidad del índice se puede obtener mediante técnicas bootstrap paramétricas.

Kmietowicz (1984) utilizó la distribución lognormal bidimensional para modelizar la distribución conjunta de los ingresos y del tamaño del hogar. Sin embargo, esta distribución presenta algunas diferencias con el caso normal. Por ejemplo, el rango del coeficiente de correlación es más limitado (Nalbach-Leniewska, 1979). Este hecho puede hacer perder utilidad práctica a esta distribución. Una alternativa, es hacer uso de la versión en términos de distribuciones condicionadas, de acuerdo con la metodología propuesta por Arnold, Castillo y Sarabia (1999, 2001), y estudiado en detalle por Sarabia et al. (2007). Usando esta metodología, obtenemos nuevas clases de distribuciones lognormales que son más flexibles, con correlaciones no limitadas y que incluyen como caso particular al modelo lognormal multidimensional clásico.

3.4 Superficies y zonoides de Lorenz

Otra forma alternativa de abordar la medición multidimensional de la desigualdad es por medio de la curva de Lorenz, a partir de una nueva definición en más de una dimensión.

Existen en la literatura tres versiones multivariantes de la curva de Lorenz. Dichas versiones han sido propuestas por Taguchi (1972), Arnold (1987) y Koshevoy (1995), y dan lugar a dos tipos de instrumentos metodológicos: las *superficies* y los *zonoides* de Lorenz.

3.4.1 Superficies de Lorenz

Las superficies de Lorenz fueron propuestas por Taguchi (1972) y Arnold (1987). La propuesta de Taguchi presenta algunos inconvenientes, por lo que presentamos la superficie de Lorenz propuesta por Arnold (1987). Partimos de un vector aleatorio de dimensión *m*, definido en términos de la función de densidad o función de distribución multivariante. La superficie de Lorenz viene entonces dada por,

$$L_X(u_1, \dots, u_m) = \frac{1}{E(X_1 \cdots X_m)} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} y_1 \dots y_m dF(y_1, \dots, y_m)$$

donde

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(u_i), \qquad i = 1,2, \dots, m$$

y donde se supone que la esperanza de las marginales y el momento del producto existen. La expresión anterior constituye una extensión natural de la curva de Lorenz en una dimensión.

La fórmula para la superficie de Lorenz, definida en términos de una integral múltiple, puede parecer complicada de evaluar. Sin embargo, existen diversas formas de hacerla manejable. Sarabia y Jordá (2013, 2014a) han considerado modelizar la función de distribución conjunta de los componentes en términos de una cópula del tipo Sarmanov-Lee. Dicha cópula tiene una estructura aditiva, separable y flexible. De este modo, se obtiene una expresión cerrada en términos de las curvas de Lorenz de las distribuciones márginales y de las curvas de Lorenz generalizadas en el sentido de Kakwani (1977). Por otro lado, es posible escribir el índice de Gini multidimensional como suma de dos componentes que pueden ser interpretados fácilmente en términos de la desigualdad entre grupos y dentro de los grupos.

Una segunda forma de evaluar la expresión anterior ha sido propuesta por Arnold y Sarabia (2018). En este caso se consideran curvas de Lorenz multidimensionales construidas por medio de mezclas (Sarabia, et al. 2005). De este modo, se obtienen formas funcionales explícitas y manejables. Además, se pueden obtener expresiones analíticas cerradas para el índice de Gini definido en m dimensiones.

3.4.2 Zonoides de Lorenz

La segunda de las definiciones de curva de Lorenz multivariante hace uso del concepto geométrico del zonoide de Lorenz, y ha sido propuesta por Koshevoy (1995) y estudiada por Koshevoy y Mosler (1996). Diversas propiedades de los zonoides se pueden encontrar en Mosler (2002). Se trata de obtener una definición de que no dependa de los estadísticos de orden ni de la función de cuantiles en m dimensiones, puesto que no existe una definición simple de estos conceptos más allá de una dimensión.

Es posible una visualización del zonoide de Koshevoy en los casos de una y dos dimensiones.

En el caso de una dimensión, la versión en la población del zonoide es la región limitada por la curva de Lorenz $L(u)$ y la curva simétrica respecto la diagonal $\tilde{L}(u)$ definida por

$$\tilde{L}(u) = 1 - L(1-u), \qquad 0 \leq u \leq 1$$

En dos dimensiones, el zonoide de Lorenz es la gráfica de un conjunto convexo equivalente a un balón de rugby o de futbol Americano, cuyos extremos se sitúan en los puntos del espacio (0,0,0) y (1,1,1).

Veamos cómo se obtiene la versión muestral del zonoide de Lorez en una dimensión, comparando con la definición muestral de curva de Lorenz. A partir n de una muestra de ingresos La curva de Lorenz se calcula como,

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{j:n}}{\sum_{j=1}^{n} x_{j:n}}\right), i = 1,2, \dots, n-1$$

para lo cual necesitamos ordenar los ingresos, y a continuación los vamos acumulando en i = 1,2,…, n - 1 grupos.

Si pensamos en las x_i como los ingresos de n individuos en una población, entonces la segunda coordenada de la definición anterior corresponde a la proporción del ingreso total contabilizado por los individuos con menos ingresos de la población.

Una forma alternativa de hacer esta comparación es la siguiente. Consideramos grupos de j = 0,1,…, n individuos, y para cada uno de los grupos, calculamos la proporción de individuos que suponen en la población, junto con la correspondiente proporción de ingreso acumulado. Tenemos $\binom{n}{j}$ grupos de j individuos, y un total de 2^n agrupaciones. El zonoide de Lorenz está formado por el cierre convexo de todos los puntos formados por cada agrupación. Esta definición se extiende a más de una dimensión de una forma simple, mediante la expresión

$$LZ(X) = \left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{1i}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{mi}}{\sum_{j=1}^{n} x_{mj}}\right), 0 \le \alpha_i \le 1\right\}$$

Téngase en cuenta que en esta definición de zonoide no se necesitan ordenar los ingresos, y se van comparando todos los ingresos acumulados formados por todos los posibles grupos de individuos. Obviamente, el problema computacional al que nos enfrentamos es considerable.

Incluimos finalmente la versión poblacional del zonoide. Elegimos un vector de variables económicas (ingreso, riqueza, etc. en una determinada sociedad) definido por $X = (X_1, \dots, X_m)$, y suponemos que existen las medias de las distribuciones marginales. A continuación, consideramos la clase de funciones medibles

$\Psi^{(m)}$, definidas de $\mathbb{R}_{+}^{m}$ al intervalo [0,1], con objeto de para describir la variabilidad total, tal como visto en una dimensión. El zonoide de Lorenz de la sociedad viene dado por,

$$LZ(X) = \left\{\left(E[\psi(X)], \frac{E[X_1\psi(X)]}{E[X_1]}, \dots, \frac{E[X_m\psi(X)]}{E[X_m]}\right) : \psi \in \Psi^{(m)}\right\}$$

3.5 Ordenaciones multidimensionales

Al igual que en una dimensión, surge la cuestión de comparar dos distribuciones, en esta ocasión de carácter multidimensional. Las comparaciones multidimensionales se pueden realizar desde diferentes puntos de vista, haciendo uso de diferentes órdenes. Uno de los primeros trabajos en este ámbito lo constituye la contribución de Atkinson y Bourguignon (1982).

