

**ARNOLD KAUFMANN
Y JAUME GIL ALUJA**

**técnicas operativas de gestión
para el tratamiento
de la incertidumbre**

prólogo por raymond barre

HISPANO EUROPEA



Indice

Prólogo - Avant-propos	5
----------------------------------	---

Introducción	11
------------------------	----

PRIMERA PARTE

Fundamentos teóricos

1. Azar e incertidumbre	17
-----------------------------------	----

Distinción entre azar e incertidumbre	17
---	----

Probabilidad y posibilidad	18
--------------------------------------	----

El tratamiento económico de lo incierto	19
---	----

2. Errores y aproximaciones	21
---------------------------------------	----

Suma de números imprecisos	21
--------------------------------------	----

Obtención de la diferencia. Características	24
---	----

Multiplicación de números imprecisos en R^+ y R	25
---	----

División de números imprecisos. Propiedades	29
---	----

El tránsito al cálculo de errores	30
---	----

3. Intervalos de confianza	33
--------------------------------------	----

Noción de intervalo de confianza. Operaciones elementales . . .	33
Algunos ejemplos	36
Multiplicación y división por un real	38
Comparación entre dos intervalos de confianza	38
Máximos y mínimos	40
4. Números borrosos	43
El número borroso como generalización de los intervalos de confianza	42
Operaciones elementales con números borrosos	47
Distancia entre dos números borrosos	56
Mínimo y máximo de dos números borrosos	59
Clasificación de los números borrosos en un orden total	62
5. Números borrosos triangulares	65
Características y representación de un N. B. T.	65
Propiedades de los N. B. T.	66
Número borroso L. R. de Dubois y Prade	68
6. Números híbridos	71
Asociación de incertidumbre y azar	71
Suma de dos números híbridos	73
Esperanza matemática de un número híbrido	77
Otras operaciones con números híbridos	79
7. Haz de números borrosos	83
La noción de número borroso medio	83
Esperanza matemática de un haz	85
Observación	86
8. La teoría de los subconjuntos borrosos	87

Concepto de subconjunto borroso	87
Generalización de las operaciones booleanas	90
Entropía no probabilística	98
Grafos o relaciones borrosas	100
Ley de posibilidad	107

9. Subconjuntos aleatorios borrosos 111

Obtención de un subconjunto aleatorio borroso	111
Operaciones con subconjuntos aleatorios borrosos	114
La complementación de un subconjunto aleatorio borroso . . .	115

SEGUNDA PARTE

Técnicas cuantitativas de gestión

10. La actualización en la incertidumbre 119

Tipos de actualización inciertos	119
Un supuesto con horizonte económico finito	122
La hipótesis de rentas borrosas	128
Planteamientos relativos al proceso de inversión	129

11. La determinación de efectos olvidados 133

Matrices de incidencia cualitativa	133
El camino para la recuperación de los efectos secundarios . . .	138
Variantes al esquema propuesto	147
Relaciones borrosas de incidencia rectangular	148

12. Alisado exponencial con datos inciertos 153

La ley geométrica	153
Alisado exponencial y sobrealisado	154
Incorporación de intervalos de confianza	157
Alisado exponencial con números borrosos	158

13. El método "branch and bound" con datos inciertos	165
Construcción de una arborescencia	165
Obtención de un circuito hamiltoniano mínimo	168
El método "branch and bound" en el supuesto de números borrosos	170
Interpretación de los resultados	191
 14. Método P. E. R. T. o C. P. M. con plazos inciertos	 195
Representación de los tiempos mediante intervalos de confian- za	195
El proceso con la utilización de N. B. T.	197
La hipótesis del suministro de datos por varios expertos	201
 15. Criterios de decisión basados en cocientes con datos inciertos	 205
Consideraciones previas	205
Comparación entre intervalos de confianza	206
Clasificación de cocientes expresados en números borrosos	208
Utilización de N. B. T. mediante aproximación	212
 16. El método de Saaty-Dinh para la determinación de las funcio- nes de pertenencia	 219
Matrices recíprocas y coherentes	219
Correspondencia entre un subconjunto borroso y una matriz	223
Obtención del valor propio dominante y vector propio corres- pondiente	226
El supuesto de la selección de una escuela para el ingreso en la universidad	231
 17. Método de clanes y subconjuntos aleatorios borrosos	 235
Clanes, familias y átomos	235
Tratamiento de datos mediante el método de clanes	239
El método en ambiente borroso	245

Diagnóstico de gestión mediante opinión de expertos	250
El estudio a través de relaciones aleatorias borrosas	251
18. Programas lineales multicriterios con limitaciones borrosas . . .	265
Introducción al método de Zimmermann	265
Nociones teóricas básicas	277
Afectación de una función de pertenencia a una condición . . .	281
Programas lineales multicriterio en ambiente borroso. Maximización	287
Minimización de un programa lineal con varios criterios	298
Asociación de criterios con ayuda de operadores diversos	304
19. Juegos rectangulares con ganancias inciertas y multicriterios . .	313
Planteamiento de los juegos de estrategia con datos inciertos . .	313
Estrategia borrosa	321
Juegos de estrategia rectangulares con varios criterios de decisión	329
Juego rectangular contra la naturaleza	337
El supuesto de comercialización en un nuevo mercado	339
20. Teoría de colas y pseudoprobabilidades borrosas	349
Intervalos de confianza de probabilidad	349
Los resultados en el supuesto de monotonía	353
El supuesto de varias estaciones idénticas y en paralelo	357
El problema de varias estaciones y número limitado de clientes	363

TERCERA PARTE

Aplicaciones a problemas de gestión

21. El presupuesto base cero borroso	375
Planteamiento del método P. B. C.	375

La incorporación de números borrosos triangulares	377
Limitación borrosa al presupuesto global	380
22. Selección de personal	383
Un ejemplo sencillo de selección	383
La adecuación de un candidato a un puesto de trabajo	385
Estimación de la polivalencia del personal	390
23. Gestión de inversiones con números borrosos triangulares	393
Tratamiento del problema mediante programación dinámica . .	393
Los números borrosos triangulares y sus representaciones	399
Utilización de los operadores de maximización y minimización	401
24. Curvas de supervivencia borrosas	407
Introducción de la borrosidad en las curvas de supervivencia . .	407
La borrosidad a través de la función inversa	414
Aspectos lógicos de la aparición de averías	418
Funciones de fiabilidad	429
Curvas de supervivencia borrosas	434
25. La distribución espacial de las acciones comerciales	439
La taxonomía borrosa	439
Planteamiento del problema dual	445
La tesis de Phuoc Tran Qui sobre regionalización económica . .	453
Tipología para las regiones propuesta por Tran Qui	457
Consideraciones finales	461
Bibliografía	465

Prólogo

Al estudiar los problemas y las posibilidades de la gestión en el ámbito de la incertidumbre, los profesores Arnold Kaufmann y Jaime Gil Aluja abren perspectivas estimulantes al conocimiento y a la acción económica.

Los modelos relativos a las políticas económicas del Estado y de las decisiones microeconómicas de las empresas, ofrecen, como es conocido, una representación simplificada de la realidad. No pueden poner de manifiesto con detalle la complejidad y el movimiento de la economía, incluso en los momentos actuales en que se pueden establecer y tratar un elevado número de ecuaciones; la realidad económica y social es inagotable. Los modelos "eligen", en función de ciertas hipótesis, ciertas relaciones características. Los datos, que sirven para cuantificarlas, pueden ser exactos y ciertos; cuando son

Avant-propos

En étudiant les problèmes et les possibilités de la gestion dans l'incertain, les Professeurs Arnold Kaufmann et Jaime Gil Aluja ouvrent à la connaissance et à l'action économiques des perspectives stimulantes.

Les modèles qui concernent les politiques macro-économiques de l'Etat et les décisions micro-économiques des entreprises, offrent, on le sait, une représentation simplifiée de la réalité. Ils ne peuvent rendre compte dans le détail de la complexité et du mouvement de l'économie, même si l'on peut aujourd'hui établir et traiter un grand nombre d'équations; la réalité économique et sociale est inépuisable. Les modèles "choisissent", en fonction de certaines hypothèses, certaines relations caractéristiques. Les données, qui servent à les quantifier, peuvent être exactes et certaines; lors-

aleatorios, se puede recurrir a la teoría de las probabilidades.

Pero los datos no se presentan siempre de manera cierta y precisa: son en la mayor parte de los casos inciertos. Los hechos de la naturaleza son inciertos; el entorno económico, social, financiero de las empresas cambia incesantemente; los actos del hombre —porque es libre y dotado de imaginación— como las relaciones entre los hombres —porque éstos no son robots—, son las causas profundas de la incertidumbre.

Los trabajos de Boole, que han permitido un enorme progreso en el análisis cuantitativo de las decisiones y facilitado el tratamiento de la información mediante los ordenadores, se inspiran en una lógica demasiado simple en relación con la realidad humana: la elección no se hace solamente en términos de sí o no, de blanco o negro; se realizan en una zona de grises, que corresponde a diversos niveles de verdad. Así el análisis de los hechos imprecisos no puede ser realizado por técnicas aplicables a situaciones ciertas o aleatorias. Una diferencia esencial existe, en especial, entre azar e incertidumbre; el azar puede ser medido mediante el cálculo de probabilidades, la incertidumbre no es mensurable por definición. Sin embargo en la incertidumbre se puede hallar una cierta información, aunque ésta sea pobre. Es preciso poder utilizar lo que es

qu'elles sont aléatoires, on a recours à la théorie des probabilités.

Mais les données ne se présentent pas toujours de façon certaine et précise: elles sont la plupart du temps incertaines. Les faits de la nature sont incertains; l'environnement économique, social, financier des entreprises est sans cesse changeant; les actes de l'homme —parce qu'il est libre et doué d'imagination— comme les relations entre les hommes —parce que ceux-ci ne sont pas des robots—, sont les causes profondes de l'incertain.

Les travaux de Boole, qui ont permis de grands progrès dans l'analyse quantitative des décisions et facilité le traitement de l'information par l'ordinateur, s'inspirent d'une logique trop simple par rapport à la réalité humaine: les choix ne se font pas seulement en termes de oui ou non, de blanc ou noir; ils s'effectuent dans une zone grise, qui correspond à divers niveaux de vérité. Ainsi l'analyse des faits imprécis ne peut-elle être faite par les techniques applicables à des situations certaines ou aléatoires. Une différence essentielle existe notamment entre hasard et incertitude; le hasard peut être mesuré par le calcul de probabilité, l'incertain n'est pas mesurable par définition. Mais on peut trouver dans l'incertain une certaine information, même pauvre. Il faut pouvoir utiliser ce qui est

entonces perceptible a falta de ser medible para mejorar la racionalidad de los comportamientos y de las decisiones. La teoría de los subconjuntos borrosos, ya aplicada en biología, en medicina, en geología, puede resultar especialmente útil para el tratamiento de la incertidumbre en la gestión de la empresa.

Kaufmann y Gil Aluja después de haber puesto de manifiesto que los hechos imprecisos y los números inciertos no pueden ser tratados según los mismos principios que los hechos precisos y los números ciertos o que las variables aleatorias, transforman instrumentos ya empleados en el ámbito de la certeza o de lo probable para aplicarlos a la incertidumbre. Hacen que surja todo el interés de esta gestión en la incertidumbre en el tratamiento de un determinado número de problemas esenciales para la empresa: actualización en la incertidumbre; decisiones de inversión; renovación de equipos; decisiones coste-eficacia... Transforman para el tratamiento de los fenómenos borrosos, un cierto número de instrumentos tales como: el método presupuesto base cero; los alisados exponenciales; el método PERT o CPM, los programas lineales, la determinación de los efectos olvidados.

La novedad de los análisis se explica por la calidad de los autores. Arnold Kaufmann ha sido uno

alors perceptible à défaut d'être mesurable pour améliorer la rationalité des comportements et des décisions. La théorie des sous-ensembles flous, déjà appliquée en biologie, en médecine, en géologie peut être particulièrement utile au traitement de l'incertain dans la gestion de l'entreprise.

Kaufmann et Gil Aluja, après avoir montré que les faits imprécis et les nombres incertains ne peuvent être traités selon les mêmes principes que les faits précis et les nombres certains ou que les variables aléatoires, transforment des instruments déjà employés dans le domaine du certain ou du probable pour les appliquer à l'incertain. Ils font apparaître tout l'intérêt de cette gestion dans l'incertain dans le traitement d'un certain nombre de problèmes essentiels pour l'entreprise: actualisation dans l'incertain; décisions d'investissement; renouvellement des équipements; décisions coût-efficacité... Ils transforment pour le traitement des phénomènes flous, un certain nombre d'instruments tels que: la méthode budget base zéro; les lissages exponentiels; la méthode PERT ou CPM, les programmes linéaires, la recherche des effets oubliés.

La nouveauté des analyses s'explique par la qualité des auteurs. Arnold Kaufmann a été un des principaux pionniers de la recherche opérationnelle en Europe; ses enseignements à l'Institut Poly-

de los principales pioneros de la investigación operativa en Europa; sus enseñanzas en el Instituto Politécnico de Grenoble, en la Escuela de Minas de París, en la Universidad de Lovaina han permitido la irradiación de su pensamiento, así como sus libros traducidos en veinte idiomas y sus muy numerosos artículos científicos. Jaime Gil Aluja ejerce su actividad docente en la Universidad de Barcelona en donde dirige el departamento de Economía y Organización de Empresas, y es Decano de la Escuela de Administración de Empresas de Barcelona. Miembro Fundador de la "European Foundation for Management Development" en Bruselas ha asumido desde hace muchos años una actividad asesora de empresas españolas. Estos dos sabios han estado siempre en contacto con las realidades de la empresa estableciendo así una fecunda relación entre la ciencia y la acción. El espíritu que les caracteriza ha sido perfectamente definido por Arnold Kaufmann: "todo aquello que es mecánico, programable, hoy o mañana, lo harán las máquinas y cuanto más eficaces sean estas máquinas, más necesidad tendremos de la imaginación, de la aventura, de la incertidumbre". Y por Jaime Gil Aluja al definir su libro "como un ensayo para rehabilitar científicamente la subjetividad y la imprecisión".

Quisiera finalmente rendir tributo a una colaboración ejemplar

technique de Grenoble, à l'Ecole des Mines de Paris, à l'Université de Louvain, ont assuré le rayonnement de sa pensée, tout comme ses livres traduits en vingt langues et ses très nombreux articles scientifiques. Jaime Gil Aluja enseigne à l'Université de Barcelona où il dirige le département d'Economie et Organisation des Entreprises, et il est le Doyen de l'Ecole d'Administration des Entreprises de Barcelone. Membre Fondateur de l'"European Foundation for Management Development" à Bruxelles, il a depuis de nombreuses années assumé une activité de conseil auprès des entreprises espagnoles. Ces deux savants ont donc toujours été au contact des réalités de l'entreprise, établissant ainsi une relation féconde entre la science et l'action. L'état d'esprit qui les caractérise a été parfaitement défini par Arnold Kaufmann: "tout ce qui est machinal, programmable, aujourd'hui ou demain, des machines le feront et plus ces machines seront efficaces, plus nous aurons besoin de l'imagination, de l'aventure, de l'incertain". Et Jaime Gil Aluja de définir leur livre "comme un essai pour réhabiliter scientifiquement la subjectivité et l'imprécision".

Je voudrais enfin rendre hommage à une collaboration exemplaire entre un universitaire Français et un universitaire Espagnol, qui travaillent dans deux grandes cités: Grenoble et Barcelone —où l'activité intellectuelle et l'esprit

entre un universitario francés y un universitario español, que trabajan en dos grandes ciudades: Grenoble y Barcelona —en donde la actividad intelectual y el espíritu de empresa han sido tradicionalmente fértiles. Confiamos en que España y Francia puedan desarrollar en el seno de la Comunidad Europea a la que ya pertenecen ambas, esta forma privilegiada de contribución que pueden aportar a Europa al progreso de la Ciencia y al desarrollo de la economía.

Raymond Barre

d'entreprise se sont traditionnellement fertilisés. Puissent l'Espagne et la France développer au sein de la Communauté Européenne à laquelle elles appartiennent désormais toutes les deux, cette forme privilégiée de contribution qu'elles peuvent apporter en Europe au progrès de la Science et au développement de l'économie.

Raymond Barre

PRIMERA PARTE

Fundamentos teóricos

Azar e incertidumbre

DISTINCION ENTRE AZAR E INCERTIDUMBRE

Azar, aleatoriedad, estocástico y también suerte, son palabras ligadas de manera más o menos explícita a la teoría de las probabilidades. Así, cuando se ponen en una urna y se mezclan 7 bolas rojas y 3 bolas verdes, la probabilidad de sacar una roja es $7/10$ y $3/10$ para una verde. La extracción efectuada es una aleatoriedad, se puede “medir” la suerte de sacar una bola roja o una verde. Para ello, es necesario conocer con antelación, a priori, la proporción de los colores de las bolas introducidas.

Supongamos ahora que desconocemos esta proporción y que sólo podemos realizar una sola extracción, ya no se puede “medir” la “suerte”. El fenómeno ya no se debe al azar, sino a la incertidumbre. Si solamente sabemos que pueden existir en la urna 10 bolas, pero sin conocer la proporción, podemos afirmar que sacaremos o bien una bola roja o bien una bola verde. Es posible que hayan 10 rojas o 9 rojas y 1 verde, 8 rojas y 2 verdes, etc... pero como lo desconocemos no podemos decir “voy a extraer una bola al azar”, sino que ignoramos, sin poder dar una probabilidad, si sacaremos una bola roja o una verde.

El azar es la incertidumbre medible con la ayuda del concepto de probabilidad. Sabemos sin embargo que en la conversación de cada día así como en todos los diccionarios y casi en todos los idiomas, los conceptos azar e incertidumbre son mutuamente confundidos.

Si en el lenguaje coloquial esta confusión no tiene generalmente importancia, no ocurre lo mismo en el conocimiento científico en el que no deben confundirse azar e incertidumbre.

PROBABILIDAD Y POSIBILIDAD

Veamos con qué clase de error de razonamiento podemos enfrentarnos al confundir azar e incertidumbre. Consideremos primero un juego con dos dados que llevan cada uno en cada lado sin repetir, los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (el dado tiene forma de cubo). La probabilidad de sacar un número a , $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con uno u otro dado es igual a $1/6$. Busquemos ahora la probabilidad de sacar un número $b = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ sumando los resultados cuando se tiran 2 dados. La probabilidad de sacar un 2 es $1/12$, de sacar un 3, $2/12$; de sacar un 4, $3/12$... de sacar un 11, $2/12$; de sacar un 12, $1/12$. La ley equiprobable para un solo dado se ha convertido en una ley triangular.

$$\begin{aligned} 1.1 \quad \text{pr}(x = b) &= (b - 1)/12 \quad 2 \leq b \leq 7 \\ &= (13 - b)/12 \quad 7 \leq b \leq 12 \end{aligned}$$

De todos es conocido que si en vez de considerar 2 dados se toman 3, luego 4, ... luego n dados, para n suficientemente grande, se tendería hacia una ley de Laplace-Gauss (teorema central del límite) la cual toma una forma bien distinta de una ley equiprobable.

