Real Academia
de Ciencias Económicas y Financieras

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS ECONOMICAS Y FINANCIERAS

COTIZACION, DURATION Y CONVEXIDAD

Por Alfonso Rodríguez Rodríguez
Académico Numerario

Barcelona, 1994

COTIZACION, DURATION Y CONVEXIDAD

INTRODUCCION

En algunos estudios monográficos, que habitualmente se realizan dentro de la genérica denominación de *FINANZAS,* el riguroso análisis *financiero-matemático* es frecuentemente sustituido por un elemental cálculo financiero muy al margen del desarrollo alcanzado por la moderna *MATEMATICA FINANCIERA*. De este modo, a veces se omite un deseable rigor conceptual y otras se ignora el análisis financiero profundo que esta disciplina permite. Conclusiones, aparentemente complejas en estos estudios, son muy sencillamente deducibles para la Matematica Financiera actual. La presente COMUNICACIÓN pretende mostrar esta eficacia respecto a los instrumentos del análisis financiero conocidos como *duration* y *convexidad*, especialmente útiles en el estudio de la sensibilidad de la cotización de un bono u otros activos financieros de renta fija ante la volatilidad del tipo de interés.

La *cotización* o precio en los mercados financieros puede estimarse como el valor actual de la corriente de ingresos futuros ciertos que el bono o el activo implican, determinado conforme a la estructura de tipos de interés (ETTI) en atención a los plazos de los vencimientos de tales ingresos. A partir de la cotización es también posible determinar el tipo de interés como una tasa implícita, denominándose entonces *tasa de rendimiento actuarial* o TIR.

En su concepción inicial la TIR no es un parámetro del mercado como lo es el tipo de interés, es decir, externo a la operación financiera y resultante de las numerosas variables económicas que influyen y determinan el ambiente financiero. Por el contrario, es un parámetro interno de la misma operación que pretende medir su rendimiento, aparte de su dudoso éxito en conseguirlo. Su naturaleza no es la de un dato exógeno y antecedente del análisis financiero, como corresponde al tipo de interés del mercado, sino la propia de un parámetro utilizado para la descripción financiera del rendimiento de la operación, pudiendo entonces diferir del tipo de interés del mercado si existe un rendimiento neto extraordinario. Solamente es intérprete del tipo de interés cuando se deduce de la cotización del activo financiero en el propio mercado. Esta observación parece necesaria para un conocimiento correcto de la función que corresponde al tipo de interes en la cotización, que es determinante o causa de la misma, y no su efecto o resultado. Ello independientemente de poder ser deducido como una tasa implícita o TIR del activo a través de su cotización.

Tal naturaleza causal del tipo de interés en la cotización, unida a su volatilidad como magnitud resultante de aquellas de naturaleza macroeconómica que la condicionan e influencian, fundamenta la *sensibilidad* de la cotización ante sus variaciones coyunturales, cuyo análisis es objeto de revisión en la COMUNICACIÓN presente.

COTIZACION Y LEY FINANCIERA DE VALORACION

La ley financiera que determina la cotización o valoración de un activo financiero es fijada por las condiciones del mercado de renta fija para los activos sin riesgo del mismo horizonte o plazo de amortización. Habitualmente es definida por un régimen financiero de interés compuesto, con tipo de interés i y periodo de capitalización p, referenciado en la ETTI según el plazo que determina la inmovilización financiera.

Los dos parámetros i y p del régimen financiero de interés compuesto definen el *precio financiero estricto*[1]

$$\rho = \frac{1}{p} \ln(1+i.p)$$

El factor financiero de descuento, para un cierto diferimiento T, es entonces

$$(1+i.p)^{-T/p} = e^{-\rho.T}$$

el cual se independiza en el segundo miembro de los parámetros *i* y *p* asociados al régimen financiero, pasando a depender tan sólo del parámetro ρ, determinante de la ley financiera estacionaria a la que corresponde el régimen financiero[2].