Si *X* e *Y* son dos vectores aleatorios de dimensión , podemos considerar hasta cinco ordenaciones multidimensionales diferentes (Marshall, Olkin y Arnold, 2011)

- Ordenación por medio de los correspondientes zonoides de Lorenz

$$X \leq_L Y \ \ si \ \ LZ(X) \subseteq LZ(Y)$$

- Ordenación por medio de funciones convexas: $X \leq_{L_1} Y$ si

$$E\left[g\left(\frac{X_1}{E(X_1)}, \dots, \frac{X_m}{E(X_m)}\right)\right] \leq E\left[g\left(\frac{Y_1}{E(Y_1)}, \dots, \frac{Y_m}{E(Y_m)}\right)\right]$$

donde *g* es una función continua y convexa, para la que las correspondientes esperanzas existen.

- Ordenación por combinaciones lineales de las dimensiones marginales con pesos a_i de signos arbitrarios

$$X \leq_{L_2} Y \; si \; \sum a_i X_i \leq_L \sum a_i Y_i$$

- Ordenación por medio de combinaciones lineales convexas de las marginales (con pesos a_i no negativos)

$$X \leq_{L_3} Y \; si \; \sum a_i X_i \leq_L \sum a_i Y_i$$

- Ordenación por medio de las ordenaciones Lorenz de las dimensiones marginales

$$X \leq_{L_4} Y \; si \; X_i \leq_L Y_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Es evidente que el orden $\leq_{L_4}$ es más débil que $\leq_L$ y que $\leq_{L_3}$, puesto que se puede obtener a partir de combinaciones lineales. Por otro lado, el orden inducido por el zonoide implica todo los demás órdenes excepto el orden $\leq_{L_1}$ definido por medio de transformaciones de funciones convexas. Este orden es el más fuerte de los cinco propuestos, y no viene implicado por ninguno de los otros (Marshall, Olkin y Arnold, 2011).

Desde el punto de vista económico, la ordenación $\leq_{L_3}$ parece la más conveniente, ya que se puede interpretar fácilmente en términos de ordenaciones Lorenz unidimensionales de indicadores de bienestar con m componentes.

Una clase amplia de medidas de desigualdad multidimensionales se puede definir por medio del orden $\leq_{L_1}$,

$$I_g(X) = E\left[g\left(\frac{X_1}{E(X_1)},\dots,\frac{X_m}{E(X_m)}\right)\right]$$

Si nos fijamos en el orden inducido por el zonoide, una medida de desigualdad consiste en obtener el volumen del propio zonoide normalizado. Si Q es la matriz de orden $(m+1) \times (m+1)$, cuya i-ésima fila es $(1, \widetilde{X}_i)$, donde $\widetilde{X}_i$ es la versión de la componente normalizada por la media, una versión multidimensional del índice Gini basado en el volumen del zonoide viene definido como,

$$volumen\big(LZ(X)\big) = \frac{E|\det Q|}{(m+1)!\prod_{i=1}^{m} E(X_i)}$$

Algunos inconvenientes asociados con esta medida de desigualdad han sido discutidos por Mosler (2002) y Arnold (2015).

3.6 Distribuciones multidimensionales basadas en cópulas

La especificación de la función de distribución multidimensional se puede realizar por medio de *cópulas*. La modelización mediante cópulas es un procedimiento metodológico que permite modelizar las interdependencias entre diferentes variables económicas. El desarrollo de la teoría de las cópulas es muy reciente. Sin embargo, su uso se ha extendido rápidamente y su utilización ya es habitual en algunas áreas de economía y sobre todo en finanzas. Su aplicación en el estudio de la renta y la riqueza es de más reciente implantación. Decanq (2013) ha considerado un procedimiento de medición de dependencias entre dimensiones del bienestar a partir de cópulas.

Vamos a considerar el problema en su versión poblacional, y se trata por tanto de modelizar un vector aleatorio cuya dimensión viene dada por el número de variables. Necesitaremos entonces tener en cuenta dos aspectos:

- La modelización de las interdependencias entre las variables (la estructura de dependencia)

- La modelización de las variables marginales de forma aislada.

Las cópulas permiten realizar estas dos modelizaciones de modo independiente, de forma que

$$F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m))$$

donde $C(u_1, \dots, u_m)$ es la cópula y $F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)$ son las funciones de distribución de las distribuciones marginales.

Una de las estructuras habituales de cópula es la cópula normal con distribuciones marginales normales. De este modo, la estructura de dependencia viene determinada por medio de la matriz de covarianzas entre las variables, regresiones de tipo lineal y varianzas condicionadas homocedásticas.

La modelización de variables relacionadas con el bienestar puede resultar más compleja. Si queremos establecer un modelo estocástico para el bienestar definido en términos de ingreso, salud y educación, necesitaremos en primer lugar distribuciones marginales de tipo Pareto, lognormal y gamma, respectivamente. A continuación, tendremos que elegir una cópula que permita establecer las dependencias entre las tres variables, y además (posiblemente) dependencia en la parte alta de la distribución. Esto es posible con una cópula tipo Clayton. La siguiente etapa consistiría en definir algún indicador que resuma la información contenida en la cópula, para finalmente obtener los correspondientes indicadores de desigualdad.

La modelización por medio de cópulas presenta diversos desafíos. Un primer aspecto consistiría en introducir la estructura de dependencia de la cópula en un índice de desigualdad. El estudio de la ordenación entre cópulas es otra de las cuestiones cruciales ya presente en la investigación actual.

CONCLUSIONES

Las conclusiones son las siguientes:

1. La desigualdad económica y su medición es uno de los temas centrales de investigación en la economía actual. Los pilares básicos de su medición se establecen a partir del principio de transferencias de Pigou-Dalton y de la curva de Lorenz. Muchos conceptos económicos recientes se han originado y desarrollado a partir de la ideas de la desigualdad económica.