Supongamos ahora, que los dados están marcados de manera arbitraria con o sin repetición con números del 1 al 6 y que el jugador no conoce nada de lo que se ha marcado. Al tirar el dado, solamente puede decir: la posibilidad de sacar un 1 es una, de sacar un 2 es 1, ... de sacar un 5 es 1, de sacar un 6 es 1, de sacar un 7 es cero... Al tirar 2 dados y al considerar la suma de los resultados, podrá decir a priori: la posibilidad de sacar un 1 es 0, de sacar un 2 es 1, de sacar un 3 es 1, ... de sacar un 11 es 1, de sacar un 12 es 1, de sacar un 13 es 0, etc... El concepto de posibilidad empleado aquí es tal que dos leyes equiposibles (que nos perdonen este neologismo paralelo a la palabra equiprobable) da una ley equiposible. Con esta hipótesis nos situamos en un universo incierto en lugar de un universo probabilista. La incertidumbre sin embargo no es total, ya que, a pesar de todo, se sabe que el resultado estaría situado en el subconjunto de enteros $\{2, 3, 4, 5, \dots, 10, 11, 12\}$. Se podría considerar una incertidumbre mucho mayor si ni siquiera se supiera que se utiliza únicamente este subconjunto.

Lo que acabamos de explicar podría parecer trivial si no diera lugar a varias causas de error cuando se realizan simulaciones a partir de leyes equiprobables. No se puede aplicar con rigor la hipótesis de Laplace "si desconozco la ley de probabilidad, escogeré la ley equiprobable" más

que en el caso en que sabemos seguro que la ley... es equiprobable. De hecho, si se desconoce la ley de probabilidad, todas las leyes son posibles y por tanto ninguna merece preferencia.

Al aplicar la hipótesis de Laplace, si se ignoran las leyes de probabilidad de las variables que se deben sumar, nos introducimos en leyes de probabilidad que no tienen justificación (excepto en casos concretos). Confundir lo incierto con el azar es de alguna manera, ser deshonesto consigo mismo. El tratamiento de la incertidumbre es una cosa, el de la aleatoriedad, es decir del azar, es otra; aunque sea posible combinarlos sin que con ello se confundan.

EL TRATAMIENTO ECONOMICO DE LO INCIERTO

El objeto de esta obra es presentar aquellos instrumentos que se puedan emplear en la preparación de decisiones de carácter económico cuando el entorno no se puede medir en absoluto o sólo de manera insuficiente. Encontraremos datos formales (exactos), datos aleatorios, datos inciertos. Cada vez intentaremos emplear de la mejor manera posible las informaciones disponibles, ricas o pobres. Esto nos llevará a utilizar frecuentemente la subjetividad a falta de la tan deseada objetividad.

Existen varias teorías que se refieren a la incertidumbre; incluso se pueden imaginar un número infinito de ellas. Examinaremos solamente unas cuantas, las más corrientes: la teoría de los errores, la teoría de los intervalos de confianza, la de los números borrosos. Pero sobre todo señalaremos cómo aplicarlas a los fenómenos económicos. Esto nos permitirá, a falta de ser más exactos, ser más honestos como hemos subrayado en varias ocasiones. Veremos que, en la incertidumbre, la noción de optimización tiene mucha menos fuerza pero en cambio resulta muy útil; veremos que los problemas reales son multicriterios, pues un sistema de intenciones raramente se resume en una función económica única. Buscaremos también estrategias adecuadas para reducir un desorden nacido de datos inciertos. En fin, intentaremos modelizar lo económico, lo más cerca posible de la realidad con los conocimientos de que se dispone en la actualidad.

No haremos referencia a la teoría de las probabilidades ya que todos los científicos la conocen y saben aplicarla. No presentaremos como competidoras la teoría de probabilidades y las teorías que hacen referencia a los fenómenos en un universo incierto. La estadística, las probabilidades, los errores, los intervalos de confianza, lo borroso; todo

esto forma un todo que hay que saber utilizar convenientemente. La medida permite construir modelos más fiables, pero a condición de que la medida en sí misma sea fiable. A falta de medida, examinaremos la "valuación". A falta de pan, buenas son tortas.

Es evidente que lo ideal en cada ciencia es la objetividad, pero la realidad nos obliga día a día a tener en cuenta las informaciones accesibles menos seguras, pero utilizables en nuestros razonamientos y en los ordenadores.

Errores y aproximaciones

SUMA DE NUMEROS IMPRECISOS

Vamos a recordar una teoría bastante antigua que hace referencia al cálculo numérico, aunque quizá la palabra teoría sea demasiado ambiciosa. Sin embargo, esta “teoría” nos permitirá más adelante poner de manifiesto las raíces históricas de procesos más ambiciosos y mejor adaptados a la incertidumbre, a casos más generales de un universo incierto.

Supongamos un número A al que llamaremos “valor central estimado”. Este número hace referencia a una medida o una estimación subjetiva. Como no estamos seguros que el número A representa exactamente la medida del objeto (real o abstracto), vamos a adscribirle un “error posible” ΔA que puede ser positivo o negativo. Así $A \pm \Delta A$ representará el subconjunto de los valores posibles desde $A - \Delta A$ hasta $A + \Delta A$ donde A es el valor central y ΔA una desviación positiva por hipótesis. Nos encontramos pues ante una magnitud imprecisa que designaremos por una letra cursiva y tres magnitudes.

$$2.1 \quad \mathcal{A} = (A - \Delta A, A, A + \Delta A)$$

Como se podrá observar hemos utilizado una notación más moderna que la habitual para los cálculos con números imprecisos. Vamos a examinar, primero, cómo se realizan operaciones con números imprecisos tales como $\mathcal{A}$. Veamos la suma:

$$2.2 \quad \mathcal{A} = (A - \Delta A, A, A + \Delta A)$$

$$2.3 \quad \mathcal{B} = (B - \Delta B, B, B + \Delta B)$$

Designaremos por (+) la suma de estos dos números imprecisos. Primero, por hipótesis, escribiremos que $A + B$ es el valor central del resultado. Si el valor más bajo que puede tomar $\mathcal{A}$ es $A - \Delta A$ y el de $\mathcal{B}$ es $B - \Delta B$ el valor más bajo que podrá alcanzar $\mathcal{A} (+) \mathcal{B}$ será $A + B - \Delta A - \Delta B$. El mismo razonamiento nos lleva a tomar como valor más alto de $\mathcal{A} (+) \mathcal{B}$, el valor $A + B + \Delta A + \Delta B$. Escribiremos pues:

$$2.4 \quad \mathcal{A} (+) \mathcal{B} = (A - \Delta A, A, A + \Delta A) (+) (B - \Delta B, B, B + \Delta B) = \\ = (A + B - \Delta A - \Delta B, A + B, A + B + \Delta A + \Delta B)$$

Vamos a precisar ahora a qué conjunto de números ligaremos A , B , ΔA y ΔB : A y B serán números reales, es decir, $A \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathbb{R}$ mientras que, por hipótesis, ΔA y ΔB serán reales no negativos: $\Delta A \in \mathbb{R}^+$ y $\Delta B \in \mathbb{R}^+$

Veamos un primer ejemplo numérico. Dados:

$$2.5 \quad \mathcal{A} = (3, 5, 7) \quad \text{con} \quad \Delta 5 = 2$$

$$2.6 \quad \mathcal{B} = (6, 7, 8) \quad \text{con} \quad \Delta 7 = 1$$

se deduce que:

$$2.7 \quad \mathcal{A} (+) \mathcal{B} = (3, 5, 7) (+) (6, 7, 8) = (3 + 6, 5 + 7, 7 + 8) \\ = (9, 12, 15) \quad \text{con} \quad \Delta 12 = 3$$

De manera más detallada:

$$2.8 \quad \mathcal{A} = (5 - 2, 5, 5 + 2)$$

$$2.9 \quad \mathcal{B} = (7 - 1, 7, 7 + 1)$$

$$2.10 \quad \mathcal{A} (+) \mathcal{B} = (5 + 7 - 2 - 1, 5 + 7, 5 + 7 + 2 + 1) \\ = (9, 12, 15)$$

Consideremos ahora números que no sean forzosamente positivos:

$$2.11 \quad \mathcal{A} = (-5, -3, -1) \quad \text{con} \quad \Delta(-3) = 2$$

$$2.12 \quad \mathcal{B} = (-2, 1, 4) \quad \text{con } \Delta 1 = 3$$

$$2.13 \quad \mathcal{A}(+) \mathcal{B} = (-5 - 2, -3 + 1, -1 + 4) \\ = (-7, -2, 3) \quad \text{con } \Delta(-2) = 5$$

Busquemos algunas propiedades relativas a los números inciertos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y a su suma.

Es evidente que la suma es conmutativa. Fácilmente se demuestra que es también asociativa.

$$2.14 \quad (\mathcal{A}(+) \mathcal{B})(+) \mathcal{C} = (A + B - \Delta A - \Delta B, A + B, \\ A + B + \Delta A + \Delta B)(+) (C - \Delta C, C, C + \Delta C) = \\ = (A + B + C - \Delta A - \Delta B - \Delta C, A + B + C, \\ A + B + C + \Delta A + \Delta B + \Delta C)$$

$$2.15 \quad \mathcal{A}(+)(\mathcal{B}(+) \mathcal{C}) = (A - \Delta A, A, A + \Delta A)(+) \\ (+)(B + C - \Delta B - \Delta C, B + C, B + C + \Delta B + \Delta C) \\ = (A + B + C - \Delta A - \Delta B - \Delta C, A + B + C, \\ A + B + C + \Delta A + \Delta B + \Delta C)$$

Esta suma posee un neutro:

$$2.16 \quad 0 = (0, 0, 0) \quad , \quad \Delta 0 = 0$$

$$2.17 \quad \mathcal{A}(+) 0 = 0(+) \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

La suma de números imprecisos tales como $\mathcal{A}$ tiene pues la estructura de un monoide conmutativo cuyo neutro es el número 0. Se observa que un “número preciso”

$$2.18 \quad \mathcal{A} = (A, A, A) \quad , \quad \Delta A = 0$$

es un caso particular de un número impreciso en donde $\Delta A = 0$.

OBTENCION DE LA DIFERENCIA. CARACTERISTICAS

Definamos ahora $\mathcal{A} (-) \mathcal{B}$. Volvamos a (2.2) y (2.3). Al valor pequeño de $\mathcal{A}$ hay que restarle el valor grande de $\mathcal{B}$. Al valor grande de $\mathcal{A}$ hay que restarle el valor pequeño de $\mathcal{B}$; en cuanto al valor central es igual a $A - B$. De ello resulta:

$$\begin{aligned} 2.19 \quad \mathcal{A} (-) \mathcal{B} &= (A - \Delta A, A, A + \Delta A) (-) (B - \Delta B, B, B + \Delta B) \\ &= (A - \Delta A - (B + \Delta B), A - B, A + \Delta A - (B - \Delta B)) \\ &= (A - B - \Delta A - \Delta B, A - B, A - B + \Delta A + \Delta B) \end{aligned}$$

De donde se deduce:

$$2.20 \quad \Delta(A - B) = \Delta A + \Delta B$$

las desviaciones se suman cuando se restan los valores centrales.

Veamos un ejemplo numérico:

$$2.21 \quad \mathcal{A} = (4, 6, 8) \quad \Delta 6 = 2$$

$$2.22 \quad \mathcal{B} = (-1, 2, 5) \quad \Delta 2 = 3$$

$$\begin{aligned} 2.23 \quad \mathcal{A} (-) \mathcal{B} &= (4, 6, 8) (-) (-1, 2, 5) \\ &= (4 - 5, 6 - 2, 8 - (-1)) \\ &= (-1, 4, 9) \quad \Delta 4 = 5 \end{aligned}$$

La diferencia de números imprecisos no posee una propiedad conocida que tienen los números precisos, como es:

$$2.24 \quad A - A = 0$$

Con los números imprecisos, no ocurre lo mismo:

$$2.25 \quad \mathcal{A} = (A - \Delta A, A, A + \Delta A)$$

$$\begin{aligned} 2.26 \quad \mathcal{A} (-) \mathcal{A} &= (A - \Delta A, A, A + \Delta A) (-) (A - \Delta A, A, A + \Delta A) = \\ &= (0 - 2 \Delta A, 0, 0 + 2 \Delta A) = \end{aligned}$$

$$= (-2 \Delta A, 0, 2 \Delta A) \quad , \quad \Delta 0 = 2 \Delta A$$

No solamente el resultado no es $(0, 0, 0)$, es decir 0, sino que la desviación $\Delta 0$ depende de A .

Definiremos también el complemento de $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} 2.27 \quad \mathcal{A}^- &= (0, 0, 0) (-) (A - \Delta A, A, A + \Delta A) \\ &= (-A - \Delta A, -A, -A + \Delta A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.28 \quad \text{y } \mathcal{A} (+) \mathcal{A}^- &= (A - \Delta A, A, A + \Delta A) (+) \\ &\quad (-A - \Delta A, -A, -A + \Delta A) = \\ &= (-2 \Delta A, 0, 2 \Delta A) \end{aligned}$$

MULTIPLICACION DE NUMEROS IMPRECISOS EN R^+ Y R

La multiplicación comportará problemas más difíciles si nos situamos en R en lugar de R^+ . Veamos primero lo que sucede en R^+ .

$$\begin{aligned} 2.29 \quad \mathcal{A} (.) \mathcal{B} &= (A - \Delta A, A, A + \Delta A) (.) (B - \Delta B, B, B + \Delta B) \\ &= [(A - \Delta A) \cdot (B - \Delta B), A \cdot B, (A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B)] \\ &= [(A \cdot B - B \cdot \Delta A - A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot \Delta B), A \cdot B, \\ &\quad (A \cdot B + B \cdot \Delta A + A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot \Delta B)] \end{aligned}$$

Como puede observarse es necesario distinguir ahora la desviación a la izquierda de la desviación a la derecha.

$$2.30 \quad \Delta_y A \cdot B = B \cdot \Delta A + A \cdot \Delta B - \Delta A \cdot \Delta B$$

$$2.31 \quad \Delta_d A \cdot B = B \cdot \Delta A + A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot \Delta B$$

Esta falta de simetría nos llevará a considerar números imprecisos en los que la desviación a la izquierda puede ser diferente de la desviación a la derecha.

Volvamos al inicio del presente capítulo, esta vez con la noción de desviación a la izquierda Δ_y y desviación a la derecha Δ_d que pueden ser diferentes.

$$2.32 \quad \mathcal{A} = (A - \Delta_y A, A, A + \Delta_d A), \Delta_y A \geq 0, \Delta_d A \geq 0$$

y continuaremos llamando A al valor central, abusando del lenguaje y para más comodidad.

Se obtendrá, esta vez, al ser:

$$2.33 \quad \mathcal{B} = (B - \Delta_y B, B, B + \Delta_d B) :$$

$$2.34 \quad \mathcal{A} (+) \mathcal{B} = (A + B - \Delta_y A - \Delta_y B, A + B, A + B + \Delta_d A + \Delta_d B)$$

$$\Delta_y (A + B) = \Delta_y A + \Delta_y B$$

$$\Delta_d (A + B) = \Delta_d A + \Delta_d B$$

Veamos un ejemplo:

$$2.35 \quad \mathcal{A} = (-3, 2, 4), \Delta_y 2 = 5, \Delta_d 2 = 2$$

$$\mathcal{B} = (1, 5, 7), \Delta_y 5 = 4, \Delta_d 5 = 2$$

$$2.36 \quad \mathcal{A} (+) \mathcal{B} = (2 + 5 - 5 - 4, 2 + 5, 2 + 5 + 2 + 2)$$

$$= (-2, 7, 11) \quad \Delta_y 7 = 9, \Delta_d 7 = 4$$

Es fácil comprobar que la suma continúa siendo conmutativa y asociativa. El neutro también es $(0, 0, 0)$ y la estructura es la de un monoide conmutativo. Pasemos a la sustracción:

$$2.37 \quad \mathcal{A} (-) \mathcal{B} = (A - B - \Delta_y A - \Delta_d B, A - B, A - B + \Delta_d A + \Delta_y B)$$

$$\Delta_y (A - B) = \Delta_y A + \Delta_d B$$

$$\Delta_d (A - B) = \Delta_d A + \Delta_y B$$

Veamos un ejemplo:

$$2.38 \quad \mathcal{A} = (-3, -1, 6), \Delta_y (-1) = 2, \Delta_d (-1) = 7$$

$$2.39 \quad \mathcal{B} = (-4, 1, 3) \quad , \quad \Delta_y(1) = 5 \quad , \quad \Delta_d(1) = 2$$

$$2.40 \quad \mathcal{A}(-) \mathcal{B} = (-1 -1 -2 -2, -1 -1, -1 -1 +7 +5) \\ = (-6, -2, 10)$$

Se tiene evidentemente:

$$2.41 \quad \mathcal{A}(-) \mathcal{A} \neq (0, 0, 0)$$

excepto cuando $\Delta_y A = 0$ y $\Delta_d A = 0$

$$2.42 \quad \mathcal{A}^- = (-A - \Delta_d A, -A, -A + \Delta_y A)$$

Así, para $\mathcal{A}$ dado por (2.38)

$$2.43 \quad \mathcal{A}^- = (1 - 7, 1, 1 + 2) \\ = (-6, 1, 3)$$

$$2.44 \quad \mathcal{A}(+) \mathcal{A}^- = (-3, -1, 6)(+)(-6, 1, 3) \\ = (-9, 0, 9) \quad , \quad \Delta_y 0 = 9 \quad , \quad \Delta_d 0 = 9$$

Pasemos a la multiplicación en R^+

$$2.45 \quad \mathcal{A}(.) \mathcal{B} = (A - \Delta_y A, A, A + \Delta_d A)(.) (B - \Delta_y B, B, B + \Delta_d B) \\ = (A \cdot B - B \cdot \Delta_y A - A \cdot \Delta_y B + \Delta_y A \cdot \Delta_y B, A \cdot B, \\ A \cdot B + B \cdot \Delta_d A + A \cdot \Delta_d B + \Delta_d A \cdot \Delta_d B), \\ \Delta_y(A \cdot B) = B \cdot \Delta_y A + A \cdot \Delta_y B - \Delta_y A \cdot \Delta_y B, \\ \Delta_d(A \cdot B) = B \cdot \Delta_d A + A \cdot \Delta_d B + \Delta_d A \cdot \Delta_d B$$

Veamos un ejemplo:

$$2.46 \quad \mathcal{A} = (3, 8, 9) \quad \Delta_y 8 = 5 \quad , \quad \Delta_d 8 = 1$$

$$2.47 \quad \mathcal{B} = (4, 5, 7) \quad \Delta_y 5 = 1 \quad , \quad \Delta_d 5 = 2$$

$$2.48 \quad \mathcal{A}(.) \mathcal{B} = (5 \cdot 8 - 8 \cdot 1 - 5 \cdot 5 + 5 \cdot 1, 5 \cdot 8, 5 \cdot 8 + 8 \cdot 2 +$$

$$+ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2)$$

$$= (12, 40, 63)$$

Veamos lo que sucede cuando nos situamos de manera más general en R en vez de R^+ . La fórmula será algo más complicada. Para mayor claridad empecemos con un ejemplo:

$$2.49 \quad \mathcal{A} = (-3, 5, 8) \quad , \quad \Delta_y 5 = 8 \quad , \quad \Delta_d 5 = 3$$

$$2.50 \quad \mathcal{B} = (-2, -1, 4) \quad , \quad \Delta_y(-1) = 1 \quad , \quad \Delta_d(-1) = 5$$

Primero se tiene que calcular $\mathcal{A} (.) \mathcal{B}$, razonando directamente con los propios números. El valor inferior del producto vendrá dado por:

$$2.51 \quad \text{MIN} [(-3) \cdot (-2), (8) \cdot (-2), (-3) \cdot (4), (8) \cdot (4)]$$

$$= \text{MIN} (6, -16, -12, 32) = -16$$

De la misma manera el valor superior será dado por:

$$2.52 \quad \text{MAX} (6, -16, -12, 32) = 32$$

Tendremos:

$$2.53 \quad \mathcal{A} (.) \mathcal{B} = (-16, -5, 32) \quad , \quad \Delta_y(-5) = 11 \quad , \quad \Delta_d(-5) = 37$$

Ahora, en R , obtendremos la fórmula general. Pongamos:

$$2.54 \quad \Delta = \{ (A - \Delta_y A) \cdot (B - \Delta_y B) \quad , \quad (A - \Delta_y A) \cdot (B + \Delta_d B), \\ (A + \Delta_d A) \cdot (B - \Delta_y B) \quad , \quad (A + \Delta_d A) \cdot (B + \Delta_d B) \}$$

$$2.55 \quad \text{MIN}_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \in \Delta) \quad \text{dará el valor más bajo}$$

$$2.56 \quad \text{MAX}_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \in \Delta) \quad \text{dará el valor más alto}$$

$$2.57 \quad A \cdot B \quad \text{dará el valor central}$$

Apliquemos estas fórmulas a (2.49) y (2.50):

$$2.58 \quad \Delta = \{ (5-8) \cdot (-1-1), (5-8) \cdot (-1+5), (5+3) \cdot (-1-1), \\ (5+3) \cdot (-1+5) \} = \{ 6, -12, -16, 32 \}$$

$$2.59 \quad \text{MIN } \Delta = -16$$

$$2.60 \quad \text{MAX } \Delta = 32$$

$$2.61 \quad \mathcal{A} (.) \mathcal{B} = (-16, -5, 32)$$

Se constata directamente que $(.)$ es conmutativo en R .