Formalicemos la corriente de ingresos futuros, derivados del activo financiero cotizado, mediante un conjunto finito de *n* capitales financieros ciertos[3], expresión de la distribución temporal de la cuantía del ingreso total pendiente

---

[1] El *precio estricto* ρ reconoce la continuidad del servicio financiero y del devengo de su precio, independientemente de que su pago sea anticipado, aplazado, o de reconocimiento periódico en cuentas. El precio estricto difiere así del tipo de interés, mero parámetro del cálculo financiero siempre ligado a un vencimiento, cuyo significado superpone al precio estricto otro precio adicional por aplazamientos o anticipaciones efectivas de los intereses respecto a su estricto devengo. Por ello, en los regímenes periódicos el parámetro i sólo tiene un significado financiero preciso si va unido a la consideración del periodo de capitalización p, que le acompaña.

[2] El *régimen financiero* define o asocia una ley financiera de equilibrio o valoración financiera que no es, a su vez, sino la definición formal de la relación de sustitución entre *cuantía* y *liquidez* que domina el mercado. Si es *estacionaria* (el precio es constante durante todo el plazo de la operación) basta para definirla un sólo parámetro A, tal que es ρ=lnA.

[3] El *capital financiero* (C,T) formaliza *una capacidad adquisitiva* y *su liquidez.* La primera componente C es medida por la *cuantía* monetaria. La segunda componente T, por el *diferimiento* temporal hasta su disponibilidad.

$$\{(C_r, T_r)\};\ r=1,2,..n$$

y representable en un eje temporal del siguiente modo,

$$\begin{array}{cccccccccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & \ldots\ldots & C_r & \ldots\ldots & C_n & \\ \hline 0 & T_1 & T_2 & T_3 & \ldots\ldots & T_r & \ldots\ldots & T_n & \tau \end{array}$$

La cotización es el valor financiero actualizado del conjunto referido, siendo entonces la función de ρ

$$V(\rho) = \sum_{r=1}^{n} C_r . e^{-\rho . T}$$

Estudiemos el comportamiento analítico de esta función a través de sus derivadas sucesivas,