2. Se ha establecido un marco conceptual y metodológico para el análisis de la desigualdad en datos económicos y sociales. Se han presentado los instrumentos básicos de análisis: funciones de distribución y densidad, así como los cuantiles y la función de cuantiles. Se ha presentado una definición general de curva de Lorenz, para continuar con el orden de Lorenz y el índice de Gini. Se continúa con la contribución fundamental de Atkinson (1970), que establece una conexión entre ordenaciones de las funciones de bienestar, de las distribuciones de ingreso subyacente y de las curvas de Lorenz, así como la relación con el principio transferencias de Pigou-Dalton y las medidas de desigualdad asociadas con estos principios. Se han comentado los axiomas básicos de la desigualdad y la modelización mediante funciones de distribución y curvas de Lorenz. Se han presentado las medidas de desigualdad más importantes, haciendo hincapié en los índices de entropía generalizada y los índices de Theil, que gozan de la propiedad de descomponibilidad aditiva por subgrupos de población. Esta parte finaliza con un tema de actualidad en la investigación en economía como es la medición de la desigualdad categórica.

3. Se han presentado dos nuevos campos relevantes de aplicación relativos a la medición de la desigualdad, que son la econofísica y los indicadores multidimensionales de desigualdad. Se han comentado varios campos de aplicación de la econofísica y su relación con la desigualdad. Se ha presentado una revisión sistemática y crítica de las diferentes metodologías para la elaboración de indicadores multidimensionales de desigualdad, junto con las diferentes ordenaciones estocásticas de datos económicos multidimensionales. Se han discutido las superficies y los zonoides de Lorenz, como extensiones multidimensionales de la curva de Lorenz clásica.

AGRADECIMIENTOS FINALES

Académicos, señoras y señores,

Permítanme que finalice mi intervención como empecé, dando las gracias a todas las personas que me han acompañado a lo largo de mi vida personal y profesional:

A mi mujer y a mis hijos, por su comprensión y amor incondicional.

A mis padres, por los valores que me inculcaron, y a mis hermanas, por su cercanía y apoyo a lo largo de estos años.

Al Profesor Enrique Castillo, mi director de tesis, maestro, amigo y mentor, y miembro de las Reales Academias de Ingeniería y de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, del que he aprendido el valor de la investigación y la importancia de la colaboración científica. Me honra que no sólo haya compartido su tiempo y su conocimiento, sino, sobre todo, su amistad.

Al Profesor Barry C. Arnold, Profesor Distinguido de la Universidad de California en Riverside, mi maestro, amigo y mentor al otro lado del Atlántico, por todo lo que me ha enseñado.

Al Profesor Emilio Gómez Déniz, amigo y colaborador científico incansable.

Y gracias a la Profesora Montse Guillén y a la Universidad de Barcelona por todos estos años de trabajo y de amistad.

Junto a ellos, los que están y los que se fueron, sigo caminando la vida y con ellos, estoy seguro, que siempre merecerá la pena haberla vivido. A todos, muchas gracias.

REFERENCIAS

Abul Naga, R. H., Yalcin, T. (2008) "Inequality measurement for ordered response health data" Journal of Health Economics, 27, 1614–25.

Allison, R.A., Foster, J.E. (2004) "Measuring health inequality using qualitative data" Journal of Health Economics, 23, 505-524.

Arnold, B.C. (1987) Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction, Lecture Notes in Statistics, 43. Springer-Verlag, Berlin.

Arnold, B.C. (2015) Pareto Distributions, Second Edition. CRC Press, Taylor and Francis Group. Boca Raton, FL.

Arnold, B.C. (2012) "On the Amato inequality index" Statistics and Probability Letters, 82, 1504-1506.

Arnold, B.C., Castillo, E., Sarabia, J.M. (1999) Conditional Specification of Statistical Models. Springer, Berlin Heidelberg New York (1999)

Arnold, B.C., Castillo, E., Sarabia, J.M. (2001) Conditionally specified distributions: an introduction (with discussion). Statistical Science 16, 249-274

Arnold, B.C., Gokhale, D.V. (2014) "On segregation: ordering and measuring" Sankhya B 76, 141-166.

Arnold, B.C., Sarabia, J.M. (2018) Majorization and the Lorenz order with applications in applied mathematics and Economics. Springer, New York.

Arnold, B.C., Sarabia, J.M. (2018) "Analytic expressions for multivariate Lorenz surfaces", Enviado.

Atkinson, A.B. (1970) "On the measurement of inequality" Journal of Economic Theory 2, 244-263.

Atkinson, A.B. (1987) "On the measurement of poverty" Econometrica 55, 749-764.

Atkinson, A.B., Bourguignon, F. (1982) "The comparison of multi-dimensioned distributions of economic status" The Review of Economic Studies, 49, 183-201.

Banerjee, A., Yakovenko, V.M., Di Matteo, T. (2006) “A study of the personal income distribution in Australia” Physica A 370, 54-59.

Bishop, J., Formby, J., Thistle, P. (1991) “Rank dominance and international comparisons of income distributions” European Economic Review 35, 1399-1409.

Biswas, A., Mandal, S. (2010) “Descriptive measures for nominal categorical variables” Statistics and Probability Letters 80, 982-989.

Black, J., Hashimzade, N., Myles, G. (2017). Dictionary of Economics, Oxford University Press, Oxford.

Blackorby, C., Donaldson, D. (1982) “Ratio-scale and translation-scale full interpersonal comparability without domain restrictions: Admissible social-evaluation functions” International Economic Review, 23, 249-68.

Bourguignon, F. (1999) “Comment to ‘Multidimensioned Approaches to Welfare Analysis’ by Maasoumi, E.” in Handbook of income inequality measurement., ed. J. Silber, Boston, Dordrecht and London: Kluwer Academic, 477-484.

Bourguignon, F., Morrison, C. (2002) “Inequality among world citizens”. American Economic Review 92, 727-744.

Burbea, J., Rao, C.R. (1982) “On the convexity of some divergence measures based on entropy functions” IEEE Trans. Inform. Theory 28, 489–495.

Chotikapanich, D., Griffiths, W.E., Rao, D.S.P. (2007) “Estimating and combining national income distributions using limited data” Journal of Business and Economic Statistics 25, 97-109.

Cook, E. (2018) “The great marginalization: why twentieth century economists neglected inequality” Real-World Economics Review, 83, 20-34

Cowell, F.A. (2006) “Theil, inequality indices and decomposition” Research on Economic Inequality, 13, 345-360.

Cowell, F.A. (2011) Measuring Inequality. Third Edition. Oxford University Press, Oxford.

Cowell, F.A., Flachaire, E. (2017) “Inequality with ordinal data” Economica 84, 290-321.

Dalton, H. (1920) “The measurement of the inequality of incomes” Economic Journal 30, 348-361.

Dasgupta, P.A., Sen, A., Starrett, D. (1973) “Notes on the measurement of inequality” Journal of Economic Theory 6, 180-187.

Davies, J.B., Shorrocks, A.F. (1989) “Optimal grouping of income and wealth data” Journal of Econometrics 42, 97-108.