Es fácil comprobar la distributividad en R (1). El neutro para $(.)$ es $(1, 1, 1) = 1$ y se tiene también un monoide conmutativo.

DIVISION DE NUMEROS IMPRECISOS. PROPIEDADES

Vamos a definir el inverso $\mathcal{A}^{-1}$ en R_0^+ de la manera siguiente:

$$2.62 \quad \mathcal{A}^{-1} = \left(\frac{1}{A + \Delta_d A}, \frac{1}{A}, \frac{1}{A - \Delta_y A} \right), \quad A > 0$$

$$\Delta_y \left(\frac{1}{A} \right) = \frac{1}{A + \Delta_d A}, \quad \Delta_d \left(\frac{1}{A} \right) = \frac{1}{A - \Delta_y A}$$

Observemos que, en R , la inversa no siempre se halla definida. En efecto:

$$2.63 \quad \mathcal{A} = (-2, 3, 5)$$

La inversa de 3 es $1/3$, la de -2 es $-1/2$ y la de 5 es $1/5$.

Al tomar la inversa de todos los números desde $-1/2$ hasta $1/5$, se pasará por el número 0 cuya inversa va de $-\infty$ a $+\infty$ por lo que no se puede obtener un número impreciso de la forma $(A - \Delta_y A, A, A + \Delta_d A)$. Nos limitamos pues, para la inversa, a los casos de números positivos.

(1) Ver, por ejemplo: A. Kaufmann y M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Ed. Van Nostrand-Reinhold, 1985.

Veamos la división en R^+ :

$$2.64 \quad \mathcal{A} (:) \mathcal{B} = (A - \Delta_y A, A, A + \Delta_d A) (:) (B - \Delta_y B, B, B + \Delta_d B) \\ = \left(\frac{A - \Delta_y A}{B + \Delta_d B}, \frac{A}{B}, \frac{A + \Delta_d A}{B - \Delta_y B} \right)$$

Donde se supone que $B > 0$ (lo que entraña que $\Delta_y B < B$). Se puede escribir, siempre para R_0^+ :

$$2.65 \quad \mathcal{A} (.) \mathcal{A}^{-1} = \left(\frac{A - \Delta_y A}{A + \Delta_d A}, 1, \frac{A - \Delta_d A}{A + \Delta_y A} \right) \neq 1$$

excepto si $\mathcal{A} = (A, A, A) = A$

También es interesante plantear la cuestión de distributividad existente entre $(+)$ y $(.)$.

Se puede ya eliminar la distributividad:

$$2.66 \quad \mathcal{A} (+) (\mathcal{B} (.) \mathcal{C}) = (\mathcal{A} (+) \mathcal{B}) (.) (\mathcal{A} (+) \mathcal{C})$$

ya que no existe para los números reales.

En cuanto a la otra distributividad, sí se verifica cuando nos situamos en R^+ .

$$2.67 \quad \mathcal{A} (.) (\mathcal{B} (+) \mathcal{C}) = (\mathcal{A} (.) \mathcal{B}) (+) (\mathcal{A} (.) \mathcal{C})$$

Podemos comprobar a través de un contraejemplo que no siempre se verifica en R .

EL TRANSITO AL CALCULO DE ERRORES

Se pasa del concepto de número incierto al relativo al cálculo de errores de la manera siguiente. Si admitimos que $\Delta_y A$ y $\Delta_d A$ son suficientemente pequeños con relación a A , se llamará $\Delta_y A$ "error absoluto a la izquierda" en relación a A , y $\Delta_d A$ "error absoluto a la derecha" en relación a A .

Si $\Delta_y A$ y $\Delta_d A$ son suficientemente pequeños, se desprecian

$\Delta_y A \cdot \Delta_d A$, ante $\Delta_y A$ y $\Delta_d A$, lo que permite simplificar diversas fórmulas, y en particular (2.45). Así escribiremos:

$$\begin{aligned} 2.68 \quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} &= (A \cdot B - B \cdot \Delta_y A - A \cdot \Delta_y B, A \cdot B, A \cdot B + \\ &\quad + B \Delta_d A + A \cdot \Delta_d B), \\ \Delta_y A, \Delta_d A &\ll A, \quad \Delta_y B, \Delta_d B \ll B \end{aligned}$$

En la teoría de los errores se han introducido los “errores relativos” es decir $\Delta_y A/A$ y $\Delta_d A/A$ llamados “error relativo a la izquierda” y “error relativo a la derecha” en relación a A . Esta noción es particularmente útil para el producto y el cociente, en que se tiene:

$$2.69 \quad \frac{\Delta_y (A \cdot B)}{A \cdot B} = \frac{\Delta_y A}{A} + \frac{\Delta_y B}{B}$$

$$2.70 \quad \frac{\Delta_d (A \cdot B)}{A \cdot B} = \frac{\Delta_d A}{A} + \frac{\Delta_d B}{B}$$

$$2.71 \quad \frac{\Delta_y (A/B)}{A/B} = \frac{\Delta_y A}{A} + \frac{\Delta_d B}{B}$$

$$2.72 \quad \frac{\Delta_d (A/B)}{A/B} = \frac{\Delta_d A}{A} + \frac{\Delta_y B}{B}$$

Observamos en ambos casos, que los errores relativos se suman siempre.

En la teoría de los errores, se consideran frecuentemente las desviaciones a la izquierda iguales a las desviaciones a la derecha y las desviaciones relativas $\Delta A/A$ se expresan en tanto por ciento.

Vamos a limitar a lo expuesto la referencia a los errores absolutos y relativos, habida cuenta de que se trata de un campo muy conocido. Esta referencia no tiene otra finalidad que el establecer una introducción a los aspectos que van a ser tratados seguidamente, los cuales son menos conocidos y utilizados.

Intervalos de confianza

NOCION DE INTERVALO DE CONFIANZA. OPERACIONES ELEMENTALES

En $\mathbb{R}$ se llama segmento a un intervalo cerrado a la izquierda y cerrado a la derecha. Así, el subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$3.1 \quad A = [a_1, a_2] \quad , \quad a_1 \leq a_2 \quad , \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

es un segmento de $\mathbb{R}$.

Si se supone ahora que la única información de que se dispone en relación a una magnitud es que es mayor o igual a a_1 , y menor o igual a a_2 , se podrá decir que el segmento A es el "intervalo de confianza" relativo a la magnitud considerada.

Vamos a examinar las propiedades del álgebra de los intervalos de confianza.

Igualdad de dos intervalos de confianza:

$$3.2 \quad (a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2) \iff ([a_1, a_2] = [b_1, b_2])$$

Suma de intervalos de confianza:

$$3.3 \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}:$$

$$[a_1, a_2] (+) [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

Como puede observarse sigue utilizándose aquí el símbolo (+).

Sustracción:

$$3.4 \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$[a_1, a_2] (-) [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

Se escribirán los intervalos de confianza con letras mayúsculas tales como A, B, C, ...

El complemento de A, que se escribe A^- es:

$$3.5 \quad A^- = [-a_2, -a_1]$$

Se podrá escribir que:

$$3.6 \quad A (+) A^- = [a_1, a_2] (+) [-a_2, -a_1] = [a_1 - a_2, a_2 - a_1] \neq 0$$

excepto si A se reduce a un punto de $\mathbb{R}$.

Cuando un intervalo de confianza se reduce a un punto de $\mathbb{R}$, se escribe:

$$3.7 \quad A = [a, a] = a$$

por lo que se obtiene entonces un real.

Es fácil demostrar que la operación (+) en los intervalos de confianza es conmutativa, asociativa y posee como neutro:

$$3.8 \quad [0, 0] = 0$$

Así, los intervalos de confianza forman un monoide conmutativo en $\mathbb{R}$. Se tiene pues:

$$3.9 \quad [a_1, a_2] (+) [b_1, b_2] = [b_1, b_2] (+) [a_1, a_2]$$

$$3.10 \quad [a_1, a_2] (+) ([b_1, b_2] (+) [c_1, c_2]) = \\ = ([a_1, a_2] (+) [b_1, b_2]) (+) [c_1, c_2]$$

$$3.11 \quad [a_1, a_2] (+) [0, 0] = [a_1, a_2], \text{ y} \\ [0, 0] (+) [a_1, a_2] = [a_1, a_2]$$

Por lo deducido de (3.6) los intervalos de confianza no forman un grupo para la adición.

Naturalmente, la sustracción no es ni conmutativa, ni asociativa.

Multiplicación:

La multiplicación exige una mayor atención. Primero, la consideraremos en R^+ .

$$3.12 \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in R^+ \\ [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$$

En R resulta más complicado.

$$3.13 \quad [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = \\ = [\text{MIN}(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2), \\ \text{MAX}(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)]$$

La inversa de un intervalo de confianza A se escribe A^{-1} y proporciona en R^+ :

$$3.14 \quad A^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right], \quad \begin{matrix} a_1, a_2 < 0 \\ a_1, a_2 > 0 \end{matrix}, \text{ o bien}$$

y de manera más general en R :

$$3.15 \quad A^{-1} = \left[\text{MIN} \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right), \text{MAX} \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right) \right]$$

Se puede observar que:

$$3.16 \quad A \cdot A^{-1} \neq 1$$

excepto si A se reduce a un real.

Se demuestra fácilmente la asociatividad en R para $(\cdot)$ bien a partir de (3.13), o examinando todos los casos posibles.

Así, los intervalos de confianza forman en R un monoide conmutativo cuyo neutro es:

$$3.17 \quad [1, 1] = 1$$

División:

Se considerará la división de A por B como la multiplicación de A por B^{-1} :

$$3.18 \quad A (:) B = A (.) B^{-1}$$

y recurriremos a las fórmulas (3.13) y (3.15) para el caso de R y a las (3.12) y (3.14) para el caso de R^+ .

En R^+ se escribirá:

$$3.19 \quad [a_1, a_2] (:) [b_1, b_2] = [a_1, a_2] (.) \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right]$$

$$= \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1} \right]$$

ALGUNOS EJEMPLOS

Antes de seguir adelante veamos algunos ejemplos:

3.20

$$3.21 \quad A = [-3, 5] \quad B = [2, 7] \quad C = [-4, -2]$$

3.22

$$3.23 \quad A (+) B = [-3, 5] (+) [2, 7] = [-1, 12]$$

$$3.24 \quad A (-) B = [-3, 5] (-) [2, 7] = [-3, 5] (+) [-7, -2]$$

$$= [-10, 3]$$

$$A^- = [-5, 3]$$

$$3.25 \quad A (+) B (+) C = [-3, 5] (+) [2, 7] (+) [-4, -2]$$

$$= [-3 + 2 - 4, 5 + 7 - 2]$$

$$= [-5, 10]$$

$$\begin{aligned}
 3.26 \quad A(.)B &= [-3, 5](.)[2, 7] \\
 &= [\text{MIN}((-3) \cdot (2), (-3) \cdot (7), (5) \cdot (2), (5) \cdot (7)), \\
 &\quad \text{MAX}((-3) \cdot (2) \cdot (-3) \cdot (7), (5) \cdot (2), (5) \cdot (7))] \\
 &= [\text{MIN}(-6, -21, 10, 35), \text{MAX}(-6, -21, 10, 35)] \\
 &= [-21, 35]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.27 \quad C^{-1} &= [-4, -2]^{-1} \\
 &= \left[\text{MIN} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right), \text{MAX} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.28 \quad A^{-1} &= [-3, 5]^{-1} \\
 &= \left[\text{MIN} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right), \text{MAX} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right) \right] \\
 &= \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.29 \quad (A(+)B)(.)C &= ([-3, 5](+)[2, 7])(.)[-4, -2] \\
 &= [-1, 12](.)[-4, -2] \\
 &= [\text{MIN}(4, 2, -48, -24), \text{MAX}(4, 2, -48, -24)] \\
 &= [-48, 4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.30 \quad (A(.)C)(+)(B(.)C) &= \\
 &= ([-3, 5](.)[-4, -2])(+)([2, 7](.)[-4, -2]) \\
 &= [-20, 12](+)[-28, -4] \\
 &= [-48, 8]
 \end{aligned}$$

Como se puede observar, la distributividad de $(.)$ con $(+)$ es válida sólo en R^+ .

MULTIPLICACION Y DIVISION POR UN REAL

Multiplicación por un número real:

$$3.31 \quad \text{Sea:} \quad K \in R$$

$$3.32 \quad \begin{array}{l} \text{y} \\ \text{entonces} \end{array} \quad A = [a_1, a_2] \quad , \quad a_1, a_2 \in R$$

$$3.33 \quad K \cdot A = [\text{MIN}(K \cdot a_1, K \cdot a_2), \text{MAX}(K \cdot a_1, K \cdot a_2)]$$

$$3.34 \quad \text{Así, para } K = -3 \quad \text{y} \quad A = [-3, 5] :$$

$$\begin{aligned} 3.36 \quad K \cdot A &= [\text{MIN}((-3) \cdot (-3), (-3) \cdot (5)), \\ &\quad \text{MAX}((-3) \cdot (-3), (-3) \cdot (5))] \\ &= [\text{MIN}(9, -15), \text{MAX}(9, -15)] \\ &= [-15, 9] \end{aligned}$$

También podemos escribir:

$$3.37 \quad K \cdot A = K \cdot [a_1, a_2] = [K \cdot a_1, K \cdot a_2] \quad \text{si } K \geq 0$$

División por un número real:

Si se establece que $K' = \frac{1}{K}$ nos hallamos de nuevo en el supuesto de la multiplicación suponiendo $K \neq 0$.

COMPARACION ENTRE DOS INTERVALOS DE CONFIANZA

Los intervalos de confianza $A \subset R$ no forman como R un orden total, sino un orden parcial. Así:

3.38 $[-3, 4]$ no puede ser comparado con $[-2, 3]$

Para pasar de un orden parcial a un orden total es necesario establecer de manera arbitraria un criterio, y si con uno no basta, recurriremos a otro.

Tomemos como primer criterio la suma de las abscisas de los extremos o bien la abscisa de la posición media:

$$3.39 \quad \lambda([a_1, a_2]) = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Se escribirá entonces:

$$3.40 \quad A > B \quad \text{si} \quad \frac{a_1 + a_2}{2} > \frac{b_1 + b_2}{2}$$

y si $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, es preciso adoptar otro criterio, como por ejemplo:

$$3.41 \quad A > B \quad \text{si} \quad a_2 > b_2$$

$$\text{y } a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

o bien:

$$3.42 \quad A > B \quad \text{si} \quad a_1 > b_1$$

$$\text{y } a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

$$3.43 \quad \text{Si se tiene que } a_1 \geq b_1 \quad \text{y} \quad a_2 \geq b_2$$

A y B son entonces comparables y tenemos $A \geq B$.

Veamos algunos ejemplos:

$$3.44 \quad A = [-1, 7] \quad B = [1, 8]$$

$$3.46 \quad \lambda A = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \quad , \quad \lambda B = \frac{1 + 8}{2} = 4.5$$

$$3.48 \quad A < B \quad \text{para} \quad (3.43) \quad \text{y para} \quad (3.40)$$

$$3.49 \quad A = [-3, 6] \quad , \quad B = [-1, 5]$$

$$3.51 \quad \lambda A = \frac{-3+6}{2} = 1.5 \quad \lambda B = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$3.53 \quad A < B \quad \text{para} \quad (3.40)$$

$$3.54 \quad A = [-3, 6] \quad , \quad B = [-2, 5]$$

$$3.56 \quad \lambda A = \frac{-3+6}{2} = 1.5 \quad , \quad \lambda B = \frac{-2+5}{2} = 1.5$$

El criterio (3.40) no los ha separado. Si se toma el criterio (3.41) tendríamos:

$$3.58 \quad A > B$$

Es evidente que estos criterios son arbitrarios, pero son generalmente aceptados.

MAXIMOS Y MINIMOS

También podemos definir un mínimo y un máximo. Utilicemos el símbolo $\wedge$ para el mínimo de dos reales y $\vee$ para el máximo.

Se escribirá:

$$3.59 \quad A (\wedge) B = [a_1, a_2] (\wedge) [b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$$

$$3.60 \quad A (\vee) B = [a_1, a_2] (\vee) [b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]$$

Por ello:

$$3.61 \quad A = [-4, 6] \quad , \quad B = [2, 5]$$

$$3.63 \quad A (\wedge) B = [(-4) \wedge 2, 6 \wedge 5] = [-4, 5]$$

$$3.64 \quad A (\vee) B = [(-4) \vee 2, 6 \vee 5] = [2, 6]$$

Se verifica fácilmente que las operaciones $A (\wedge) B$ así como $A (\vee) B$ son conmutativas, asociativas y distributivas y forman un retículo distributivo.