$$\frac{dV(\rho)}{d\rho} = - \sum_{r=1}^{n} C_r . T_r . e^{-\rho . T} < 0$$

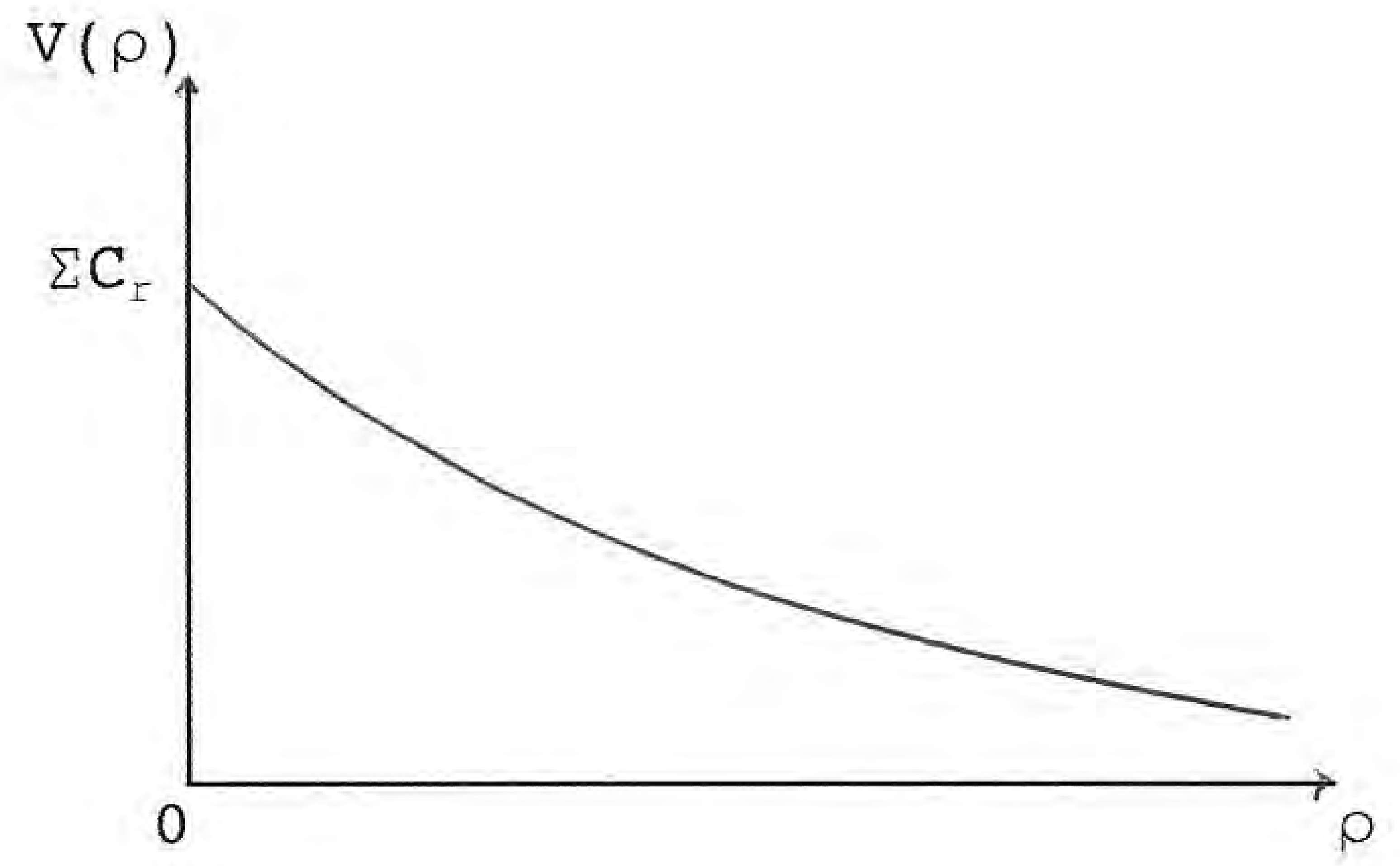
$$\frac{d^2V(\rho)}{d\rho^2} = \sum_{r=1}^{n} C_r . T_r^{\,2} . e^{-\rho . T} > 0$$

$$\frac{d^3V(\rho)}{d\rho^2} = - \sum_{r=1}^{n} C_r . T_r^{\,3} . e^{-\rho . T} < 0$$

....

$$\frac{d^nV(\rho)}{d\rho^n} = (-1)^n \sum_{r=1}^{n} C_r . T_r^{\,n} . e^{-\rho . T}$$

La negatividad de la primera derivada nos informa del decrecimiento de la función cotización respecto a la variable ρ. La positividad de la segunda, de su caracter convexo. Finalmente, la negatividad de la tercera, del decrecimiento de dicha convexidad ante valores crecientes de ρ. Todo ello, dentro del dominio $\mathbf{R}^+$ de la variable, pudiendo ser representada la función cotización del siguiente modo



debiendo destacarse el caracter asintótico de la función al semieje positivo de las abscisas.

"DURATION" Y SENSIBILIDAD

La derivada *semielástica* -semilogarítmica- de la función cotización $V(\rho)$ respecto a su variable, en valor absoluto, es denominada *duration*, describiendo financieramente la variación relativa de la cotización ante una variación absoluta del precio ρ. Es su expresión

$$D = -\frac{1}{V(\rho)}\frac{dV(\rho)}{d\rho} = -\frac{d[\ln V(\rho)]}{d\rho} = \frac{\Sigma C_r . T_r . e^{-\rho . T}}{\Sigma C_r . e^{-\rho . T}}$$

interpretándose, en el concepto dado por Macaulay[4], como un plazo medio ponderado de un bono -sustitutivo de la maduración o plazo hasta la amortización, siendo mas explicativo de la cotización que éste-, posteriormente reinterpretado por Hicks[5] como elasticidad de la cotización al tipo de descuento.