Decancq, K. (2013) “Copula-based measurement of dependence between dimensions of well-being” Oxford Economic Papers 66, 681-701.

Decancq, K., Lugo, M.A. (2012) “Inequality of wellbeing: a multidimensional approach” Economica 79, 721-46.

Decancq, K., Lugo, M.A. (2013) “Weights in multidimensional indices of well-being: an overview” Econometric Reviews 32, 7-34.

Donaldson, D., Weymark, J.A. (1980) “A single parameter generalization of the Gini indices of inequality” Journal of Economic Theory 22, 67-86.

Dragulescu, A.D., Yakovenko, V.M. (2000) “Statistical mechanics of money” European Physical Journal B 17, 723-729.

Dragulescu, A.D., Yakovenko, V.M. (2001) “Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States” Physica A 299, 213-221.

Duclos, J.Y., Esteban J.M., Ray, D. (2004) “Polarization: concepts, measurement, estimation” Econometrica 72, 1737-1772

Duncan, O.D., Duncan, B. (1955) “A methodological analysis of segregation indexes” American Sociological Review, 20, 210-217.

Esteban J.M., Ray, D. (1994) “On the measurement of polarization” Econometrica 62, 819-851

Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V., Stanley, H.E. (2003) “A theory of power-law distributions in financial market fluctuations” Nature 423, 267-270.

Galbraith, J.K. (2014) “Kapital for the Twenty-First Century”. Una revisión de El Capital en el Siglo XXI. Dissent, 77-82.

Galbraith, J.K. (2016) Desigualdad. Deusto y Grupo Planeta, Barcelona.

Gastwirth, J.L. (1971) “A general definition of the Lorenz curve” Econometrica, 39, 1037-1039.

Gibrat, R. (1931). Les Inegalites Economiques. Recueil Sirey, Paris.

Gigliarano, C., Mosler, K. (2009) “Constructing indices of multivariate polarization” Journal of Economic Inequality 7, 435-460.

Gini, C. (1912) Variabilita e Mutabilita: Contributo allo Studio delle Distribuzioni e delle Relazioni Statistiche, Bologna, Cuppini.

Goodman, L.A., Kruskal, W.H. (1954) “Measures of association for cross-classifications” Journal of the American Statistical Association 49, 732-764.

Hadar, J., Russell, W.R. (1969) “Rules for ordering uncertain prospects” American Economic Review 59, 25-34.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. (1929) “Some simple inequalities satisfied by convex functions”. Messenger of Mathematics, 58, 145-152.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Polya, G. (1959) Inequalities. Cambridge University Press, London and New York.

INE (2016) “Encuesta de Condiciones de Vida (ECV) Año 2015 Resultados definitivos” Nota de Prensa, Mayo 2016

Jordá, V., López-Noval, B., Sarabia, J.M. (2018) “Distributional dynamics of life satisfaction in Europe” Journal of Happiness Studies, en prensa.

Jordá, V., Sarabia, J.M., Prieto, F. (2014) “On the estimation of the global income distribution using a parsimonious approach”, Research on Economic Inequality, 22, 115-145.

Jordá, V., Trueba, C., Sarabia, J.M. (2014) “Análisis multidimensional de la desigualdad en el marco del desarrollo humano” Estudios de Economía Aplicada, 32, 1-24.

Kakwani, N. C. (1977) "Applications of Lorenz curves in economic analysis" Econometrica 45, 719-728.

Kakwani, N.C. (1980) Income Inequality and Poverty, Methods of Estimation and Policy Applications. Oxford University Press, New York.

Kakwani, N.C., Podder, N. (1973) "On estimation of Lorenz curves from grouped observations" International Economic Review 14, 278-292.

Kalecki, M. (1945) "On the Gibrat distribution" Econometrica 13, 161-170.

Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G. E. (2012) Loss models: From data to decisions. Wiley. Hoboken, NJ.

Kmietowicz, Z.W. (1984) "The bivariate lognormal model for the distribution of household size and income", Manch. Sch. Econ. Soc. Stud. 52, 196-210.

Kolm, S.-C. (1969) "The optimal production of social justice", en J. Margolis y H. Guitton, eds., Public Economics, Macmillan, Londres.

Kolm, S.-C. (1977) "Multidimensional egalitarianism" The Quarterly Journal of Economics 91, 1-13.

Konya, L. (2008) "What does the human development index tell us about convergence?" Applied Econometrics and International Development, 8, 19-40.

Koshevoy, G. (1995) "Multivariate Lorenz majorization" Social Choice and Welfare 12, 93-102.

Koshevoy, G., Mosler, K. (1996) "The Lorenz zonoid of a multivariate distribution" Journal of the American Statistical Association 91, 873-882.

Krugman, P. (1997a) Desarrollo, Geografía y Teoría Económica. Antoni Bosch, Barcelona.

Krugman, P. (1997b) La organización espontánea de la economía. Antoni Bosch, Barcelona.

Lerman, R.I., Yitzhaki, S. (1984) "A note on the calculation and interpretation of the Gini index" Economics Letters 15, 363-368.

Lerman, R.I., Yitzhaki, S. (1985) “Income inequality effects by income source: a new approach and applications to the United States” The Review of Economics and Statistics 67, 151-156.

Lugo, M.A. (2005) “Comparing multidimensional indices of inequality: methods and application” ECINEQ Working Papers 2005 – 14.

Lorenz, M. O. (1905) “Methods of measuring the concentration of wealth” Publications of the American Statistical Association, 9, 209-219.

Maasoumi, E. (1986) “The Measurement and decomposition of multidimensional inequality” Econometrica 54, 991-997.

Maasoumi, E., Nickelsburg, G. (1988) “Multivariate measures of well-being and an analysis of inequality in the Michigan data” Journal of Business and Economic Statistics 6, 327-334

Maasoumi, E., Zandvakili. S. (1986) “A class of generalized measure of mobility with applications” Economics Letters 22, 97–102.

Mandelbrot, B. (1960) “The Pareto-Levy law and the distribution of income” International Economic Review, 1, 79-106.

Mankiw, N.G. (2015) “Yes, r>g. So what?” American Economic Review, Papers and Proceedings 105, 43-47

Marshall, A.W., Olkin, I., Arnold, B.C. (2011) Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, (2nd ed.). Springer, New York.

Martínez, R. (2012) “Inequality and the new human development index”. Applied Economics Letters 19, 533-535.

McDonald, J.B. (1984) “Some generalized functions for the size distribution of income”, Econometrica 52, 647-663.

McGillivray, M., Markova, N. (2010) “Global inequality in wellbeing dimensions” Journal of Development Studies 46, 371-378.

Milanovic, B. (2005) Worlds Apart: Measuring International and Global Inequality. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Mosler, K. (2002) Multivariate Dispersion, Central Regions and Depth: The Lift Zonoid Approach. Lecture Notes in Statistics, 165. Springer-Verlag, Berlin.