También se verifica:

$$3.65 \quad (A (\wedge) B) (+) C = (A (+) C) (\wedge) (B (+) C)$$

$$3.66 \quad (A (\vee) B) (+) C = (A (+) C) (\vee) (B (+) C)$$

$$3.67 \quad (A (\wedge) B) (.) C = (A (.) C) (\wedge) (B (.) C) \text{ en } R^+$$

$$3.68 \quad (A (\vee) B) (.) C = (A (.) C) (\vee) (B (.) C) \text{ en } R^+$$

Nos hemos limitado a las propiedades principales.

Veamos ahora el supuesto en que los intervalos de confianza se hallan definidos en Z (conjunto de enteros relativos) en lugar de R (conjunto de reales).

En Z , se definirá un intervalo de confianza por todos los enteros que existan entre su valor bajo y su valor alto. Así:

$$3.69 \quad A = [-3, 4] = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Las operaciones definidas en R también estarán definidas en Z . No se plantea ningún problema concreto para los operadores $(+)$, $(\wedge)$ y $(\vee)$; en cambio, para el operador $(.)$, es necesario precisar que el resultado de la multiplicación comprenderá todos los enteros existentes en el intervalo de confianza formado por el producto.

Así dado:

$$3.70 \quad A = [-2, 3] \quad B = [5, 9]$$

3.71

se tendrá:

$$\begin{aligned} 3.72 \quad A \cap B &= [-2, 3] \cap [5, 9] \\ &= [-18, 27] \\ &= \{-18, -17, -16, \dots, 25, 26, 27\} \end{aligned}$$

Y no solamente los productos de los enteros de A y de B.

En cuanto a la división ($:$), la descartaremos, ya que hace que el resultado salga de Z para situarse en R.

Números borrosos

EL NUMERO BORROSO COMO GENERALIZACION DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA

Un número borroso se halla formado por una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza con las siguientes propiedades:

1) Se afecta a cada intervalo de confianza un valor $\alpha \in [0, 1]$, de tal manera que dos intervalos de confianza diferentes no puedan tener el mismo valor α . Este valor se llama "nivel de presunción".

2) Se designa por $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ el intervalo de confianza de nivel α . Se debe cumplir:

$$4.1 \quad (\alpha' < \alpha) \Rightarrow (A_\alpha \supset A_{\alpha'}) \quad , \quad \alpha, \alpha' \in [0, 1]$$

Dicho de otra manera, los intervalos de confianza deben encajarse, estrictamente o no, los unos con los otros.

3) Existe un intervalo y sólo uno que puede reducirse a un real único.

Así A_α es una aplicación funcional en α .

Un número borroso será representado por una mayúscula A , con un símbolo $\sim$ (tilde) debajo, o sea $\underline{A}$. El intervalo de confianza de nivel α será designado por A_α y lo llamaremos también " α -corte de $\underline{A}$ ".

La figura 4.1 representa un número borroso y uno de sus α -cortes.

Como puede observarse el concepto de número borroso es una generalización del concepto de intervalo de confianza. En lugar de un único intervalo de confianza, consideramos una familia que satisface las condiciones 1), 2) y 3) expresadas anteriormente.

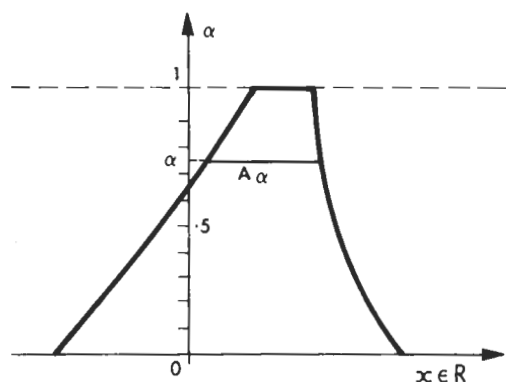
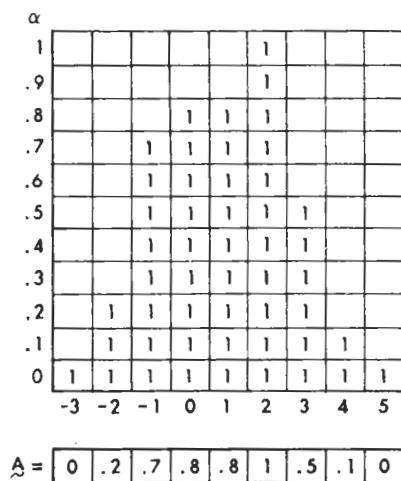


FIGURA 4.1

En la figura 4.2, se ha representado un número borroso en Z , tomando 11 α -cortes, $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ (los niveles de presunción vienen dados con 1 decimal, pero pueden tomarse tantos α -cortes como sean necesarios).

FIGURA 4.2



Un número borroso se puede presentar de dos maneras:

1) A cada nivel α se le asigna el intervalo de confianza:

$$4.2 \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$A_{\alpha} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

2) Otra manera consiste en designar mediante $\mu(x)$ la función que representa los niveles del número borroso para cada valor de $x \in \mathbb{R}$ (eventualmente $\in \mathbb{Z}$). Para ello, hay que dar la función $\mu_1(x)$ a la izquierda y la función $\mu_2(x)$ a la derecha tomando una x tal que:

$$\mu_1(x) = \mu_2(x) = 1 \quad (1)$$

Veamos un ejemplo (fig. 4.3)

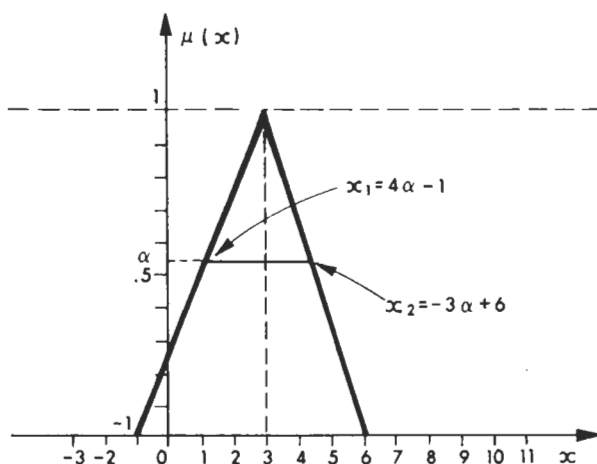


FIGURA 4.3

(1) Si x es único, el número borroso se llama unimodal.

La función $\mu(x)$ será:

$$\forall x \in \mathbb{R}:$$

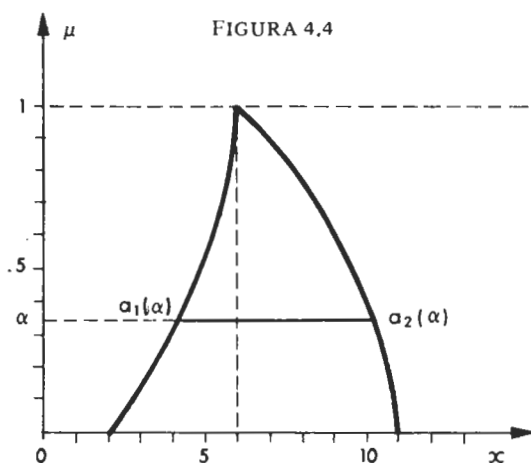
$$\begin{aligned}
 4.3 \quad \mu(x) &= 0, & x &\leq -1 \\
 &= \frac{x+1}{4}, & -1 &\leq x \leq 3 \\
 &= \frac{-x+6}{3}, & 3 &\leq x \leq 6 \\
 &= 0, & 6 &\leq x
 \end{aligned}$$

Al tomar el símbolo α en lugar de μ , se obtendrá el intervalo de confianza de nivel α tomando la función inversa de μ primero en la parte izquierda de $\tilde{A}$ para obtener $a_1(\alpha)$ y luego en la parte derecha para obtener $a_2(\alpha)$, es decir:

$$4.4 \quad A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [4\alpha - 1, -3\alpha + 6]$$

Las dos maneras de representar mediante una fórmula el número borroso $\tilde{A}$, o sea (4.3) y (4.4), son equivalentes.

Veamos otro ejemplo (figura 4.4):



$$\begin{aligned}
 4.5 \quad \mu(x) &= 0, & x \leq 2 \\
 &= \frac{1}{16} (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 6 \\
 &= \sqrt{\frac{11-x}{5}}, & 6 \leq x \leq 11 \\
 &= 0, & 11 \leq x
 \end{aligned}$$

De aquí se obtienen los intervalos de confianza en función del nivel α (es decir de μ):

$$\begin{aligned}
 4.6 \quad A_\alpha &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \\
 &= [2 + 4\sqrt{\alpha}, 11 - 5\alpha^2], \quad \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

OPERACIONES ELEMENTALES CON NUMEROS BORROSOS

Veamos ahora las diversas y principales operaciones que podemos realizar con los números borrosos. Son las mismas que pueden hacerse con los intervalos de confianza tomándolas nivel por nivel. Basta con recordar lo que se ha explicado en el capítulo anterior y definirlo para cada nivel α .

Igualdad de dos números borrosos.

$$4.8 \quad \forall \alpha \in [0, 1] :$$

$$A_\alpha = B_\alpha$$

es decir:

$$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

se escribe:

$$4.9 \quad \underline{A} = \underline{B}$$

Suma de números borrosos:

$$4.10 \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

$$= [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$$

Se escribe:

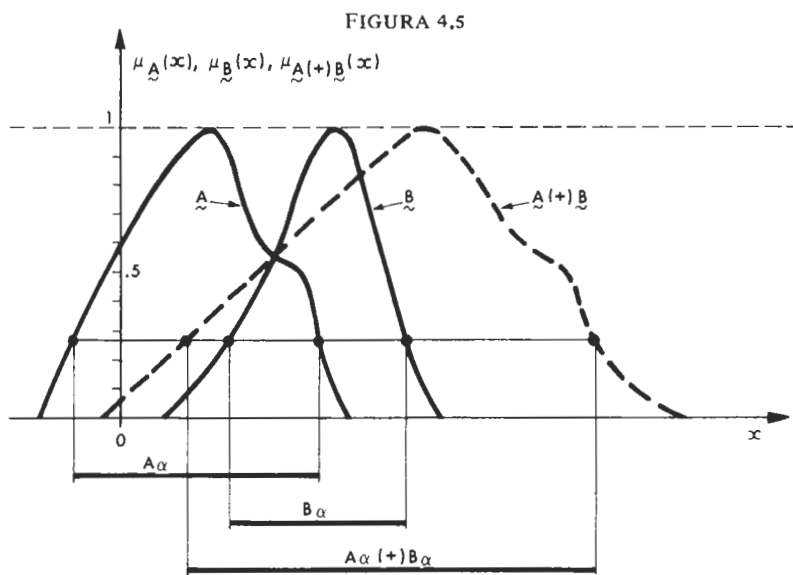
$$4.11 \quad \underline{A} (+) \underline{B}$$

Pero se puede utilizar otra fórmula considerando las funciones $\mu(x)$ o sea: $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$:

$$4.12 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\mu_{A (+) B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

Los símbolos $\wedge$ y $\bigvee$ representan respectivamente: $\wedge$ el mínimo y $\bigvee$ el límite superior o máximo.



La figura 4.5 pone de manifiesto de manera explícita cómo construir $\underline{A} (+) \underline{B}$ nivel a nivel. Se observa que la anchura aumenta cuando se suman los números borrosos, lo cual es evidente, ya que se suman precisamente las anchuras.

Para demostrar las fórmulas (4.10) y (4.12), vamos a volver a la representación dada en la figura 4.2, considerando que se toman todos los niveles $\alpha \in [0, 1]$. La presencia de un 1 en una línea para un valor de x significa que, para el nivel de esta línea $x \in [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, la presencia de un 0 (no representado) significa $x \notin [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$. Se puede entonces escribirlo simbólicamente.

Un número borroso $\underline{A}$ puede escribirse de esta manera:

$$4.13 \quad \underline{A} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

Se conviene que:

$$4.14 \quad \begin{aligned} \mu_{A_{\alpha}}(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \\ &= 0 \quad \text{si } x \notin [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \end{aligned}$$

Consideremos ahora un segundo número borroso:

$$4.15 \quad \underline{B} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

Siempre por convenio:

$$4.16 \quad \begin{aligned} \mu_{B_{\alpha}}(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ &= 0 \quad \text{si } x \notin [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \end{aligned}$$

Consideremos ahora la fórmula (4.12) y apliquemos esta fórmula a todos los niveles α :

$$4.17 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$\mu_{A_{\alpha}(+)B_{\alpha}}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_{A_{\alpha}}(x) \wedge \mu_{B_{\alpha}}(y))$$

Para todos los valores de $\underline{x}$ y de $\underline{y}$ tales como $\mu_{A_{\alpha}}(x)$ y $\mu_{B_{\alpha}}(y)$ el segundo miembro de (4.17) toma el valor 1, en el caso contrario $\mu_{A_{\alpha}}(x)$

y/o $\mu_{B\alpha}(y)$, toma el valor 0. Como se exige que $z = x + y$, podemos escribir:

$$4.18 \quad z = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha) \quad , \quad a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$$

A partir de lo cual, se puede escribir:

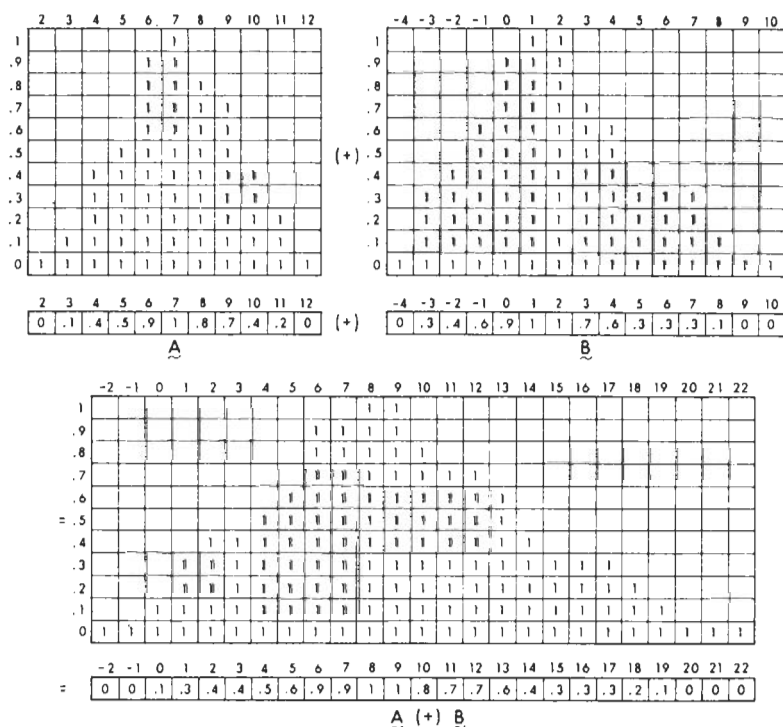
$$4.19 \quad \underline{A} (+) \underline{B} = \bigcup_{\alpha} [a_1(\alpha) + b_1(\alpha) \quad , \quad a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$$

Lo que pone de manifiesto la equivalencia de las dos fórmulas (4.10) y (4.12).

Hemos dado un ejemplo de la suma en R. Vamos a exponer ahora un ejemplo de suma en Z.

Supongamos la figura 4.6:

FIGURA 4.6



Vamos a rehacer el mismo cálculo con la ayuda de (4.12):

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{A}(+) \widetilde{B}}(-2) &= \mu_{\widetilde{A}}(2) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-4) = 0 \wedge 0 = 0, \\ \mu_{\widetilde{A}(+) \widetilde{B}}(-1) &= (\mu_{\widetilde{A}}(2) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-3)) \vee (\mu_{\widetilde{A}}(3) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-4)) \\ &= (0 \wedge .3) \vee (.1 \wedge 0) = 0,\end{aligned}$$

4.20

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{A}(+) \widetilde{B}}(0) &= (\mu_{\widetilde{A}}(2) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-2)) \vee (\mu_{\widetilde{A}}(3) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-3)) \\ \vee (\mu_{\widetilde{A}}(4) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-4)) &= \\ &= (0 \wedge .4) \vee (.1 \wedge .3) \vee (.4 \wedge 0) = .1 \\ \mu_{\widetilde{A}(+) \widetilde{B}}(1) &= (\mu_{\widetilde{A}}(2) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-1)) \vee (\mu_{\widetilde{A}}(3) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-2)) \\ \vee (\mu_{\widetilde{A}}(4) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-3)) &\vee (\mu_{\widetilde{A}}(5) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(-4)) = \\ &= (0 \wedge .6) \vee (.1 \wedge .4) \vee (.4 \wedge .3) \vee (.5 \wedge 0) = .3\end{aligned}$$

.....

Dejamos que el lector siga haciendo los cálculos como un ejercicio. Conviene demostrar que, si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ tienen las propiedades 2) y 3) en (4.1), $\widetilde{A}(+) \widetilde{B}$ también las tiene. Esto es inmediato si se emplea la presentación (4.12). Así, si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ son números borrosos, $\widetilde{A}(+) \widetilde{B}$, también lo es.

Las propiedades de suma de números borrosos son las mismas que las de los intervalos de confianza.

$$4.21 \quad \widetilde{A}(+) \widetilde{B} = \widetilde{B}(+) \widetilde{A} \quad \text{conmutativa}$$

$$4.22 \quad (\widetilde{A}(+) \widetilde{B})(+) \widetilde{C} = \widetilde{A}(+) (\widetilde{B}(+) \widetilde{C}) \quad \text{asociativa}$$

El neutro es el real 0. El opuesto $\widetilde{A}^-$ no es el simétrico.

$$4.23 \quad \underline{A}(+) \underline{A}^- \neq 0$$

Así los números borrosos forman un monoide conmutativo en R y Z .

Sustracción:

Se la define por:

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$4.24 \quad \begin{aligned} \underline{A}_\alpha (-) \underline{B}_\alpha &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (-) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ &= [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), a_2(\alpha) - b_1(\alpha)] \end{aligned}$$

o también por la fórmula:

$$\forall x, y, z \in R:$$

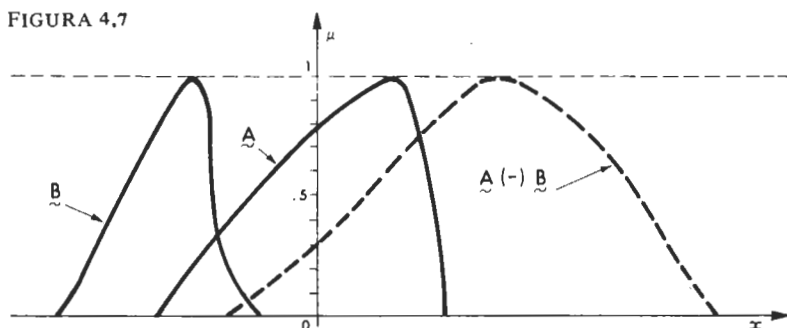
$$4.25 \quad \mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y))$$

podemos considerar la resta como la suma con el opuesto:

$$4.26 \quad \underline{A}(-)\underline{B} = \underline{A}(+)\underline{B}^-$$

Veamos un ejemplo de sustracción (fig. 4.7). No puede sorprendernos que la incertidumbre aumente; ninguna operación puede disminuir la incertidumbre si esta operación es general.