Los análisis referidos suponen que el periodo *p* de la capitalización compuesta es anual -por más que éste resulte excesivo y poco frecuente- existiendo, entonces, la siguiente relación entre el tipo de interés *i* y el precio estricto ρ,

$$\rho = \ln(1+i)$$

resultando

$$\frac{d\rho}{di} = \frac{1}{1+i}$$

La derivada *semielástica* de la cotización, en valor absoluto, ahora respecto al tipo de interés, es entonces

$$S = -\frac{d[\ln V(\rho)]}{d\rho}\frac{d\rho}{di} = \frac{D}{1+i}$$

---

[4] MACAULAY, F.R. New York. Columbia University Press. 1938.
[5] HICKS, J.R. Value and Capital. Oxford. Claredon Press. 1939.

siendo conocida como *sensibilidad* de la cotización o *duration modificada*, con el significado financiero de variación relativa de la cotización ante una variación absoluta del tipo de interés *i*.

La extensión, a las elasticidades totales, de tales instrumentos del análisis financiero conduce a las siguientes expresiones, respectivamente

$$\epsilon(\rho) = -D.\rho$$

$$\epsilon(i) = -S.i = -D\times\frac{i}{1+i}$$

las cuales explican suficientemente los parámetros que participan, directa y proporcionalmente, en la tendencia del comportamiento de las variaciones relativas de la cotización, ante las variaciones relativas de ρ, precio financiero, o bien ante las de *i*, tipo de interés del mercado. Son éstos: la *duration* D y el *precio financiero* ρ, en el primer caso, y la *sensibilidad* S y el *tipo de interés i,* en el segundo.

Las variaciones relativas de la cotización son, entonces,

$$\frac{dV}{V} = \epsilon(\rho)\frac{\Delta\rho}{\rho} = -D.\Delta\rho$$

$$\frac{dV}{V} = \epsilon(i)\frac{\Delta i}{i} = -S.\Delta i$$

mostrando este análisis una evidente revisión de las conclusiones obtenidas por Hopewell y Kaufman[6], quienes establecen la proporcionalidad de la variación relativa de la cotización a la *duration* ante la **variación relativa** del rendimiento del mercado, observándose que estrictamente lo es ante la **variación absoluta** de éste, o bien, la proporcionalidad a la *sensibilidad* ante la **variación absoluta** del tipo de interés, en vez de la **variación relativa**, en el segundo caso.

Todas las anteriores consideraciones han interpretado analíticamente la variación de la cotización mediante la **diferencial** de la función dV, en vez de hacerlo, con mas rigor, mediante el **incremento** ΔV.

PROPIEDADES DE LA FUNCION "DURATION"

La *duration*, en el sentido Macaulay-Hicks aquí referido, puede estudiarse como función del precio financiero ρ, o del tipo de

[6] Hopewell, M.H. y Kaufman, G.G. Bond Price Volatility and Term to Maturity (1985).

interés del mercado *i*, según nuestra preferencia se incline por la magnitud financiera estricta de la ley financiera, o por la empírica del régimen financiero del mercado. En cualquier caso, las propiedades son facilmente trasladables entre ambas una vez conocida la relación existente entre ellas. Por su destacada significación en los análisis de sensibilidad ante el riesgo de mercado, o volatilidad de los tipos de interés, examinamos aquí algunas de las propiedades de la función *duration*, que no son conocidas por los estudios convencionales y que son facilmente deducibles para el análisis matemático-financiero.

La función *duration*, para un conjunto finito de capitales $\{(C_r,T_r)\}$, r=1,2..n, es

$$D(\rho) = \frac{\Sigma C_r . T_r . e^{-\rho . T}}{\Sigma C_r . e^{-\rho . T}}$$

teniendo, entre otras, las propoedades siguientes:

1. CONTINUIDAD Y POSITIVIDAD

Es contínua y positiva para todo $\rho \in \mathbf{R}^+$.