Nalbach-Leniewska, A. (1979) “Measures of dependence of the multivariate log-normal distribution” Math. Oper.forsch., Ser. Stat. 10, 381-387.

Palma, J.G. (2011) “Homogenous middles vs. heterogenous tails, and the end of the “inverted-U”: It’s all about the share of the rich” Development and Change 42, 87-153.

Pareto, V. (1897) Cours d’economie Politique, Vol. II. F. Rouge, Lausanne.

Parker, S.C. (1999) “The generalised beta as a model for the distribution of earnings” Economics Letters 62, 197- 200.

Pereira, E.J.A.L., da Silva, M.F., Pereira, H.B.B. (2017) “Econophysics: Past and present” Physica A, 473, 251-261

Pigou, A.C. (1912) Wealth and Welfare. Macmillan, London

Piketty, T. (2014) El Capital en el Siglo XXI. Fondo de Cultura Económica de España, Madrid.

Prieto, F., Sarabia, J.M. (2017) “A generalization of the power law distribution with nonlinear exponent” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 42, 215-228.

Prieto, F., Sarabia, J.M., Sáez, A.J. (2013) “Modelling major failures in power grids in the whole range” International Journal of Electrical Power and Energy Systems 54, 10-16.

Rasche, R.H., Gaffney, J., Koo, A.Y.C., Obst, N. (1980) “Functional forms for estimating the Lorenz curve” Econometrica, 48, 1061-1062.

Ravalion, M. (2004) “Competing concepts of inequality in the globalization debate” En S. Collins y C. Graham (Eds.), Bookings trade forum 2004. Brookings Institution.

Remuzgo, L., Trueba, C. (2017) “Statistical polarization in greenhouse gas emissions: theory and evidence” Environmental Pollution 230, 291-301.

Remuzgo, L., Trueba, C., Sarabia, J.M. (2016) “Evolution of the global inequality in greenhouse gases emissions using multidimensional generalized entropy measures” Physica A 444, 146-157.

Roemer, J.E. (1998) Equality of opportunity, Harvard University Press.

Runciman, W.G. (1966) Relative Deprivation and Social Justice. Routledge and Kegan Paul, London.

Salem, A. B., Mount, T. D. (1974) “A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density” Econometrica 42, 1115-1127.

Sarabia, J.M. (1997) “A hierarchy of Lorenz curves based on the generalized Tukey’s lambda distribution” Econometric Reviews 16, 305-320.

Sarabia, J. M., Castillo, E., Pascual, M., Sarabia, M. (2005) “Mixture Lorenz

Curves” Economics Letters 89, 89-94.

Sarabia, J.M., Castillo, E., Pascual, M., Sarabia, M. (2007) “Bivariate income distributions with lognormal conditionals” Journal of Economic Inequality, 5, 371-383.

Sarabia, J.M., Castillo, E., Slottje, D.J. (1999) “An ordered family of Lorenz curves” Journal of Econometrics 91, 43-60.

Sarabia, J.M., Castillo, E., Slottje, D.J. (2001) “An exponential family of Lorenz curves” Southern Economic Journal 67, 748-756

Sarabia, J.M., Jordá, V. (2013) “Modeling bivariate Lorenz curves with applications to multidimensional inequality in well-being” Fifth ECINEQ Meeting, Bari, Italy, 2013.

Sarabia, J.M., Jordá, V. (2014a) “Bivariate Lorenz curves based on the Sarmanov-Lee distribution” In Topics in Statistical Simulation, V.B. Velas, S.Mignani, P. Monari, L. Salmano Edit., Springer, New York.

Sarabia, J.M., Jordá, V. (2014b) “Explicit expressions of the Pietra index for the generalized function for the size distribution of income” Physica A 416, 582-595.

Sarabia, J.M., Jordá, V., Remuzgo, L. (2017) “The Theil indices in parametric families of income distributions - A short review”. The Review of Income and Wealth 63, 867-880.

Sarabia, J.M., Jordá, V., Trueba, C. (2017) “The Lamé class of Lorenz curves” Communications in Statistics, Theory and Methods 46, 5311-5326.

Sarabia, J.M., Pascual, M. (2001) “Rankings de distribuciones de renta basados en curvas de Lorenz ordenadas: un estudio empírico” Estudios de Economía Aplicada 19, 151-169.

Sarabia, J.M., Prieto, F. (2009) “The Pareto-positive stable distribution: A new descriptive model for city size data” Physica A 388, 4179-4191.

Science (2014) “Special Issue. The science of inequality” 23, Mayo 2014.

Sen, A. (1973) On Economic Inequality. Oxford University Press.

Sen, A. (1976) “Poverty: an ordinal approach to measurement” Econometrica 44, 219-231.

Sen, A. (1985) “Commodities and Capabilities” North-Holland, Amsterdam.

Sen, A. (2001) “La desigualdad económica” Edición ampliada con un anexo fundamental de James E. Foster y Amartya Sen. Fondo de Cultura Económica, México.

Seth, S. (2013) “A class of distribution and association sensitive multidimensional welfare indices” Journal of Economic Inequality 11, 133–162.

Shorrocks, A.F. (1983) “Ranking income distributions” Economica, 50, 3-17.

Shorrocks, A.F. (1984) “Inequality decomposition by population subgroups” Econometrica 52, 1369-1385.

Shorrocks, A.F., Foster, J.E. (1987) “Transfer sensitive inequality measures” Review of Economic Studies 54, 485-497.

Silverman, B.W. (1986) Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Chapman and Hall and CRC Reference

Simon, H.A. (1955) “On a class of skew distribution functions” Biometrika 52, 425-440.

Solt, F. (2009) “Standardizing the world income inequality database” Social Science Quarterly 90, 231-242.

Stiglitz, J.E., Sen, A., Fitoussi, J. (2009) “Report by the Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress”, Paris.

Streeten, P. (1994) “Human development: means and ends” American Economic Review 84, 232-237.

Taguchi, T. (1972) “On the two-dimensional concentration surface and extensions of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case-I” Annals of Institute of Statistical Mathematics 24, 355-382.

Theil, H. (1967) Economics and Information Theory. North Holland, Amsterdam.

Tsui, K.Y. (1995) “Multidimensional generalizations of the relative and absolute inequality indices: the Atkinson-Kolm-Sen approach” Journal of Economic Theory 67, 251-265.

Tsui, K.Y. (1999) “Multidimensional inequality and multidimensional generalized entropy measures: an axiomatic derivation” Social Choice and Welfare 16, 145-157.

Villaseñor, J.A., Arnold, B.C. (1989) “Elliptical Lorenz curves” Journal of Econometrics 40, 327-338.

World Economic Forum (2017) “Informe de riesgos mundiales 2017”, 12ª Edición, Ginebra.