FIGURA 4.7



La resta se define en R y Z pero no en R^+ y N ya que con ella se puede salir de R^+ o N . Evidentemente, no es ni asociativa ni conmutativa.

Multiplicación de números borrosos:

La multiplicación de números borrosos en R sigue las mismas normas que la de los intervalos de confianza en R .

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$\begin{aligned} 4.27 \quad A_{\alpha} (.) B_{\alpha} &= [\text{MIN} (a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), \\ &\quad a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)), \\ &\quad \text{MAX} (a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), \\ &\quad a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha))] \end{aligned}$$

que se reduce en R^+ a:

$$\begin{aligned} 4.28 \quad A (.) B &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (.) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ &= [a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)] \end{aligned}$$

La fórmula siguiente es equivalente a (4.27):

$$\forall x, y, z \in R:$$

$$4.29 \quad \mu_{\widetilde{A} (.) \widetilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(y))$$

Como consecuencia de (4.27), los cálculos resultan bastante complicados en R , por ello el recurso a los ordenadores es importante.

Queda por demostrar a partir de (4.27) que si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ son números borrosos, también lo es el producto $\widetilde{A} (.) \widetilde{B}$. Es fácil si tomamos un $\alpha' < \alpha$, ya que el valor bajo de (4.27) no puede ser sino más pequeño o igual, mientras que el valor elevado sólo puede ser mayor. Por otra parte, se satisface automáticamente la condición 3) ya que existe por lo menos $1 \in [a_1(1), a_2(1)]$ y $1 \in [b_1(1), b_2(1)]$.

La multiplicación de números borrosos es conmutativa y asociativa en R . El neutro es el real 1. Es pues un monoide conmutativo en R . Para simplificar veamos un ejemplo en R^+ .

Supongamos que:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$4.30 \quad A_{\alpha} = [\alpha + 2, -2\alpha + 5]$$

$$4.31 \quad B_{\alpha} = [2\alpha + 3, -\alpha + 6]$$

$$4.32 \quad A_{\alpha} (.) B_{\alpha} = [(\alpha + 2) \cdot (2\alpha + 3), (-2\alpha + 5) \cdot (-\alpha + 6)] \\ = [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30]$$

Como puede observarse, la separación aumenta mucho; la multiplicación actúa fuertemente sobre la incertidumbre. Así, al nivel 0, el más bajo:

4.33

$$4.34 \quad A_{\alpha=0} = [2, 5], \quad B_{\alpha=0} = [3, 6], \quad A_{\alpha=0} (.) B_{\alpha=0} = [6, 30]$$

4.35

Las propiedades más importantes se pueden resumir así:

$$\forall \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \in R:$$

$$4.36 \quad \underline{A} (.) \underline{B} = \underline{B} (.) \underline{A} \quad \text{conmutativa}$$

$$4.37 \quad (\underline{A} (.) \underline{B}) (.) \underline{C} = \underline{A} (.) (\underline{B} (.) \underline{C}) \quad \text{asociativa}$$

$$4.38 \quad 1 (.) \underline{A} = \underline{A} (.) 1 \quad \text{el neutro es 1}$$

Como la distributividad de $(.)$ con $(+)$ es válida solamente en R^+ para los intervalos de confianza, ocurre lo mismo con los números borrosos. La otra distributividad, la de $(+)$ con $(.)$ no es nunca válida, ya que no lo es para los reales.

Se define la inversa de A o sea A^{-1} por:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$4.39 \quad A_{\alpha}^{-1} = \left[\text{MIN} \left(\frac{1}{a_1(\alpha)}, \frac{1}{a_2(\alpha)} \right), \text{MAX} \left(\frac{1}{a_1(\alpha)}, \frac{1}{a_2(\alpha)} \right) \right]$$

Se observa que:

$$4.40 \quad \underline{A}(\cdot) \underline{A}^{-1} \neq 1$$

División:

Se considera la división de $\underline{A}$ por $\underline{B}$ como la multiplicación de $\underline{A}$ por $\underline{B}^{-1}$:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$4.41 \quad \begin{aligned} A_{\alpha}(\cdot) B_{\alpha} &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)](\cdot) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ &= \left[\text{MIN} \left(\frac{a_1(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_2(\alpha)} \right), \right. \\ &\quad \left. \text{MAX} \left(\frac{a_1(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_2(\alpha)} \right) \right] \end{aligned}$$

En R^+ , resulta más simple:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$4.42 \quad A_{\alpha}(\cdot) B_{\alpha} = \left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)} \right]$$

Se puede utilizar de nuevo la fórmula:

$$\forall x, y, z \in R:$$

$$4.43 \quad \mu_{\underline{A}(\cdot)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=\frac{x}{y}} (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y))$$

Tomemos un ejemplo $\underline{A}$ dado por (4.30) y $\underline{B}$ dado por (4.31), y ya que estamos en R^+ :

$$4.44 \quad A_{\alpha}(\cdot) B_{\alpha} = \left[\frac{\alpha + 2}{-\alpha + 6}, \frac{-2\alpha + 5}{2\alpha + 3} \right]$$

para $\alpha = 0$:

$$4.45 \quad A_{\alpha=0} (:) B_{\alpha=0} = \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right]$$

Multiplicación y división por un real:

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbb{R}:$$

$$4.46 \quad k \cdot A_{\alpha} = k \cdot [a_1(\alpha), a_2(\alpha)], \\ = [\text{MIN}(k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha)), \\ \text{MAX}(k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha))]$$

$$4.47 \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$$

$$\frac{1}{k} \cdot A_{\alpha} = \left[\text{MIN}\left(\frac{a_1(\alpha)}{k}, \frac{a_2(\alpha)}{k}\right), \text{MAX}\left(\frac{a_1(\alpha)}{k}, \frac{a_2(\alpha)}{k}\right) \right]$$

DISTANCIA ENTRE DOS NUMEROS BORROSOS

Dados dos números borrosos:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$4.48 \quad A_{\alpha} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

$$4.49 \quad B_{\alpha} = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

Primero se definirá la distancia a la izquierda:

$$4.50 \quad d_I(\underline{A}, \underline{B}) = \int_{\alpha=0}^1 |a_1(\alpha) - b_1(\alpha)| d\alpha$$

y luego la distancia a la derecha:

$$4.51 \quad d_D(\underline{A}, \underline{B}) = \int_{\alpha=0}^1 |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)| d\alpha$$

y finalmente la distancia entre $\underline{A}$ y $\underline{B}$ por:

$$4.52 \quad d(\underline{A}, \underline{B}) = d_I(\underline{A}, \underline{B}) + d_D(\underline{A}, \underline{B})$$

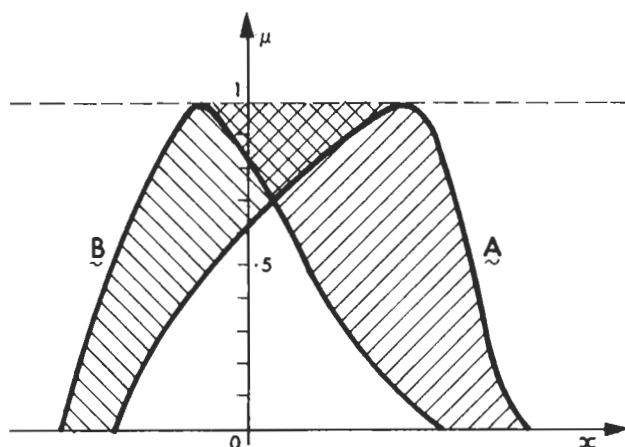


FIGURA 4.8

En la figura 4.8, se representa la distancia a la izquierda por el área marcada por \\\\\\\\\ y la distancia a la derecha por el área ////. El área total (que comprende, en el supuesto de la figura 4.8, una zona rayada 2 veces) es la suma de las dos áreas.

Veamos un ejemplo que sea fácil de calcular ya que los números borrosos proporcionan triángulos o trapecios (figura 4.9).

$$4.53 \quad d_I(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} + \frac{3 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$4.54 \quad d_D(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$4.55 \quad d(\underline{\tilde{A}}, \underline{\tilde{B}}) = \frac{5}{4} + \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

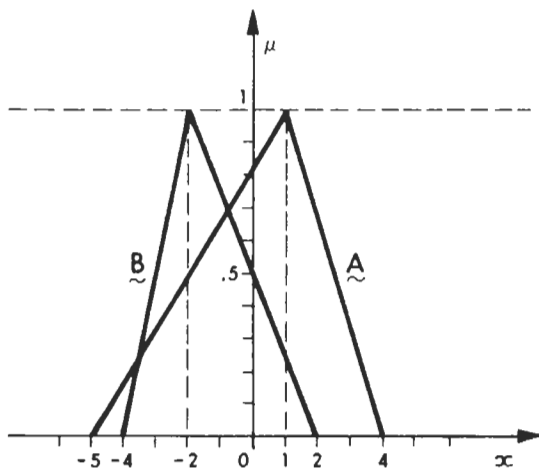


FIGURA 4.9

O también, al efectuar las integraciones:

$$4.56 \quad A_{\alpha} = [6\alpha - 5, -3\alpha + 4], \quad B_{\alpha} = [2\alpha - 4, -4\alpha + 2]$$

$$4.57 \quad |a_1(\alpha) - b_1(\alpha)| = |6\alpha - 5 - (2\alpha - 4)| = |4\alpha - 1|$$

$$4.58 \quad |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)| = |-3\alpha + 4 - (-4\alpha + 2)| = |\alpha + 2|$$

$$4.59 \quad d_I(\underline{\tilde{A}}, \underline{\tilde{B}}) = \int_{\alpha=0}^1 |4\alpha - 1| d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha=0}^{1/4} (-4\alpha + 1) d\alpha + \int_{\alpha=1/4}^1 (4\alpha - 1) d\alpha =$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$4.61 \quad d_D(\underline{A}, \underline{B}) = \int_{\alpha=0}^1 (\alpha + 2) d\alpha = \frac{5}{2}$$

MINIMO Y MAXIMO DE DOS NUMEROS BORROSOS

Dados 2 números borrosos:

$$\forall \alpha \in [0, 1];$$

$$4.62 \quad A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)], B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

llamaremos "mínimo" de $\underline{A}$ y $\underline{B}$, al número borroso definido por:

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$4.64 \quad A_\alpha (\wedge) B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (\wedge) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ = [a_1(\alpha) \wedge b_1(\alpha), a_2(\alpha) \wedge b_2(\alpha)]$$

o bien:

$$\forall x, y, z \in R:$$

$$4.65 \quad \mu_{\underline{A}(\wedge)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x \wedge y} (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y))$$

De la misma manera, llamaremos "máximo" de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ al número borroso definido por:

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$4.66 \quad A_\alpha (\vee) B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (\vee) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ = [a_1(\alpha) \vee b_1(\alpha), a_2(\alpha) \vee b_2(\alpha)]$$

o bien:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$$

$$4.67 \quad \mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x \vee y} (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y))$$

FIGURA 4,10

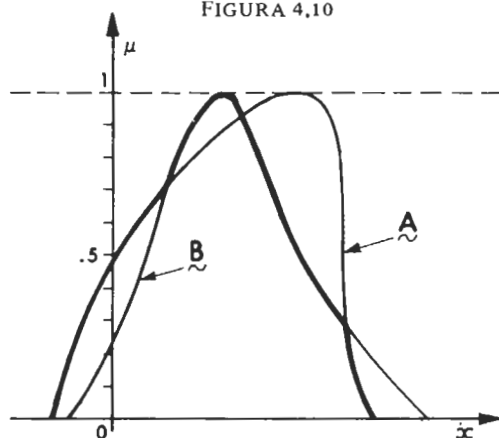
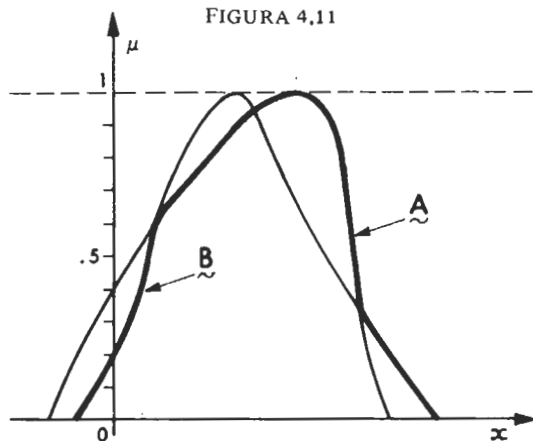


FIGURA 4,11



Se ha representado un ejemplo en las figuras 4.10 y 4.11.

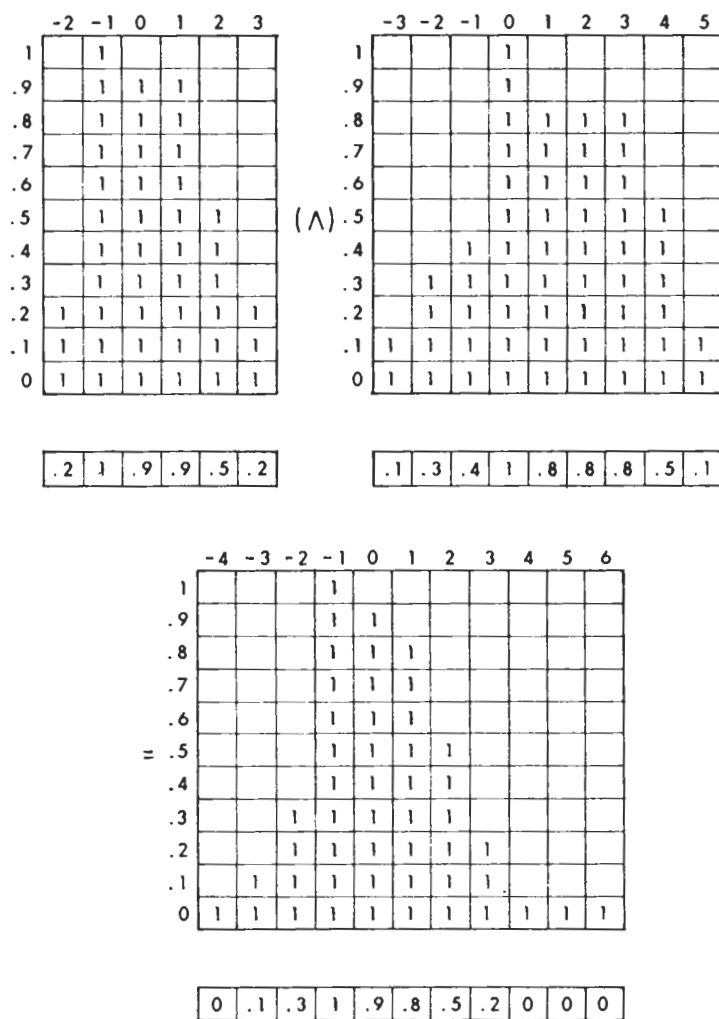


FIGURA 4.12

La figura 4.12 pone de manifiesto cómo se calcula un mínimo en Z ; de una manera paralela se obtendría el máximo.

Conviene aclarar el sentido de las palabras mínimo y máximo que han sido utilizadas. Los conceptos adecuados serán "límite inferior" o "inferium" en vez de mínimo y "límite superior" o "supremum" en lugar de máximo. En efecto, los números borrosos no forman entre sí un orden total como los reales, sino un orden parcial. En la figura 4.10, vemos que el "mínimo" de $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ no es ni $\tilde{A}$ ni $\tilde{B}$, sino un número borroso más pequeño que $\tilde{A}$ y más pequeño que $\tilde{B}$.

Asimismo, vemos en la figura 4.11 que el "máximo" de $\tilde{A}$ y de $\tilde{B}$ no es ni $\tilde{A}$ ni $\tilde{B}$, sino un número borroso mayor que $\tilde{A}$ y mayor que $\tilde{B}$.

Será necesario pues saber clasificar los números borrosos en un orden total, con la ayuda de un criterio correcto.

CLASIFICACION DE LOS NUMEROS BORROSOS EN UN ORDEN TOTAL

Dados n números borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, calculemos su máximo:

$$4.68 \quad \tilde{A}_M = \tilde{A}_1 (\vee) \tilde{A}_2 (\vee) \dots (\vee) \tilde{A}_n$$

Para cada $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, se obtendrán las distancias $d(\tilde{A}_i, \tilde{A}_M)$. El número $\tilde{A}_i$ más cercano a $\tilde{A}_M$ será considerado como el mayor. Se elimina entonces el mayor, y se vuelve a iniciar el proceso con los que quedan, y así sucesivamente. Se obtiene un orden total que no es forzosamente estricto. Dos números borrosos pueden tener la mínima distancia d en relación a un extremo superior sin que por ello tengan que ser iguales.

En este caso, se puede emplear un segundo criterio (valor de la moda, por ejemplo) y si es necesario un tercero.

Existe otro medio de realizar la clasificación. Se toma un real que constituya un límite superior de todos los números borrosos y se calcula la distancia de cada número borroso a este real; se encontrará evidentemente el mismo orden.

Podemos tomar el orden al revés, buscando $\tilde{A}_m$ y calculando las distancias $d(\tilde{A}_j, \tilde{A}_m)$. Se vuelve a encontrar el mismo orden total. También se puede tomar como referencia un real, límite inferior de todos los $\tilde{A}_j$.

Los números borrosos forman un retículo distributivo para las operaciones $(\wedge)$ y $(\vee)$.

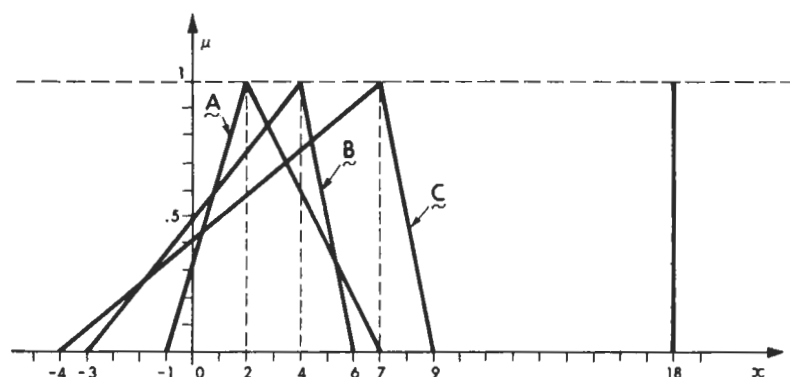


FIGURA 4.13

Supongamos que se desean clasificar tres números borrosos $\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ (figura 4.13).

Elegimos de manera arbitraria el real 18. Tenemos:

$$d_I(\underline{A}, 18) = \frac{19 + 16}{2} = 17.5, d_D(\underline{A}, 18) = \frac{11 + 16}{2} = 13.5$$

$$d(\underline{A}, 18) = 17.5 + 13.5 = 31$$

$$4.69 \quad d_I(\underline{B}, 18) = \frac{21 + 14}{2} = 17.5, d_D(\underline{B}, 18) = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

$$d(\underline{B}, 18) = 17.5 + 13 = 30.5$$

$$d_I(\underline{C}, 18) = \frac{22 + 11}{2} = 16.5, d_D(\underline{C}, 18) = \frac{9 + 11}{2} = 10$$

$$d(\underline{C}, 18) = 16.5 + 10 = 26.5$$

De lo que se deduce:

$$4.70 \quad d(\underline{C}, 18) < d(\underline{B}, 18) < d(\underline{A}, 18)$$

Es decir:

4.71

$$\underline{C} > \underline{B} > \underline{A}$$

Es evidente que las formas triangulares facilitan en gran medida los cálculos.