2. ORDENADA EN EL ORIGEN

Para $\rho=0$ es

$$D(0) = \frac{\Sigma\ C_r . T_r}{\Sigma\ C_r} = B$$

coincidiendo con el valor de la duration en el *primer sentido*[7] dado por Macaulay.

3. ACOTAMIENTO

Sustituyendo T_r por T_1 y T_n, en la expresión de $D(\rho)$, se obtienen las siguientes cotas, inferior y superior, de la función duration

$$T_1 < D(\rho) < T_n$$

4. ASINTOTAS

Son

$$\lim_{\rho \to \infty} D(\rho) = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\Sigma C_r . T_r . e^{-\rho . T}}{\Sigma C_r . e^{-\rho . T}} = \lim_{\rho \to \infty} \frac{C_1 . T_1 . e^{-\rho . T}}{C_1 . e^{-\rho . T}} = T_1$$

$$\lim_{\rho \to -\infty} D(\rho) = \lim_{\rho \to -\infty} \frac{\Sigma C_r . T_r . e^{-\rho . T}}{\Sigma C_r . e^{-\rho . T}} = \lim_{\rho \to -\infty} \frac{C_n . T_n . e^{-\rho . T}}{C_n . e^{-\rho . T}} = T_n$$

5. RELACION CON LA EL DIFERIMIENTO MEDIO

Se deduce de la definición del *diferimiento medio* de un conjunto de capitales

---

[7] En la primera formulación, Macaulay define la duration ponderando los diferimientos de los capitales con las cuantías respectivas. Difiere de su segunda formulación, donde realiza la ponderación con los "valores actuales" de las citadas cuantías.

$$\mathbf{T}(\rho) = \frac{1}{\rho} \ln \frac{\Sigma C_r}{\Sigma C_r . e^{-\rho . T}} = \frac{\mathbf{C}}{V}$$

de cuya derivada

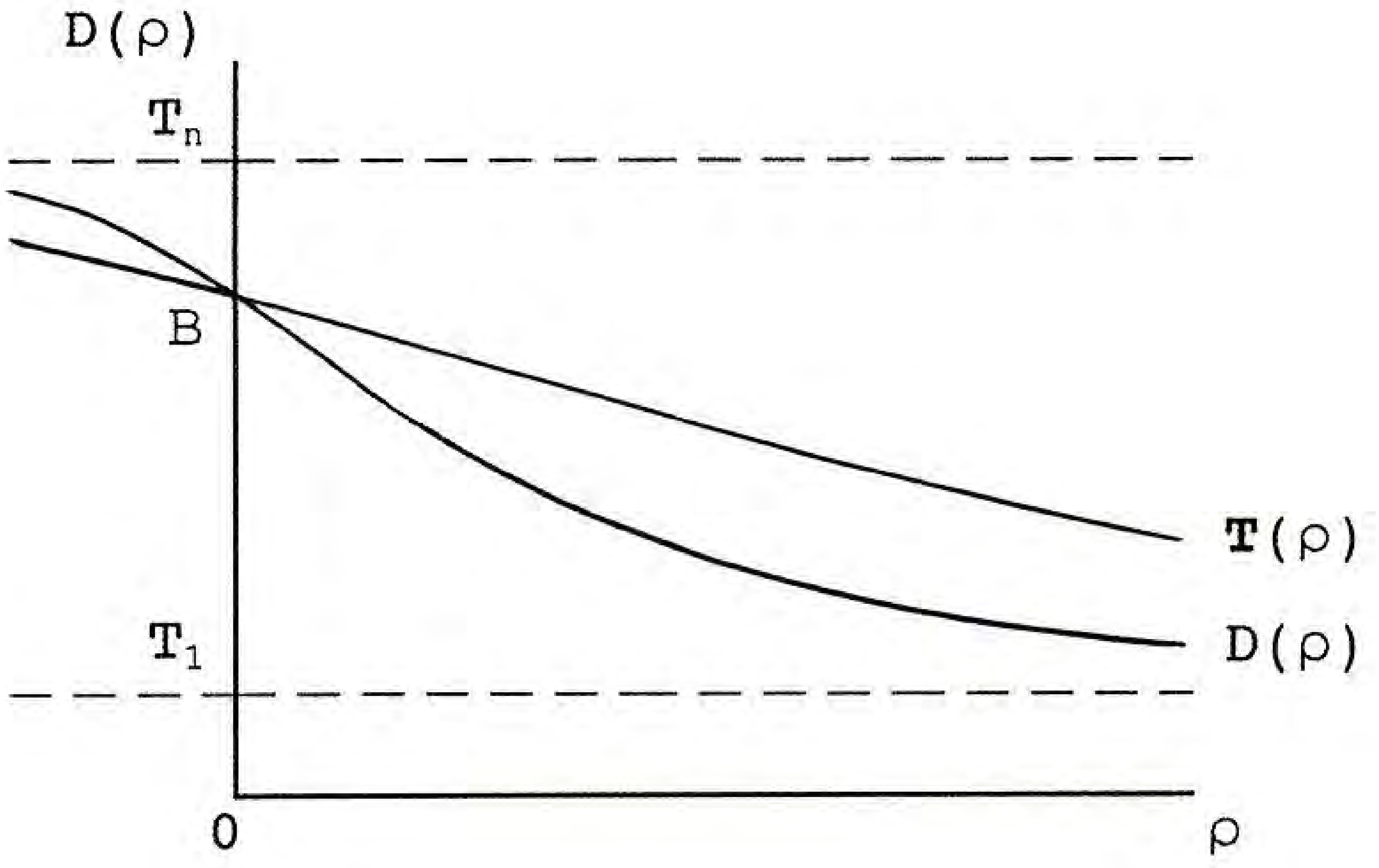
$$\mathbf{T}'(\rho) = \frac{1}{\rho} [D(\rho) - \mathbf{T}(\rho)]$$