WRI (2014) World Resources Institute Climate Analysis Indicators Tool, Version 9.0, World Resources Institute, Washington DC, USA, 2014.

Yitzhaki, S. (1979) “Relative deprivation and the Gini coefficient” The Quarterly Journal of Economics 93, 321-324.

Yitzhaki, S. (1983) “On an extension of the Gini inequality index” International Economic Review 24, 617-628.

Laudatio y Discurso de contestación por la Académica de Número

EXCMA. SRA. DRA. MONTSERRAT GUILLÉN ESTANY

EXCMA. SRA. DRA. MONTSERRAT GUILLÉN ESTANY

Excelentísimo Señor Presidente
Excelentísimos Señores Académicos
Señoras y Señores

Deseo que mis primeras palabras sean de agradecimiento a esta Real Corporación por haberme otorgado el privilegio de dar respuesta al nuevo académico. Al honor de haber sido elegida para esta tarea se une mi entusiasmo por dar contestación a un discurso de excepcional calidad y por contribuir a que nuestra Academia se expanda incorporando a una personalidad de la talla del Prof. Dr. José María Sarabia Alegría, quien ha sido clave en el análisis cuantitativo de la desigualdad en las ciencias económicas y financieras y que sin lugar a duda va a serlo en el devenir de esta Institución.

Inicio mi recorrido glosando la magnífica trayectoria del recipiendario, para pasar seguidamente al contenido de su discurso y terminar presentando su perfil más humano, no sin antes decir que va a ser completamente imposible relatar con la merecida exactitud sus abundantes contribuciones científicas en el espacio de tiempo del que disponemos. La descripción de los méritos que aporta va a revelarnos que nos hallamos ante toda una autoridad académica.

José María Sarabia Alegría nació en Santander en 1963 y es Catedrático de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales en la Universidad de Cantabria desde 2001. Además, es Catedrático de Estadística e Investigación Operativa en la Universidad Complutense de Madrid desde el año 2000, en este último caso actualmente en excedencia.

Se licenció en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Valladolid en 1986 y obtuvo el grado de doctor en la Universidad de Cantabria en 1989, habiendo realizado estudios de postgrado en la Universidad Politécnica de Valencia. Más allá de nuestras fronteras, ha sido profesor visitante en lugares de indiscutible renombre como la London School of Economics, el Imperial College de Londres y el ICMA (International Capital Market Association), centro que pertenece a la Universidad de Reading en el Reino Unido.

Hoy es el director del grupo de Investigación sobre "Métodos Cuantitativos en Economía y Empresa" en la Universidad de Cantabria e investigador asociado del grupo de Análisis de Riesgos del Instituto de Investigación en Economía Aplicada de la Universidad de Barcelona.

En los últimos años el nuevo académico ha sido el Presidente del Comité de Ciencias Económicas y Empresariales de la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI) de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación, del que previamente había formado parte como vocal. Ha sido miembro de la Comisión de Investigación de la Universidad de Cantabria entre 2008 y 2016, así como miembro de la Comisión de Doctorado en la misma Universidad.

A lo largo de su carrera, ha recibido numerosos premios y reconocimientos, entre los que destaca en 2008 el Premio Internacional de Investigación en Seguros "Julio Castelo Matrán", concedido por Fundación Mapfre. Asimismo, en el año 2011 fue galardonado con el Premio de Investigación del Consejo Social de la Universidad de Cantabria para Investigadores Senior. En 2009 fue seleccionado por el programa Nacional "Salvador de Madariaga" para estancias de movilidad de profesores e investigadores de referencia en centros de investigación extranjeros. Asimismo, fue becado por el "Erudite Program" en el Kerala State Higher Education Council de la India en el año 2015.

Ha publicado más de ciento setenta artículos de investigación, la mayor parte en revistas catalogadas de impacto. En el ámbito de la desigualdad económica destacan sus muy conocidas contribuciones a la modelización de curvas de Lorenz, y más concretamente su famoso artículo titulado "An ordered family of Lorenz curves", publicado en 1999 en la prestigiosa revista *Journal of Econometrics*. Esta es una de sus obras más citadas y ha servido de base para un sinfín de autores. Otros de sus trabajos han sido publicados en revistas líderes en el área de Economía entre las que destacan algunas de la misma, o mayor calidad si cabe, que el propio *Journal of Econometrics,* tales como *Review of Income and Wealth*, *Journal of Economic Inequality*, *Journal of the American Statistical Association*, *Statistical Science*, *Econometric Reviews*, *Insurance: Mathematics and Economics* y *Journal of Risk and Insurance*.

Asimismo, el recipiendario ha escrito nueve libros científicos como autor, tres como editor y otros ocho textos universitarios, destacando la publicación en editoriales internacionales como John Wiley y Springer Verlag, cuyo prestigio es sobradamente conocido. Cabe señalar en especial, su aportación "Conditional specification of statistical models" en un libro de la Springer Series in Statistics, donde se introduce una nueva clase de distribuciones multivariantes con múltiples aplicaciones en Economía, que ha recibido un reconocimiento unánime en nuestro ámbito. En relación a los libros de texto, es autor de las mejores editoriales, destacando su obra sobre *Estadística Actuarial: Teoría y Aplicaciones*, publicada en Pearson-Prentice Hall en 2006.

Como colofón a los anteriores méritos, debo destacar que sus artículos y obras científicas en general han sido referenciados cerca de cuatro mil veces, y su presencia en los listados de publicaciones sigue creciendo de forma acelerada con unos índices bibliométricos que se encuentran muy por encima de lo que es habitual en las ciencias económicas y financieras a nivel mundial.

Su actividad investigadora le ha llevado también a recibir diversas invitaciones de universidades y centros de investigación nacionales y extranjeros. Ha realizado seminarios y conferencias invitadas en universidades de Canadá, en la McMaster University, la McGill University y la UQAM, en Montréal; en el Reino Unido, en la University of Reading y la Nottingham Trent University; en Alemania, en la University of Göttingen; en Suiza, en la Université de Lausanne y la Université de Genève; en Japón, en el Institute of Statistical Mathematics de Tokyo y en India, en la Cochin University of Science and Technology, sin olvidar sus numerosas charlas en las universidades españolas.

Ha participado en decenas de proyectos de investigación de carácter competitivo, en muchos de ellos como investigador principal. Algunos de estos proyectos han sido financiados por el Plan Nacional de Investigación, y también por el Instituto de Estudios Fiscales y distintas fundaciones para la promoción de la investigación. En la actualidad es el Investigador Principal del proyecto coordinado sobre “Modelización Paramétrica y Semi-Paramétrica de Riesgos Multivariantes: Especificación, Estimación y Contraste”, dentro del Programa Estatal de Fomento de la Investigación Científica y Técnica de Excelencia. Asimismo ha desarrollado contratos de investigación financiados por empresas como EON España, Nuclenor y Cedex.