Números borrosos triangulares

CARACTERISTICAS Y REPRESENTACION DE UN N.B.T.

Los números borrosos triangulares son aquellos cuyas funciones μ son lineales. Así (figura 5.1):

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$5.1 \quad A_{\alpha} = [(a^{(2)} - a^{(1)})\alpha + a^{(1)}, -(a^{(3)} - a^{(2)})\alpha + a^{(3)}]$$

o también

$$\forall x \in \mathbb{R}:$$

$$\begin{aligned}
 5.2 \quad \mu_{\tilde{A}}(x) &= 0, & x &\leq a^{(1)} \\
 &= \frac{x - a^{(1)}}{a^{(2)} - a^{(1)}}, & a^{(1)} &\leq x \leq a^{(2)} \\
 &= \frac{-x + a^{(3)}}{a^{(3)} - a^{(2)}}, & a^{(2)} &\leq x \leq a^{(3)} \\
 &= 0, & a^{(3)} &\leq x
 \end{aligned}$$

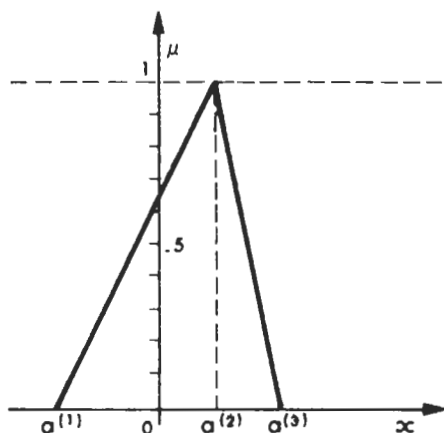


FIGURA 5.1

Salta a la vista que un número borroso triangular (en abreviación N.B.T.) queda perfectamente representado por los 3 números $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ y $a^{(3)}$. Se puede pues representar por:

$$\begin{aligned}
 5.3 \quad \tilde{A} &= (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) \\
 &a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)} \in \mathbb{R} \\
 &a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq a^{(3)}
 \end{aligned}$$

Encontramos aquí de nuevo el concepto de número incierto definido en (2.32), en donde ahora se distingue un nivel de presunción igual a 1 para el valor central y los niveles 0 para los extremos. Se vuelven a hallar las mismas propiedades pero el lector observará en las diversas aplicaciones la importancia que adquiere la introducción del nivel de presunción.

PROPIEDADES DE LOS N.B.T.

$$\begin{aligned}
 5.4 \quad \tilde{A} (+) \tilde{B} &= (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) (+) (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}) \\
 &= (a^{(1)} + b^{(1)}, a^{(2)} + b^{(2)}, a^{(3)} + b^{(3)})
 \end{aligned}$$

$$5.5 \quad \underline{A}(-)\underline{B} = (a^{(1)} - b^{(3)}, a^{(2)} - b^{(2)}, a^{(3)} - b^{(1)})$$

$$5.6 \quad \underline{A}^- = (-a^{(3)}, -a^{(2)}, -a^{(1)})$$

Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son N.B.T., en cambio $\underline{A}(\cdot)\underline{B}$; $\underline{A}(\cdot)\underline{B}$, $\underline{A}^{-1}$, $\underline{A}(\wedge)\underline{B}$, $\underline{A}(\vee)\underline{B}$, no son N.B.T.

La multiplicación por un real k proporciona

$$5.7 \quad k \cdot \underline{A} = k \cdot (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) = (\text{MIN}(k \cdot a^{(1)}, k \cdot a^{(3)}), \\ k \cdot a^{(2)}, \text{MAX}(k \cdot a^{(1)}, k \cdot a^{(3)}))$$

y $k \cdot \underline{A}$ es un N.B.T.

Veamos algunos ejemplos:

$$5.8 \quad \underline{A} = (-2, 6, 8), \quad \underline{B} = (-3, 0, 5), \quad \underline{C} = (2, 4, 8)$$

$$5.9 \quad \underline{A}(+)\underline{B} = (-5, 6, 13)$$

$$5.10 \quad \underline{A}(-)\underline{C} = (-10, 2, 6)$$

Dado $k = 3$:

$$5.11 \quad 3 \underline{A} = (-6, 18, 24) \quad , \quad 3 \underline{C} = (6, 12, 24)$$

5.12

Dado $k = -5$:

$$5.13 \quad -5 \underline{A} = (-40, -30, 10) \quad , \quad -5 \underline{C} = (-40, -20, -10)$$

5.14

También se pueden considerar números borrosos trapezoidales (figura 5.2)

Se escribirá para ellos:

$$5.15 \quad \underline{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$$

Las propiedades de los N.B.T. son ampliables sin dificultades a los números borrosos trapezoidales.

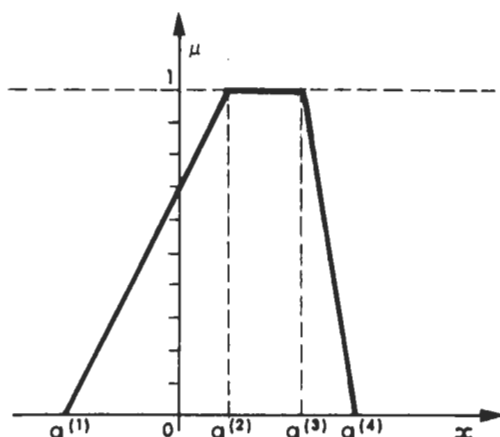


FIGURA 5.2

NUMERO BORROSO L. R. DE DUBOIS Y PRADE

Es una interesante generalización del concepto de N.B.T.
Se establece una función de referencia:

$$5.16 \quad \forall x' \in \mathbb{R} \quad , \quad \varphi \in [0, 1]:$$

$$\begin{aligned} \varphi(x') &= F_y(x') \quad , \quad -\infty < x' < 0 \\ &= 1 \quad , \quad x' = 0 \\ &= F_d(x') \quad , \quad 0 < x' < \infty \end{aligned}$$

Se impone la condición de que $F_y(x')$ sea monótona creciente y $F_d(x')$ monótona decreciente.

Ahora, a partir de φ , vamos a construir un número borroso de la siguiente manera.

A partir de $\varphi(x')$ se construye un número borroso (fig. 5.3 y 5.4):

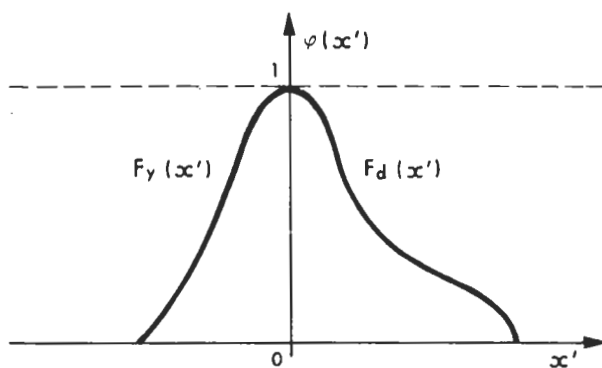
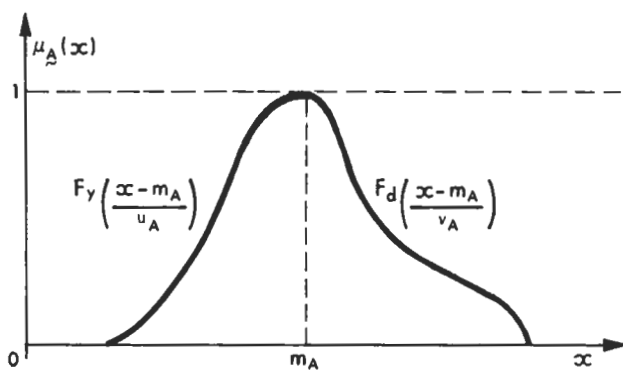


FIGURA 5.3



PARAMETRO A IZQUIERDA $u_A \in [0, \infty]$
 PARAMETRO A DERECHA $v_A \in [0, \infty]$

FIGURA 5.4

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 5.17 \quad \mu_{\tilde{A}}(x) &= F_y \left(\frac{x - m_A}{u_A} \right) , \quad -\infty < x < m_A \\
 &= 1 , \quad x = m_A \\
 &= F_d \left(\frac{x - m_A}{v_A} \right) , \quad m_A < x < \infty
 \end{aligned}$$

Resulta fácil demostrar que de esta manera, para números borrosos que tengan la misma función de referencia (5.16) pueden ser representadas de la siguiente manera:

$$5.18 \quad \tilde{A} = (m_A, u_A, v_A)$$

Sí:

$$5.19 \quad \tilde{B} = (m_B, u_B, v_B)$$

se tiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} (+) \tilde{B} &= (m_A + m_B, u_A + u_B, v_A + v_B) \\
 \tilde{A}^- &= (-m_A, v_A, u_A) \\
 \tilde{A} (-) \tilde{B} &= (m_A - m_B, u_A + v_B, u_B + v_A) \\
 k \cdot \tilde{A} &= (k \cdot m_A, k \cdot u_A, k \cdot v_A) , \quad k > 0 \\
 &= (k \cdot m_A, -k u_A, -k v_A) , \quad k < 0
 \end{aligned}$$

Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos L.R., no sucede lo mismo con $\tilde{A} (.) \tilde{B}$, $\tilde{A}^{-1}$, $\tilde{A} (:) \tilde{B}$, $\tilde{A} (\wedge) \tilde{B}$, $\tilde{A} (\vee) \tilde{B}$.

Señalemos, finalmente, que para los N.B.T. la fórmula de distancia $d(\tilde{A}, 0)$ para los números $\tilde{A}$ resulta muy sencilla:

$$5.20 \quad d(\tilde{A}, 0) = \frac{a^{(1)} + 2 a^{(2)} + a^{(3)}}{2} , \text{ en } R^+$$

y que es posible adaptarla, con las correspondientes modificaciones, para R .

Números híbridos

ASOCIACION DE INCERTIDUMBRE Y AZAR

Los números híbridos constituyen un medio para asociar datos borrosos (números borrosos) y datos aleatorios (variables aleatorias o números aleatorios). De esta manera se puede asociar lo incierto y el azar sin confundirlos.

Consideremos un número borroso $A \subset R$. Es posible realizar una traslación ℓ (a la izquierda si $\ell < 0$ y a la derecha si $\ell > 0$)

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} 6.1 \quad A_{\alpha}(+) \ell &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [\ell, \ell] \\ &= [a_1(\alpha) + \ell, a_2(\alpha) + \ell] \end{aligned}$$

y también:

$$\forall x, y, z \in R:$$

$$6.2 \quad \mu_{\tilde{A}(+)\ell}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\ell}(y))$$

en donde:

$$\begin{aligned} 6.3 \quad \mu_{\ell}(y) &= 0 & y \neq \ell \\ &= 1 & y = \ell \end{aligned}$$

Supongamos ahora que ℓ en lugar de ser un número cierto sea un número aleatorio L para el que la ley de probabilidad viene dada por la densidad $f(\ell)$.

En este caso el número borroso $\underline{A}$ se hallaría sometido a una traslación aleatoria según $f(\ell)$; el par $(\underline{A}, L)$ será denominado "número híbrido" y representa, de hecho, la suma de un número borroso y de un número aleatorio, conservándose uno y otro sin pérdida de información. Un número híbrido se escribirá también:

$$6.4 \quad \underline{A}_f = \underline{A} [+] L$$

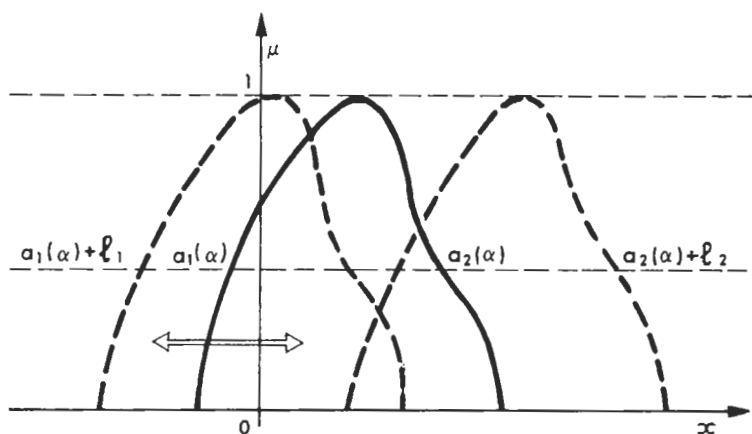
en donde L es un número aleatorio de densidad $f(\ell)$.

Es evidente que la densidad de probabilidad de $\underline{A}_f$ es la de L .

$$6.5 \quad g(\underline{A}_\alpha [+] \ell) = g([a_1(\alpha) + \ell, a_2(\alpha) + \ell]) = f(\ell)$$

Si $[\ell_1, \ell_2]$ es el segmento en que ℓ toma sus valores, la figura 6.1 pone de manifiesto las posiciones extremas de $\underline{A}_f$, en donde ℓ_1 y ℓ_2 son números de R . Se admite que la ley $f(\ell)$ es convexa aunque no sea totalmente indispensable.

FIGURA 6.1



SUMA DE DOS NUMEROS HIBRIDOS

Sean dos números híbridos en R : . La suma de estos dos números quedará definida por una convolución híbrida:

$$\begin{aligned}
 & (\underline{A}_1, L_1) [+] (\underline{A}_2, L_2) \\
 6.6 \quad & = (\underline{A}_1 (+) \underline{A}_2, L_1 (+)' L_2) \\
 & = (\underline{A}, L)
 \end{aligned}$$

en donde $(+)$ representa la suma por convolución maxmin y $(+)'$ representa la suma por convolución suma - producto tal como se hace para todas las leyes de probabilidad.

Así será:

$$\begin{aligned}
 & \forall x, y, z \in R: \\
 6.7 \quad & \mu_{\underline{A}_1(+) \underline{A}_2}(z) = \bigvee_{z=x=y} (\mu_{\underline{A}_1}(x) \wedge \mu_{\underline{A}_2}(y))
 \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned}
 & \forall \ell_1, \ell_2, \ell \in R: \\
 6.8 \quad & f(\ell) = \int_R f_1(\ell - \ell_2) \cdot f_2(\ell_2) d\ell_2 \\
 & = \int_R f_1(\ell_1) \cdot f_2(\ell - \ell_1) d\ell_1
 \end{aligned}$$

Un número borroso es un caso particular de un número híbrido:

$$6.9 \quad \underline{A} = (\underline{A}, 0)$$

en donde 0 es el real 0.

Un número aleatorio (variable aleatoria) es un caso particular de mero híbrido:

$$6.10 \quad L = (0, L)$$

en donde 0 es el real 0.

Las operaciones $(+)$ y $(+)'$ son ambas conmutativas y asociativas exactamente igual que $[+]$. El neutro de $(+)$ es cero, el neutro de $(+)'$ es cero y también es cero el neutro de $[+]$.

Con la ayuda de $[+]$ se pueden, pues, sumar números borrosos con números aleatorios y con números ciertos, en un orden arbitrario.

Así, si $\underline{A}$ es un número borroso, B una variable aleatoria de densidad $f(b)$ y c un número real:

$$\begin{aligned}
 6.11 \quad \underline{A} [+] B [+] c &= (\underline{A}, 0) [+] (0, B) [+] (0, c) \\
 &= (\underline{A}, B (+)' c) \\
 &= (\underline{A} (+) c, B)
 \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo en N:

$$6.12 \quad \underline{A} = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \geq 8 \\ \hline 0 & 0 & .1 & .3 & .4 & .1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array}$$

$$6.13 \quad pr(b) = \begin{array}{c|ccccccc|c} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline .1 & .1 & .1 & .3 & .2 & .1 & .1 & 0 \end{array}$$

$$6.14 \quad c = 3$$

por lo tanto:

$$6.15 \quad pr(b + c) = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \geq 10 \\ \hline 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .3 & .2 & .1 & .1 & 0 \end{array}$$

De donde se deduce:

$$pr \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \geq 8 \\ \hline 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .3 & .2 & .1 & .1 & 0 \end{array} \right) = 0$$

$$pr \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \geq 9 \\ \hline 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .3 & .2 & .1 & .1 & 0 \end{array} \right) = 0$$

$$pr \left(\begin{array}{c|cccccccc|c} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \geq 10 \\ \hline 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .3 & .2 & .1 & .1 & 0 \end{array} \right) = 0$$

6.16

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .1$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .1$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .1$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .3$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .2$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .1$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = .1$$

$$\text{pr} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 0 & .1 & .3 & .4 & 1 & .8 & .7 & .3 & 0 \end{array} \right) = 0$$

El problema que se plantea es si los números híbridos que han sido probabilizados así, constituyen variables aleatorias cuyas leyes de probabilidad satisfacen los axiomas fundamentales de Borel-Kolmogorov. La respuesta es afirmativa y demostrable (1).

Veamos otro ejemplo en R^+

$$\begin{aligned} 6.17 \quad \mu_{\tilde{A}}(x) &= 0, & x &\leq 2 \\ &= \frac{x}{2} - 1, & 2 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

(1) Para ello se puede consultar: A. KAUFMANN y M.M. GUPTA, *Fuzzy arithmetic*. Publisher North Holland, 1985.

$$\begin{aligned}
 &= -x + 5 & , \quad 4 \leq x \leq 5 \\
 &= 0 & , \quad 5 \leq x
 \end{aligned}$$

que representamos en la figura 6.2:

$$\begin{aligned}
 6.18 \quad f(\ell) &= 0 & , \quad \ell \leq 4 \\
 &= \frac{1}{22} (\ell - 4) & , \quad 4 \leq \ell \leq 8 \\
 &= \frac{2}{11} \cdot \frac{-\ell + 15}{7} & , \quad 8 \leq \ell \leq 15 \\
 &= 0 & , \quad 15 \leq \ell
 \end{aligned}$$

representada en la figura 6.3

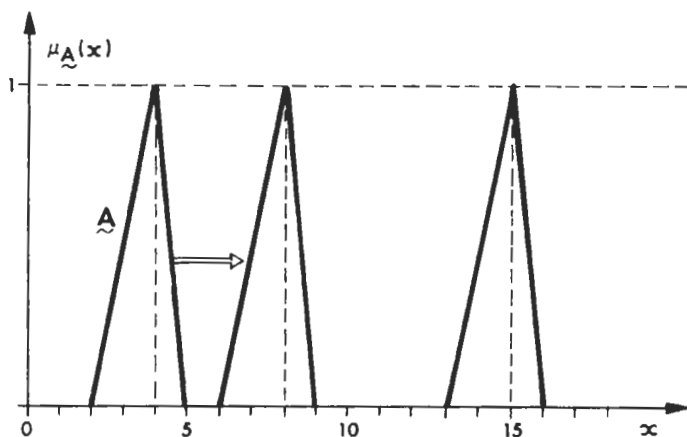


FIGURA 6.2

El dominio de L es $[4, 15]$.