se obtiene la siguiente relación con la *duration*

$$D(\rho) = \mathbf{T}(\rho) + \rho . \mathbf{T}'(\rho)$$

con la consecuencia de la coincidencia entre ambos parámetros en $\rho=0$, siendo los valores de la *duration* superiores o inferiores al *diferimiento medio*, para valores negativos y positivos de ρ respectivamente, considerado el caracter decreciente del diferimiento medio respecto a ρ.

Las propiedades anteriormente descritas permiten la siguiente representación gráfica de la función *duration*,



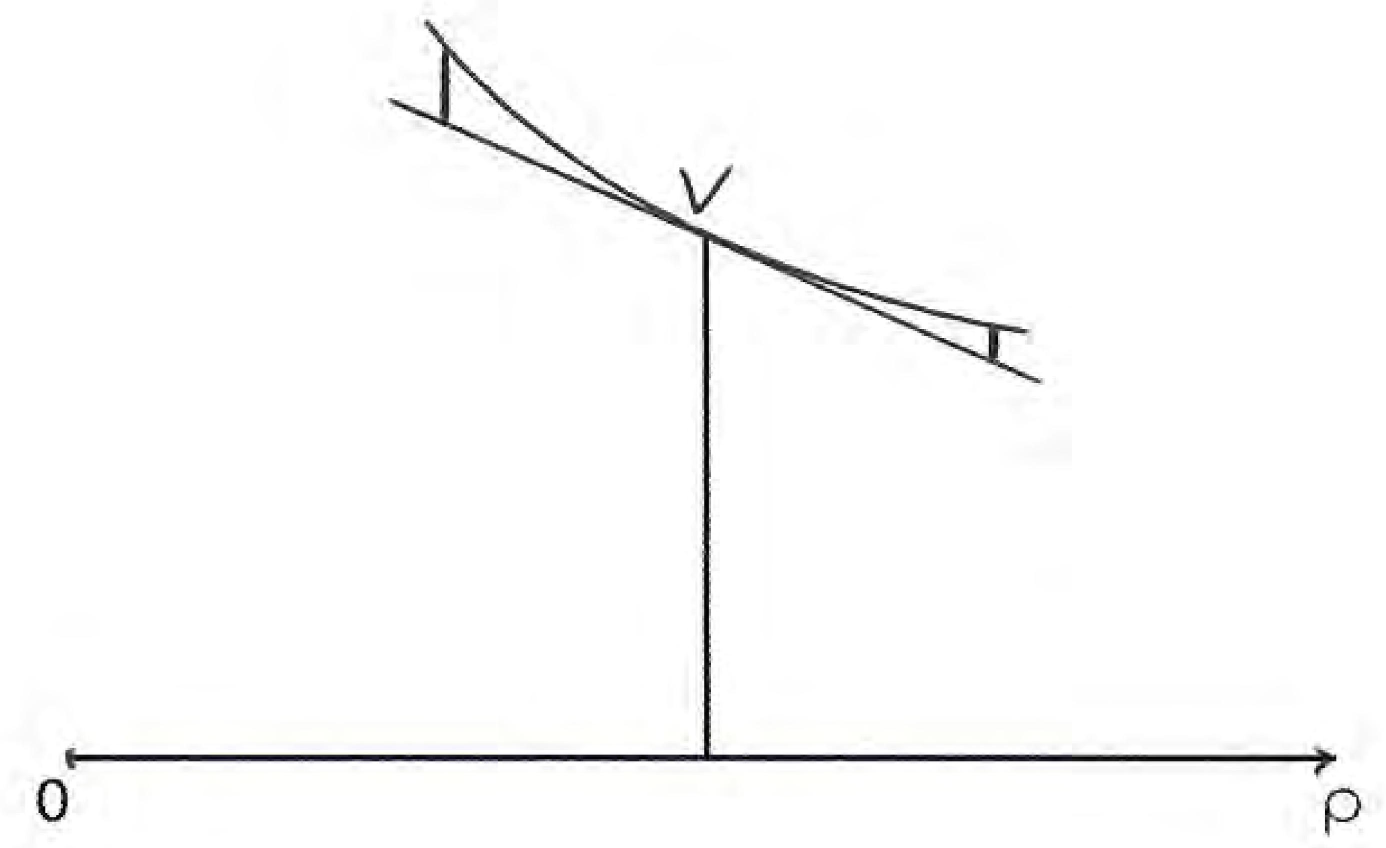
CONVEXIDAD

La interpretación de la variación absoluta en la cotización mediante el diferencial dV, ante una variación finita del precio financiero $\Delta\rho$, o del tipo de interés Δi, se muestra en las expresiones

$$dV = -D.V.\Delta\rho$$

$$dV = -S.V.\Delta i$$

deducidas directamente de las correspondientes variaciones relativas. Tales valores introducen la imprecisión analítica que implica la estimación del incremento de la función ΔV a través de su diferencial dV, es decir, la estimación de la variación real por la tendencia en el punto. El error así cometido está directamente relacionado con la convexidad de la función cotización $V(\rho)$, pudiendo apreciarse el mismo en la siguiente figura