Nuestro nuevo académico es además editor asociado de diversas revistas científicas: *Communications in Statistics* (en las tres series), *Journal of Statistical Distributions and Applications*, *SORT-Statistical Operations Research Transactions*, *TEST*, *Journal of Probability and Statistics* y *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*. Es especialmente significativo destacar que también ha sido editor asociado de revistas como el Journal of Banking and Finance y el Journal of Statistical Planning and Inference. Además de todo ello, ha realizado tareas de revisión como evaluador de más de cuarenta revistas científicas diferentes en el ámbito de la Economía.

Entre otras numerosas facetas que acreditan su excelencia, nuestro académico ha sido conferenciante plenario por invitación en congresos nacionales e internacionales, incluyendo la conferencia mundial de la *International Actuarial Association*, ASTIN 2011; *Fifth Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance* y el congreso de *Dependence Modelling* que reúne anualmente a un exclusivo grupo de investigadores elegidos entre los más influyentes del mundo.

En la actualidad es evaluador y experto de distintas agencias públicas de evaluación, incluyendo ANECA, AGAUR en Cataluña, DEVA en Andalucía, y las correspondientes en Galicia y la Comunidad de Madrid. Ha colaborado en evaluaciones de la *National Science Foundation* y además ha participado en la selección de profesores en universidades de todo el mundo, incluyendo el Reino Unido, los Estados Unidos de América y los Emiratos Árabes.

En total, ha dirigido cinco tesis doctorales, de las que una recibió el Premio Extraordinario de doctorado y dos el Premio del Consejo Social de la Universidad de Cantabria.

En esencia, con todos y cada uno de los anteriores logros, el Dr. José María Sarabia es un referente entre los investigadores españoles de la Economía, reconocido tanto en nuestro país como internacionalmente. Se le atribuye haber realizado grandísimas aportaciones a la teoría de distribuciones y al análisis multivariante aplicados a la Economía y la Empresa, así como al análisis de los riesgos. Sólo mentes excepcionales como la que él mismo atesora, pueden ejercer esta enorme influencia en nuestro ámbito de conocimiento.

Permitirá el Sr presidente que me haya tomado la licencia de seleccionar tan sólo los pilares fundamentales de una biografía repleta de éxitos, la de nuestro protagonista, el profesor Dr. José María Sarabia.

Sr. Presidente, en esta segunda parte de mi intervención tengo el deber de afirmar que el discurso cuya síntesis hemos tenido el placer de haber escuchado, constituye sólo una pequeña muestra del legado que nos aportan las contribuciones científicas que el nuevo académico ha realizado a lo largo de toda su trayectoria.

Nuestra Real Institución cuenta, a partir de ahora, con un gran especialista que va a permitirnos mejorar en muchísimos de los grandes objetivos que nos hemos planteado, especialmente a nivel internacional, para lograr una sociedad más justa y un mundo mejor.

El discurso aborda el tema de la desigualdad económica ya en pleno siglo XXI vertebrándolo en tres ejes fundamentales: la definición de desigualdad, su medición en casos de magnitudes económicas unidimensionales y, finalmente, su extensión a la cuantificación de la desigualdad en escenarios más complejos, cuando se persigue una visión holística, que tenga en cuenta factores tanto cuantitativos como cualitativos, así como variables claramente objetivables como los ingresos frente a conceptos más abstractos como la felicidad. A través del impecable desarrollo del contenido más complejo, llegamos a comprender el significado de los zonoides de Lorenz, que son la expresión más elaborada y más actual para la cuantificación de la desigualdad.

El discurso es una muestra muy evidente de quien es capaz de mostrarnos la importancia histórica que ha tenido la medición de la desigualdad en el pensamiento económico. A través de una acertada introducción, el relato nos sitúa en la zona de confort que es el índice de Gini, la medida de desigualdad que más se utiliza. Además, se adentra en la medición de la desigualdad en la que el propio recipiendario es protagonista del avance de la investigación y no olvida aquellos conceptos más recientes, en los que se están viendo mayores progresos; e incluso temas que manifiestamente constituyen una oportunidad para la expansión en el futuro de las ciencias económicas y financieras.

Todos los organismos internacionales utilizan barómetros de desigualdad para fijar objetivos a largo plazo, o para evaluar el impacto a corto plazo de políticas de estímulo que conduzcan a una mejora del bienestar. Sería imposible relatar ahora, con la necesaria exhaustividad, cómo el tema que se ha tratado hoy subyacen en un gran número de iniciativas tan relevantes como el programa "Objetivos de Desarrollo del Milenio" de Naciones Unidas, cuya principal misión es conseguir la estabilidad en el planeta. Los retos allí fijados en 2002 incluyen ocho ejes: pobreza, enseñanza, igualdad de género, reducción de la mortalidad de los niños, mejora de la salud materna, enfermedades como el VIH/SIDA y la malaria, sostenibilidad del medio ambiente y alianza global para el desarrollo. Pero para el año 2030, la ONU fijó además nuevas metas sobre la producción y consumo sostenibles y, como no podía ser de otra manera, introdujo la reducción de las desigualdades. Nos hallamos, pues, ante uno de los que han sido señalados como los objetivos prioritarios de la humanidad.

Afirma el propio recipiendario que quien marcó su inicio en esta investigación fue el profesor en la Universidad de California, Riverside, Barry C. Arnold a través del profesor Castillo a quien mencionaremos con más detalle en el último apartado.

Arnold no sólo ha sido el padre de muchos de los conceptos que aquí hemos tratado, sino que es a él en tanto que también destacado co-autor del recipiendario, a quien debemos muchos de los fundamentos que dan lugar a las variantes sobre la medición de la desigualdad que marcarán los próximos pasos en esta disciplina.

El nuevo académico abre la puerta a un futuro que va mucho más allá porque nuestra sociedad reclama indicadores que sean capaces de sintetizar y monitorizar los elevados volúmenes de datos que genera la economía digital. Será a través de las extensiones que hoy nos ha presentado el profesor Sarabia como podremos plantear índices que puedan generarse inmediatamente, en tiempo real y que puedan agregar y resumir del amplio espectro de información que proporcionan las grandes bases de datos actuales.

Pero no únicamente este académico nos ha anticipado los avances que se producirán en las próximas décadas, desde su conocimiento de causa y desde una rica perspectiva, sino que el discurso nos introduce en los elementos de mayor rigurosidad que van a permitirnos hablar de desigualdad con la debida exactitud.