Si se representa el número borroso triangular (6.17) por $(2, 4, 5)$ y para todo valor ℓ de L: $(\ell - 2, \ell, \ell + 1)$ la densidad de probabilidad será:

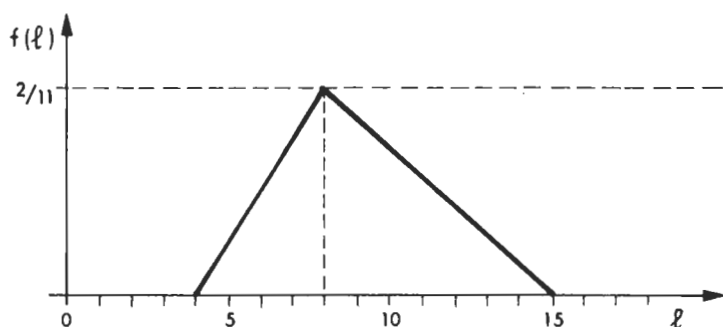


FIGURA 6.3

$$\begin{aligned}
 6.19 \quad g(\underline{A}[+]l) &= 0, & (l-2, l, l+1) &\leq (2, 4, 5) \\
 &= \frac{1}{22} (l-4), & (2, 4, 5) &\leq (l-2, l, l+1) \leq (6, 8, 9) \\
 &= \frac{2}{11} \cdot \frac{-l+15}{7}, & (6, 8, 9) &\leq (l-2, l, l+1) \leq \\
 & & &\leq (13, 15, 16) \\
 &= 0, & (l-2, l, l+1) &\geq (13, 15, 16)
 \end{aligned}$$

ESPERANZA MATEMATICA DE UN NUMERO HIBRIDO

La esperanza matemática de un número híbrido es un número borroso que es conveniente conocer.

Sea una función $\varphi(x)$ en R , monótona, creciente y no negativa.

Dado:

$$\forall x_1, x_2 \in R:$$

$$6.20 \quad (x_2 > x_1) \Rightarrow (\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2))$$

si se considera el segmento de R :

$$6.21 \quad [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

le corresponde otro segmento de R :

$$6.22 \quad [\varphi(a_1(\alpha)), \varphi(a_2(\alpha))]$$

y, por tanto, para todo $\ell \in R$ y finito:

$$6.23 \quad [\varphi(a_1(\alpha) + \ell), \varphi(a_2(\alpha) + \ell)]$$

Si ℓ es un valor que toma el número aleatorio L , los valores inferior y superior de (6.23) sólo dependen de ℓ para un mismo nivel α . Se puede calcular la esperanza matemática:

$$6.24 \quad [\bar{\varphi}(a_1(\alpha) + \ell), \bar{\varphi}(a_2(\alpha) + \ell)] \\ = \left[\int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} \varphi(a_1(\alpha) + \ell) \cdot f(\ell) d\ell, \int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} \varphi(a_2(\alpha) + \ell) \cdot f(\ell) d\ell \right]$$

Designemos ahora mediante $\mathcal{E}_\alpha(\underline{A} [+] L)$ la esperanza matemática de $(\underline{A}, L)$. Será:

6.25

$$\mathcal{E}_\alpha(\underline{A} [+] L) = \left[\int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} (a_1(\alpha) + \ell) \cdot f(\ell) d\ell, \int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} (a_2(\alpha) + \ell) \cdot f(\ell) d\ell \right] \\ = \left[a_1(\alpha) + \int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} f(\ell) d\ell, a_2(\alpha) + \int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} f(\ell) d\ell \right] \\ = [a_1(\alpha) + \mathcal{E}(L), a_2(\alpha) + \mathcal{E}(L)]$$

Se observa que si se toma la esperanza matemática de un número híbrido, se reduce la información que contiene, lo que resulta lógico en la teoría de las probabilidades.

OTRAS OPERACIONES CON NUMEROS HIBRIDOS

Veamos, por ejemplo, la multiplicación por un número real $k \neq 0$. En lo que se refiere a los números borrosos se tiene:

$$\forall x \in \mathbb{R}:$$

$$6.26 \quad \mu_{k.\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{k}\right)$$

o también:

$$6.27 \quad k . A_{\alpha} = [k . a_1(\alpha), k . a_2(\alpha)] , \quad k > 0 \\ = [k . a_2(\alpha), k . a_1(\alpha)] , \quad k < 0$$

Para la densidad de probabilidad es diferente. Si $f(\ell)$ es la densidad de L , entonces la densidad de $k . L$ viene dada por:

$$6.28 \quad g(k . \ell) = \frac{1}{k} . f(\ell) , \quad k > 0$$

Así, con $k > 0$

$$6.29 \quad k . (\tilde{A}, 0) = (k . \tilde{A}, 0)$$

$$6.30 \quad k . (0, L) = (0, k . L) \quad \text{con } g(k, \ell) = \frac{1}{k} . f(\ell) , \quad k > 0$$

$$6.31 \quad k . (\tilde{A}, L) = (k . \tilde{A}, k . L)$$

con

$$6.32 \quad \mu_{k.\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{k}\right)$$

y

$$6.33 \quad g(k . \ell) = \frac{1}{k} . f(\ell) , \quad k > 0$$

Cuando k es un entero, existe un error que no debe cometerse. Si

$$6.34 \quad 2 \cdot \underline{A} \text{ es equivalente a } \underline{A} (+) \underline{A}$$

lo que se comprueba fácilmente con los intervalos de confianza de nivel α :

$$\begin{aligned} 6.35 \quad [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \\ = [a_1(\alpha) + a_1(\alpha), a_2(\alpha) + a_2(\alpha)] \\ = [2 a_1(\alpha), 2 a_2(\alpha)] \end{aligned}$$

no sucede lo mismo con las densidades de probabilidad y las probabilidades:

$$6.36 \quad 2 L \text{ tiene por densidad } g(2\ell) = \frac{1}{2} f(\ell)$$

mientras que $L = L_1 + L_2$ en donde L_1 y L_2 tienen la misma ley $f(\ell)$ da lugar a:

$$\begin{aligned} 6.37 \quad g(\ell) &= \int_{\mathbf{R}} f(\ell - \ell_1) \cdot f(\ell_1) d\ell_1 \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(\ell - \ell_2) \cdot f(\ell_2) d\ell_2 \end{aligned}$$

Esta pequeña trampa, conocida por todos los que utilizan el cálculo de probabilidades, puede ser tendida insidiosamente en los cálculos híbridos.

Para los valores discretos existe también una pequeña trampa. Para éstos hay que escribir:

$$6.38 \quad \text{pr}_k(k, \ell) = \text{pr}(\ell), \quad \ell \in \mathbf{N}, \quad k \in \mathbf{N}_0$$

en donde pr es la ley discreta ligada a L y pr_k la ligada a $k \cdot L$.

Veamos otras operaciones.

El opuesto para la suma se define de la siguiente manera para $\underline{A}$ y L :

$$6.39 \quad \forall x, y \in R: \mu_{(-\underline{A})}(y) = \mu_{\underline{A}}(-x)$$

$$6.40 \quad \forall \ell, m \in R: g(m) = f(-\ell), \quad M = -L$$

De ahí, la obtención de la sustracción para números híbridos a través del número híbrido opuesto:

$$6.41 \quad (\underline{A}, L)^- = (-\underline{A}, -L)$$

$$6.42 \quad (\underline{A}, L) [-] (\underline{B}, M) = (\underline{A} (-) \underline{B}, L (-)' M)$$

Haz de números borrosos

LA NOCION DE NUMERO BORROSO MEDIO

Se consideran n observadores (n finito) de un mismo objeto, cada uno de ellos proporciona un número borroso $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, que constituye su sensación frente al objeto. El conjunto de los $\tilde{A}_i$ tomados de un mismo referencial constituye un "haz de números borrosos". Si se admite que la objetividad se obtiene a través de la subjetividad de un número suficiente de observadores, resulta interesante buscar un número borroso que pueda representar, de la mejor manera posible, el haz de números borrosos.

Si se considera la intersección $\bigcap_i \tilde{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, nos podemos encontrar que resulta vacía o que su máximo sea muy distinto de 1 para que pueda ser aceptada. Dado que se pretende pasar de una concepción subjetiva a una concepción objetiva, se puede aceptar el "número borroso medio" en una primera aproximación como representativo. En este caso se asigna un mismo peso a cada observador, lo que ya constituye una decisión.

Se puede escribir mediante $\tilde{A}^m$ el número borroso medio:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad , \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$7.1 \quad \tilde{A}^m_{\alpha} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{1i}(\alpha), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{2i}(\alpha) \right]$$

$$= \left[\begin{matrix} m \\ a_1 \end{matrix} (\alpha) , \begin{matrix} m \\ a_2 \end{matrix} (\alpha) \right]$$

Vamos a considerar tres N.B.T. para simplificar los cálculos:

$$7.2 \quad A_{1\alpha} = [4 + 5\alpha , 10 - \alpha]$$

$$7.3 \quad A_{2\alpha} = [5 + 3\alpha , 13 - 5\alpha]$$

$$7.4 \quad A_{3\alpha} = [6 + 5\alpha , 14 - 3\alpha]$$

$$7.5 \quad \begin{matrix} m \\ A_\alpha \end{matrix} = \frac{1}{3} [4 + 5\alpha + 5 + 3\alpha + 6 + 5\alpha , 10 - \alpha + 13 - 5\alpha + 14 - 3\alpha]$$

$$= \left[5 + \frac{13}{3}\alpha , \frac{37}{3} - 3\alpha \right]$$

cuya representación gráfica será la de la figura 7.1

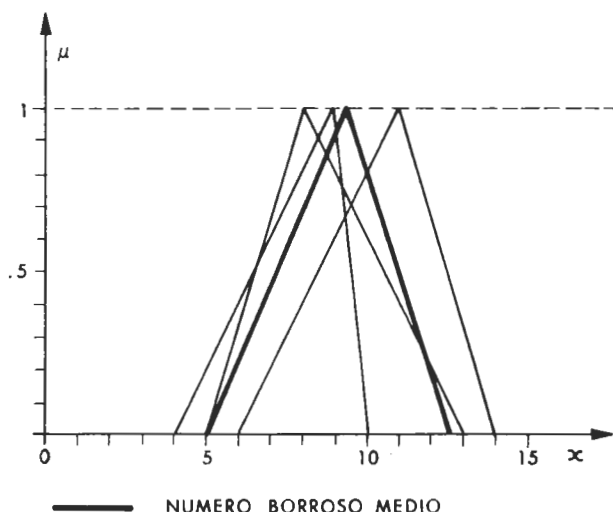


FIGURA 7.1

Con la representación del N.B.T. por tres números será:

7.6

$$7.7 \quad \underline{A}_1 = (4, 9, 10), \underline{A}_2 = (5, 8, 13), \underline{A}_3 = (6, 11, 14)$$

7.8

$$7.8 \text{ bis } \overset{m}{\underline{A}} = \frac{1}{3} (4 + 5 + 6, 9 + 8 + 11, 10 + 13 + 14) = \left(5, \frac{28}{3}, \frac{37}{3} \right)$$

ESPERANZA MATEMATICA DE UN HAZ

Hasta ahora, habíamos asignado a los n observadores el mismo peso. Supongamos que no es así y que se define para toda $i = 1, 2, \dots, n$ una ley de probabilidad $\text{pr}(i)$ sobre las i . Entonces, designando por $\bar{\underline{A}}$ el número borroso y considerando el nivel α :

$$7.9 \quad \bar{\underline{A}}_{\alpha} = \left[\sum_{i=1}^n a_{1i}(\alpha) \cdot \text{pr}(i), \sum_{i=1}^n a_{2i}(\alpha) \cdot \text{pr}(i) \right]$$

$\bar{\underline{A}}$ será el número esperado del haz.

De esta manera volviendo a tomar los N.B.T. (para simplificar los cálculos) (7.6) (7.7) y (7.8) y recogiendo los pesos relativos o probabilistas:

$$7.10 \quad \text{pr}(i=1) = \frac{1}{5}, \quad \text{pr}(i=2) = \frac{3}{5}, \quad \text{pr}(i=3) = \frac{1}{5}$$

se tiene:

$$7.11 \quad \bar{\underline{A}} = \frac{1}{5} (4, 9, 10) + \frac{3}{5} (5, 8, 13) + \frac{1}{5} (6, 11, 14) \\ = \left(5, \frac{44}{5}, \frac{63}{5} \right)$$

Si se pasa a un número no finito de observaciones en $[\ell_1, \ell_2]$ la fórmula (7.9) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 7.12 \quad \bar{A}_\alpha &= \left[\int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} a_1(\ell, \alpha) \cdot f(\ell) d\ell, \int_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} a_2(\ell, \alpha) \cdot f(\ell) d\ell \right] \\
 &= [\bar{a}_1(\alpha), \bar{a}_2(\alpha)]
 \end{aligned}$$

OBSERVACION

Antes de terminar con los números borrosos y los números híbridos hagamos una observación práctica: ¿por qué, en la suma de un número borroso y una variable aleatoria no se normaliza la ley de probabilidad de la variable borrosa para convertirla en un número borroso (dividiendo por el valor de la moda) y así sumar dos números borrosos? La razón se halla en el hecho de que al transformar así una ley de probabilidad (dato objetivo) en un número borroso (dato subjetivo) se pierde una importante información. Esta operación es matemáticamente válida pero hay que rechazarla por cuanto hace perder información. La operación contraria, transformar un número borroso en ley de probabilidad resulta inaplicable ya que no es admisible considerar como objetivo un dato subjetivo. A no ser que se posea un haz suficientemente amplio de datos subjetivos o se abandone la ciencia por el arte, pues éste es una realización subjetiva del pensamiento cuyo destino es que sea aceptada tal cual es por un suficiente elevado número de observadores.

La teoría de los subconjuntos borrosos

CONCEPTO DE SUBCONJUNTO BORROSO

Consideramos un conjunto o referencial E y un subconjunto ordinario A (figura 8.1)

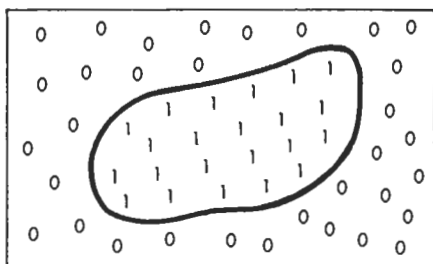


FIGURA 8.1

Para todo punto o elemento x de A , se cumple que:

$$\begin{array}{lll}
 8.1 & \mu_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\
 & = 0 & \text{si } x \notin A
 \end{array}$$

en donde μ es la función característica de A, llamada también “función de pertenencia”.

Supongamos ahora que los elementos de A en lugar de tomar solamente el valor 1 si $x \in A$ puedan tomar un valor $a \in [0, 1]$ e incluso el valor 0 (figura 8.2)

$$8.2 \quad \mu_A(x) = a \in [0, 1]$$

Se habrá construido así un “subconjunto borroso”.

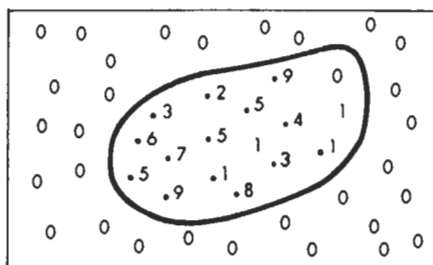
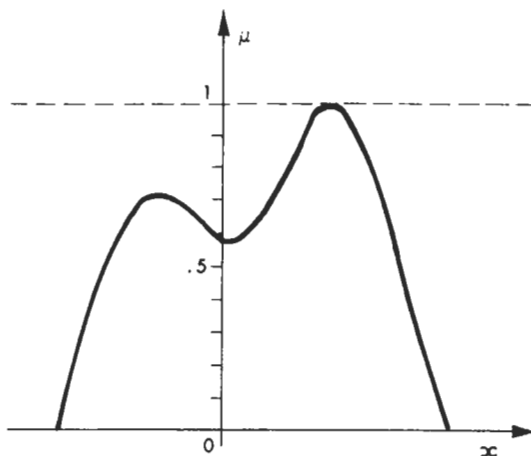


FIGURA 8.2

FIGURA 8.3



En la figura 8.2 se ha dibujado una frontera, pero en general la (o las) fronteras son imprecisas.

En la figura 8.3 se ha representado un subconjunto borroso de R a través de la forma de su función de pertenencia.

En la figura 8.4 se ha representado un subconjunto borroso $\tilde{A}$ de $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. (Se emplea el tilde $\sim$ debajo del símbolo para indicar que se trata de un subconjunto borroso). Hay que señalar que el referencial nunca es borroso.

	a	b	c	d	e	f
$E =$	1	1	1	1	1	1
	a	b	c	d	e	f
$\tilde{A} =$	.4	1	.9	0	.1	.5

FIGURA 8.4

La teoría de los subconjuntos borrosos nace a partir de 1965 y se debe a L. A. ZADEH de la Universidad de California en Berkeley. Se trata de un instrumento eficaz, cómodo y riguroso para el tratamiento de aquellos problemas en los que ciertos datos (o todos) se sitúan en la incertidumbre. Contiene como casos particulares los conceptos que hemos definido anteriormente: intervalos de confianza, números borrosos diversos, por ejemplo.

Así, un intervalo de confianza es un subconjunto borroso de R , que es en realidad un subconjunto ordinario:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(x) &= 1 & \text{si} & & x \in [a, b] \\ &= 0 & \text{si} & & x \notin [a, b] \end{aligned}$$

De hecho todo subconjunto ordinario no es más que un caso particular de subconjunto borroso.

Un número borroso es también un subconjunto borroso pero la función de pertenencia de este último debe ser convexa y normal; convexa

por cuanto una recta cualquiera no debe jamás cortar la curva que representa la función de pertenencia más de dos veces (1).

La teoría de los subconjuntos borrosos ha sido asimismo generalizada de diversas maneras, que en la actualidad pueden ser consideradas útiles o inútiles, pero que en un futuro más o menos lejano serán posiblemente de utilidad.

Vamos a hacer referencia a la teoría de ZADEH para la que hemos definido a partir de (8.2) el concepto de subconjunto borroso (fuzzy set o fuzzy sub-set, en inglés).

GENERALIZACION DE LAS OPERACIONES BOOLEANAS

Volveremos a considerar las distintas operaciones de la teoría de conjuntos ordinarios (operaciones booleanas) y veremos que estas operaciones son generalizables al ámbito borroso y que es posible, en lo borroso, definir otras muchas.

Igualdad de subconjuntos borrosos:

$$8.4 \quad (\underline{A} = \underline{B}) \iff (\forall x \in E : \mu_{\underline{A}}(x) = \mu_{\underline{B}}(x))$$

Intersección:

$$8.5 \quad (\underline{A} \cap \underline{B}) \iff (\forall x \in E : \mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(x))$$

que se representa en la figura 8.5 con trazo grueso (1)

Reunión:

$$8.6 \quad (\underline{A} \cup \underline{B}) \iff (\forall x \in E : \mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x) = \mu_{\underline{A}}(x) \vee \mu_{\underline{B}}(x))$$

(figura 8.6 con trazo grueso (2))

(1) Excepto para $\mu_{\underline{A}}(x) = \alpha$ si la función forma un "llano" para $\mu = \alpha$.