El error *no es simétrico,* suavizándose además con el crecimiento del precio financiero ρ, debido a la convexidad decreciente de la curva que describe la cotización.

El error relativo *por convexidad* puede corregirse, con toda la aproximación deseable, mediante el desarrollo de Taylor de la función cotización. En efecto, siendo éste desarrollo para la variación de la cotización

$$\Delta V = \frac{dV}{d\rho}\,\Delta\rho + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2V}{d\rho^2}\,(\Delta\rho)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,\frac{d^2V}{d\rho^n}\,(\Delta\rho)^n + \ldots$$

dividiendo ambos miembros por V, para así obtener el error relativo

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\,\frac{1}{V}\,\frac{d^jV}{d\rho^j}\,(\Delta\rho)^j$$

y considerando que es

$$\frac{1}{V}\,\frac{d^jV}{d\rho^j} = (-1)^j\,\frac{\Sigma\, C_r . T_r^{\,n} . e^{-\rho . T}}{\Sigma\, C_r . e^{-\rho . T}} = (-1)^j . D_j$$

donde D_j puede considerarse una *duración de orden* j [8], resulta

[8] La duration es *primer momento ordinario* de los diferimientos, ponderados con los valores actuales de los capitales. Por ello, otros similares momentos de orden superior podrían también calificarse como durations de orden superior.