Me atrevería a decir que ningún economista puede eludir el hecho de tratar en un momento u otro el tema de la desigualdad debido a la importancia mayúscula que ha adquirido en nuestra disciplina. Debería citar a James Heckman, Peter Diamond, Jean Tirole, Erik Maskin, todos ellos galardonados en Economía con el premio en honor a Alfred Nobel, quienes reunidos en la preciosa ciudad alemana de Landau el pasado mes de agosto alertaban de la necesidad de hallar las claves de la paradoja de la desigualdad global: mientras globalmente decrece la desigualdad, es aparentemente contradictorio que aumente internamente dentro de la mayoría de países.

Hoy hemos escuchado por boca de quien ya representa a esta Real Corporación, nuestro pequeño grano de arena en un debate que se prevé tan complejo como esencial, y que solo podrá ser abordado si se erige sobre la sólida base cuantitativa que se nos ha propuesto. A mi entender, el brillante discurso constituye un valiosísimos punto de partida, además de una enseñanza y, en definitiva, un legado por sí mismo.

Y llegados a este punto, le ruego finalmente Sr. Presidente que me conceda unos minutos más para poder destacar algunos de los rasgos más personales así como mi propio punto de vista sobre el nuevo académico, cuyo ingreso en nuestra Real Corporación consagramos en este mismo acto.

El profesor Sarabia ha dedicado ya más de tres décadas completas de su vida a la investigación, inspirado sin lugar a dudas por la generosidad y magnitud de quién fue su maestro, amigo y admirado, el doblemente Académico de las Reales Academias de Ingeniería y de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales del Instituto de España, el Excmo. Sr. Dr. Enrique Castillo Ron. Se reúnen en ambas personalidades, la perseverancia y el talento necesario para conseguir cuantos objetivos se planteen y una convicción que rebasa límites.

Un destacado miembro del equipo del profesor Sarabia y excelente persona, el Dr. Faustino Prieto Mendoza, ha sido testimonio de esa característica tan singular del nuevo académico, que su discípulo resume precisamente como una mezcla de tesón y optimismo.

Muy posiblemente en la ilusión por alcanzar metas, le ha ayudado saber compaginar su gran dedicación a la ciencia con el cariño hacia su familia. Nuestro nuevo miembro, no sólo se deshace en alabanzas por sus colegas, por los trabajos que lee y por todo aquello que le apasiona, sino que si hay alguien a quien el académico admira es a sus más allegados en el entorno privado. En primer lugar, a su esposa, de quien elogia resistencia ante la adversidad entre otras muchísimas fortalezas y en segundo lugar, a sus hermanas, grandes referentes en su vida. Pero mención muy especial deben recibir sus dos hijos: José María, nacido en 1998, y Belén, nacida en el año 2000 por quienes siente un infinito amor y estoy completamente segura que daría absolutamente todo.

Siempre me ha impresionado la forma como nuestro académico destaca lo bueno y se interesa por los progresos, en particular de los estudiantes y de los investigadores más jóvenes. Poco le importa que otros colegas desdeñen a los inexpertos, él apostará por ellos y les conducirá a los puestos más altos, acompañándoles y cediéndoles protagonismo siempre que sea posible. Nuestro nuevo miembro, profundiza como muy pocas personas lo hacen, y sabe trabajar con conceptos intrincados. Además, tiene otra característica que impacta siempre: su inmenso calibre intelectual. Es fabuloso charlar con él, por su capacidad de entusiasmarse y por acceder a fuentes muy poco conocidas que él explica con naturalidad, como si hiciera tan solo cinco minutos que las acabara de leer. Es una excepcional cualidad que llamamos sabiduría.

No quiero olvidarme tampoco de algunas otras virtudes que le acompañan, como la paciencia, autoridad, pasión por el progreso de la ciencia en general, a las que hay que sumar la estela de sus padres, y en concreto el recuerdo entrañable de su progenitor, quien también catedrático de universidad supuso un ejemplo de vida. Alguien a quien tiene que agradecer la elección del camino que hoy le ha conducido hasta aquí. De no ser por los sabios consejos de su padre, el homónimo Dr. Sarabia Alzaga, él, su hijo, no hubiera escogido la estadística y luego la economía, las dos disciplinas que han marcado su verdadera vocación.

Permítame añadir, para terminar, un detalle más a los rasgos fundamentales que describen la identidad de nuestro nuevo miembro. Pocas aficiones puede permitirse quien tanto tiempo ha dedicado al estudio, y peligra siempre que del exceso de este último, devenga un prematuro cansancio, pero este no es el caso de nuestro académico, quien sigue apreciando un buen concierto y además conserva profundas amistades que, y aquí ya puedo afirmar en primera persona, somos cómplices y nos alegramos de compartir con él momentos, tan estelares como lo es el día de hoy.

Y acabo. Es una gran satisfacción que la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras se enriquezca con el ingreso del académico correspondiente por la Comunidad Autónoma de Cantabria, el Ilustrísimo Sr. Dr. José María Sarabia Alegría. Nos congratulamos de poder incorporarlo entre nosotros como buen merecedor de este reconocimiento. Con mi completa adhesión y en nombre de todos los miembros, le transmito nuestra más fraternal bienvenida.

Gracias por su atención.

Real Academia
de Ciencias Económicas y Financieras

PUBLICACIONES DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y FINANCIERAS

*Las publicaciones señaladas con el simbolo
están disponibles en formato PDF en nuestra página web:
https://racef.es/es/publicaciones

**R.A.C.E.F. T.V. en o

Los símbolos y indican que hay un reportaje relacionado
con la publicación en el canal RACEF TV

ANEXO

REPORTAJE FOTOGRÁFICO DEL ACTO DE INGRESO

21 de junio de 2018

Ilmo. Sr. Dr. José María Sarabia Alegría (Académico Correspondiente para Cantabria)

Diploma acreditativo de la elección del Dr. José María Sarabia como Académico
Correspondiente para Cantabria

El Dr. Sarabia aporta su firma al Libro de Honor en compañía del Presidente y de los Académicos (de izquierda a derecha); Dr. Fernando Casado, Dra. Anna Maria Gil, Dr. Vicente Liern, Dr. Ramón Poch, Dr. Jaime Gil, Dra. Montserrat Guillén.

El Presidente Jaime Gil Aluja impone la medalla académica en presencia de los Dres. Anna Maria Gil y Fernando Casado.

El nuevo Académico para Cantabria, Dr. José María Sarabia Alegría, pronunció su Discurso titulado 'Desigualdad Económica y Zonoides de Lorenz', una interesante contribución al análisis cuantitativo de la disparidad económica.

Académicos y público asistente a la ceremonia de ingreso.

El Dr. Sarabia Alegría en la fotografía de familia, junto al Presidente Jaime Gil y el conjunto de Académicos que lo acompañaron en su acto de recepción como nuevo miembro de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras.

Calafell Lafoto©

El nuevo Académico estuvo arropado por familiares y amigos en el día de su ingreso.