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{D_j}{j!} (\Delta\rho)^j$$

Entonces, para la aproximación

$$\Delta V \simeq dV = -D.V.\Delta\rho$$

o bien,

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq -D.\Delta\rho$$

el error relativo puede formularse así

$$E = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \frac{D_j}{j!} (\Delta\rho)^j$$

que, siendo convergente la serie, puede aproximarse cuanto deseemos dando a *n* el valor conveniente. Por otra parte, su determinación numérica es facilmente informatizable, debido al caracter secuencial de las D_j[9].

El análisis convencional resuelve el error por convexidad, para un incremento en el tipo de interés Δi, a través del desarrollo de Taylor

$$\Delta V = \frac{dV}{di} \Delta i + \frac{1}{2!} \frac{d^2V}{di^2} (\Delta i)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{d^nV}{di^n} (\Delta i)^n + \ldots$$

[9] Debido a la naturaleza de esta cominicación no se incluya la aplicación informática correspondiente, existiendo ésta incorporada a un disquete.

y, dividiendo ambos miembros por V, para obtener el error relativo,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV}{di}\frac{1}{V}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{1}{V}\frac{d^2V}{di^2}(\Delta i)^2 + \text{resto}$$

Acostumbra a denominarse *convexidad* al coeficiente corrector

$$\text{convex} \equiv \frac{1}{2}\frac{1}{V}\frac{d^2V}{di^2}$$

siendo entonces la estimación de la variación relativa de la cotización, para una variación Δi del tipo de interés, resultado de la *duración modificada* o *sensibilidad* corregida por la *convexidad*,

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -S.\Delta i + \text{convex} \times (\Delta i)^2$$

expresión que desconoce la asimetría del error para variaciones crecientes o decrecientes del tipo de interés.

CONCLUSIONES

PRIMERA.- La definición del *precio financiero estricto* ρ y la formulación de las funciones financieras respecto a esta única variable de la ley financiera estacionaria y, en particular, de la función *cotización*, otorga una capacidad analítica de los conceptos de *duration* y *sensibilidad* muy superior a la convencional formulada sobre el tipo de interés i de un régimen financiero de interés compuesto y de periodo de capitalización anual.

SEGUNDA.- La *duration* se muestra como una derivada semielástica de la cotización respecto a ρ, mientras que la *sensibilidad* lo es respecto a i, en valores absolutos. Ambas definen, entonces, las tendencias relativas -por unidad monetaria- de la cotización, ante una variación absoluta del precio financiero, o del tipo de interés, respectivamente.

TERCERA.- La *duration* es, por otra parte, un *momento ordinario* de primer orden respecto a los vencimientos de los capitales de la corriente de ingresos, cuando se ponderan con los valores actuales de sus cuantías. Su expresión analítica es facilmente generalizable a otros momentos ordinarios de orden superior.

Ellos permiten una formulación secuencial de la variación relativa de la cotización fundada en el desarrollo de Taylor.

CUARTA.- El error derivado de la convexidad de la función puede valorarse como resto de la serie, cuando la variación es aproximada por su primer término mediante la *sensibilidad*. El segundo de los términos introduce la corrección convencional denominada *convexidad*, que desconoce la asimetría del error. Esta puede mejorarse con facilidad sumando un resto mayor que garantice el error deseable, cuyo cálculo resulta sencillo fundado en la generalización de la duration a órdenes superiores y en la consiguiente aplicación informática.