(1) Como es sobradamente conocido $\wedge$ significa MIN.

(2) Asimismo $\vee$ significa MAX.

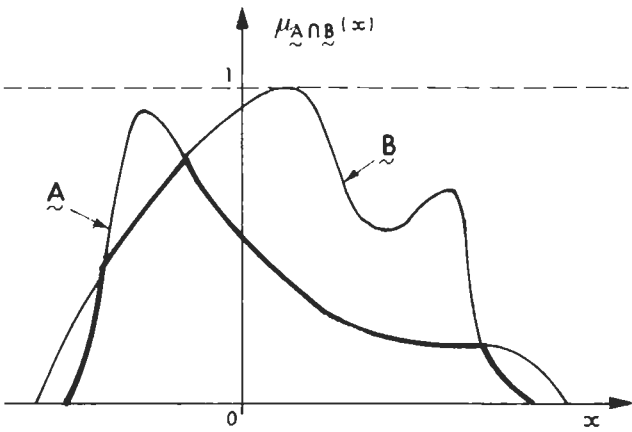


FIGURA 8.5

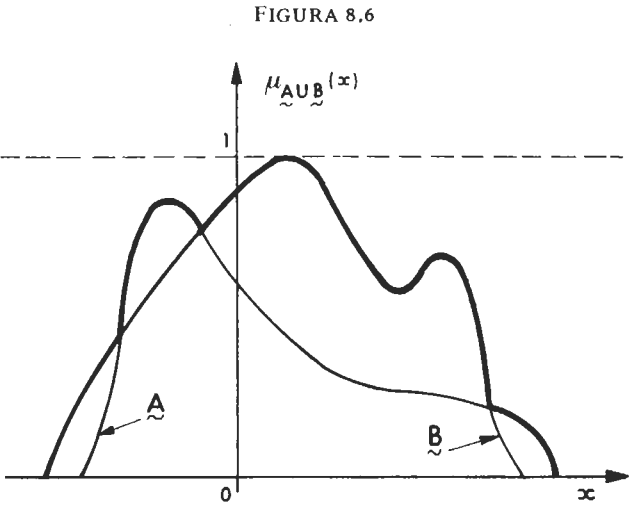


FIGURA 8.6

Complementación:

$\forall x \in E:$

$$8.7 \quad \mu_{\tilde{A}}^-(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

(figura 8.7 con trazo grueso)

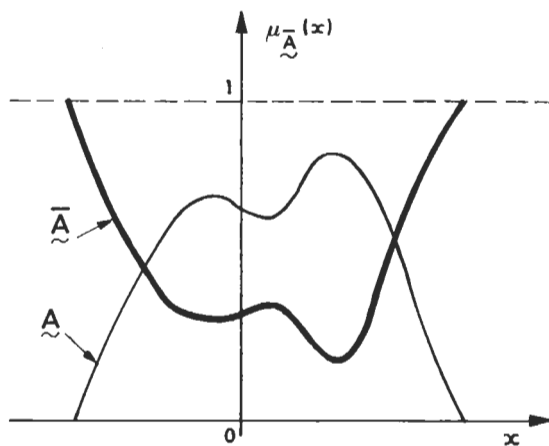


FIGURA 8.7

Traslación:

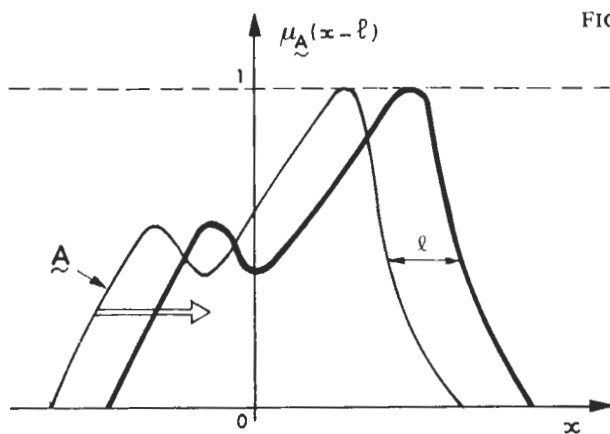
$\ell > 0$ Traslación hacia la derecha

$\ell < 0$ Traslación hacia la izquierda

$\forall x \in E:$

$$8.8 \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x - \ell) \quad , \quad \ell \in \mathbb{R}$$

(figura 8.8 con trazo grueso)

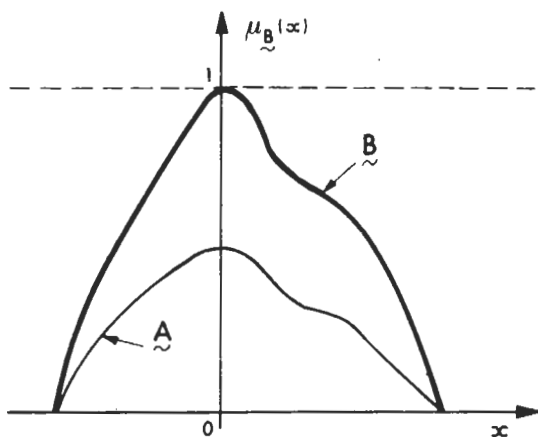


Normalización:

$\forall x \in E:$

$$8.9 \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\text{MAX } \mu_{\tilde{A}}(x)}$$

(figura 8.9 con trazo grueso)



Compresión:

$$\forall x \in E:$$

$$8.10 \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = (\mu_A(x))^k, \quad k > 1$$

(figura 8.10 con trazo grueso)

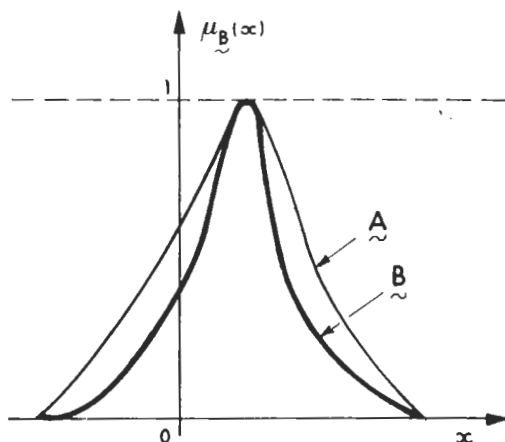


FIGURA 8.10

Dilatación:

$$\forall x \in E:$$

$$8.11 \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = (\mu_A(x))^k, \quad 0 < k < 1$$

(figura 8.11 con trazo grueso)

Existen otros muchos operadores (en realidad son infinitos) y cada uno de ellos corresponde a una operación concreta sobre el (o los) subconjunto borroso.

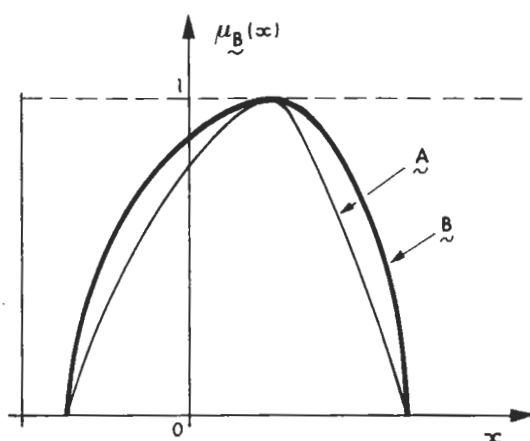


FIGURA 8.11

En relación con los tres operadores booleanos relativos a los subconjuntos ordinarios, se verifican (o no) las siguientes propiedades.

$$\forall A, B, C \subseteq E:$$

$$8.12 \quad \underline{A} \cap \underline{B} = \underline{B} \cap \underline{A}$$

$$8.13 \quad \underline{A} \cup \underline{B} = \underline{B} \cup \underline{A}$$

, conmutatividad

$$8.14 \quad (\underline{A} \cap \underline{B}) \cap \underline{C} = \underline{A} \cap (\underline{B} \cap \underline{C})$$

$$8.15 \quad (\underline{A} \cup \underline{B}) \cup \underline{C} = \underline{A} \cup (\underline{B} \cup \underline{C})$$

, asociatividad

$$8.16 \quad \underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}$$

$$8.17 \quad \underline{A} \cup \underline{A} = \underline{A}$$

, idempotencia

$$8.18 \quad \underline{A} \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cup (\underline{A} \cap \underline{C})$$

, distributividad

$$8.19 \quad \underline{A} \cup (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{A} \cup \underline{C})$$

$$8.20 \quad \underline{A} \cap \phi = \phi$$

$$8.21 \quad \underline{A} \cup \phi = \underline{A}$$

$$8.22 \quad \underline{A} \cap E = \underline{A}$$

$$8.23 \quad \underline{A} \cup E = E$$

$$8.24 \quad (\bar{\underline{A}}) = \underline{A} \quad , \text{ involución}$$

$$8.25 \quad \overline{\underline{A} \cap \underline{B}} = \bar{\underline{A}} \cup \bar{\underline{B}}$$

$$8.26 \quad \overline{\underline{A} \cup \underline{B}} = \bar{\underline{A}} \cap \bar{\underline{B}}$$

, Teoremas de De Morgan

Sin embargo:

$$8.27 \quad \underline{A} \cap \bar{\underline{A}} \neq \phi$$

$$8.28 \quad \underline{A} \cup \bar{\underline{A}} \neq E$$

las relaciones de igualdad para (8.27) y (8.28) sólo son válidas para los subconjuntos ordinarios.

La función de pertenencia $\mu_{\underline{A}}(x)$ se designa frecuentemente mediante el término "variable borrosa". De esta manera si se designa esta variable mediante una minúscula con un tilde, se podrá disponer de un gran número de operadores que satisfagan, específicamente, los teoremas de De Morgan.

Así, si se designa por $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ $\in [0, 1]$ estas variables borrosas, se tendrán unos pares de operadores $(*, *)'$ tales que:

$$8.29 \quad (*, *') = (\wedge, \vee): \text{ son los dos operadores utilizados para (8.5) y (8.6).}$$

$$8.30 \quad (*, *') = (\cdot, \hat{+}): \text{ en donde } \cdot \text{ es el producto } \underline{a} \cdot \underline{b} \text{ y } \hat{+} \text{ es la suma algebraica:}$$

$$\underline{a} \hat{+} \underline{b} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$8.31 \quad (*, *') = (\dot{\&, \dot{+}}): \text{ en donde } \underline{a} \dot{\&} \underline{b} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{1 + \bar{\underline{a}} \cdot \bar{\underline{b}}}$$

$$(\bar{\underline{a}} = 1 - \underline{a}, \bar{\underline{b}} = 1 - \underline{b})$$

$$\underline{a} \stackrel{+}{\otimes} \underline{b} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{1 + \underline{a} \cdot \underline{b}}$$

$$8.32 \quad (*, *') = (\sqcap, \sqcup): \text{ en donde } \underline{a} \sqcap \underline{b} = 0 \vee (\underline{a} + \underline{b} - 1)$$

$$\underline{a} \sqcup \underline{b} = 1 \wedge (\underline{a} + \underline{b})$$

$$8.33 \quad (*, *') = (\dot{\gamma}, \dot{\gamma}^+): \text{ en donde } \underline{a} \dot{\gamma} \underline{b} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\gamma + (1 - \gamma)(\underline{a} \hat{+} \underline{b})}$$

$$\underline{a} \dot{\gamma}^+ \underline{b} = \frac{\underline{a} \hat{+} \underline{b} - (1 - \gamma)\underline{a} \cdot \underline{b}}{\gamma + (1 - \gamma)(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})}$$

en donde γ es un parámetro $\gamma \in [0, \infty)$

para $\gamma = 1$ se tiene (8.30)

para $\gamma = 2$ se tiene (8.31)

$$8.34 \quad (*, *') = (\underset{\nu}{\vee}, \underset{\nu}{\wedge}): \text{ en donde } \underline{a} \underset{\nu}{\vee} \underline{b} = 1 - [1 \wedge (\underline{a}^{\nu} + \underline{b}^{\nu})^{\frac{1}{\nu}}]$$

$$\underline{a} \underset{\nu}{\wedge} \underline{b} = [1 \wedge (\underline{a}^{\nu} + \underline{b}^{\nu})^{\frac{1}{\nu}}]$$

en donde ν es un parámetro $\nu \in [1, \infty)$

para $\nu = 1$ se tiene (8.32)

cuando $\nu \rightarrow \infty$ se tiene (8.29)

Sólo se han presentado aquí algunos operadores a título indicativo, para los cuales se cumple que:

8.35

$$8.36 \quad \overline{\underline{a} * \underline{b}} = \overline{\underline{a}} *' \overline{\underline{b}} \quad , \quad \overline{\underline{a} *' \underline{b}} = \overline{\underline{a}} * \overline{\underline{b}}$$

es decir que satisfacen los teoremas de De Morgan (8.25) y (8.26). Por otra parte estos operadores son distributivos con $\wedge$ y $\vee$ pero no son distributivos con su par.

ENTROPIA NO PROBABILISTICA

Cuando se habla de subconjuntos borrosos, resulta interesante considerar un "índice de lo borroso" o "entropía no probabilística" que indique el grado de incertidumbre que debe tenerse en cuenta.

Se define primero la "distancia de Hamming" entre dos subconjuntos borrosos.

$$8.37 \quad d(\underline{A}, \underline{B}) = \sum_x |\mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(x)|$$

si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son subconjuntos borrosos de Z , y

$$8.38 \quad d(\underline{A}, \underline{B}) = \int_{x=x_1}^{x_2} |\mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(x)| dx, \quad x \in R$$

Se puede tomar también la "distancia euclídea":

$$8.39 \quad d'(\underline{A}, \underline{B}) = \sqrt{\sum_x (\mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(x))^2}$$

$$8.40 \quad d'(\underline{A}, \underline{B}) = \sqrt{\int_{x=x_1}^{x_2} (\mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(x))^2 dx}$$

Designemos ahora mediante $\underline{A}$ el subconjunto ordinario más próximo a $\underline{A}$, para el que:

$$8.41 \quad \begin{aligned} \mu_{\underline{A}}(x) &= 0 & \text{si} & \quad \mu_{\underline{A}}(x) \leq 0.5 \\ &= 1 & \text{si} & \quad \mu_{\underline{A}}(x) > 0.5 \end{aligned}$$

Se llamará, pues, "índice de lo borroso" o "índice de borrosidad" a la expresión:

$$8.42 \quad \nu(\underline{A}) = \frac{2}{n} d(\underline{A}, \underline{A}), \quad n = \text{card } E, \quad \underline{A} \in E$$

y si se toma la distancia euclídea:

$$8.43 \quad \eta(\underline{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}} d'(\underline{A}, \underline{\underline{A}})$$

Veamos un ejemplo muy simple.

$$8.44 \quad \underline{A} = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline & .3 & 1 & .5 & .7 & .9 & 0 & .2 \end{array}$$

$$8.45 \quad \underline{\underline{A}} = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$8.46 \quad \nu(\underline{A}) = \frac{2}{7} (|.3-0| + |1-1| + |.5-0| + |.7-1| + |.9-1| + |0-0| + |.2-0|) \\ = 0.40$$

Existen muchas otras fórmulas de estimación de la borrosidad de un subconjunto borroso. Una de las más utilizadas se debe a DE LUCA y TERMINI. Se parte de la función de SHANNON:

$$8.47 \quad S(x) = -x \cdot \ell_n x + (1-x) \cdot \ell_n (1-x) \quad , x \in [0, 1]$$

y se pone como entropía no probabilística:

$$8.48 \quad \mathcal{D}(\underline{A}) = -K \cdot \sum_{i=1}^N (\mu_{\underline{A}}(x_i) \cdot \ell_n \mu_{\underline{A}}(x_i) + \mu_{\underline{\underline{A}}}(\bar{x}_i) \cdot \ell_n \mu_{\underline{\underline{A}}}(\bar{x}_i))$$

Existe la costumbre de hacer $K = \frac{1}{N \ell_n 2}$, con lo que se obtiene:

$$8.49 \quad \mathcal{U}(\underline{A}) = \frac{-1}{N \ell_n 2} \cdot \sum_{i=1}^N (\mu_{\underline{A}}(x_i) \cdot \ell_n \mu_{\underline{A}}(x_i) + \mu_{\underline{\underline{A}}}(\bar{x}_i) \cdot \ell_n \mu_{\underline{\underline{A}}}(\bar{x}_i))$$

De esta manera, si se considera (8.44), se tendrá:

$$8.50 \quad \underline{\bar{A}} = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline & .7 & 0 & .5 & .3 & .1 & 1 & .8 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 8.51 \quad \mathcal{U}(A) &= \frac{-1}{7 \times 0.69314} (.3 \ell_n .3 + .7 \ell_n .7 + .5 \ell_n .5 + .5 \ell_n .5 \\
 &\quad + .7 \ell_n .7 + .3 \ell_n .3 + .9 \ell_n .9 + .1 \ell_n .1 + \\
 &\quad + .2 \ell_n .2 + .8 \ell_n .8) = 0.56
 \end{aligned}$$

Los distintos índices dan lugar a valores diferentes aunque, afortunadamente, con una misma jerarquía.

La entropía no probabilística o índice de borrosidad proporciona el grado de desorden en relación a un subconjunto vulgar que se halla más cercano (lo único que puede ser distinto es la noción de distancia que se utiliza).

GRAFOS O RELACIONES BORROSAS

Se consideran subconjuntos del conjunto producto $E_1 \times E_2$. Es, en realidad, una generalización de la noción de grafos o relaciones booleanas en la teoría de conjuntos ordinarios. Vamos a limitarnos a algunas indicaciones útiles para el tratamiento de los aspectos que se contemplan en esta obra (1).

Un ejemplo de grafo borroso puede ser el siguiente:

8.52

$\mathcal{R}$		a	b	c	d	e	f	g
m		.7	.6	0	0	1	.9	.3
n		.4	.4	.2	.9	.5	1	.5
p		.2	.9	.7	.2	1	.7	.6
q		.1	.7	.1	.9	.8	.5	.6
r		1	.1	.3	.2	.4	1	.1

Vamos a hacer una especial mención a los grafos en $E \times E$ que constituyen una relación de semejanza.

(1) Un análisis detallado de la noción de grafo borroso puede encontrarse en KAUFMANN, A.: "Introducción a la Teoría de los subconjuntos borrosos", Tomo I, Ed. CECSA, México, 1982.

Una relación $\tilde{R} \in E \times E$ se llama "de semejanza" si es reflexiva y simétrica, es decir, si $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, $x \in E$, $y \in E$ es la función de pertenencia de los elementos de $\tilde{R}$, se tiene que:

$$8.53 \quad 1) \quad \forall x \in E \quad : \quad \mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$$

$$8.54 \quad 2) \quad \forall x, y \in E \quad : \quad \mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$$

Este tipo de relaciones de semejanza son consideradas de poca utilidad y escasamente tratadas en la teoría de conjuntos ordinarios pero no es éste el caso para las relaciones borrosas.

Veamos un ejemplo.

8.55

$\tilde{R}$	a	b	c	d	e	f
a	1	.6	.5	.8	0	.9
b	.6	1	1	.7	.4	.2
c	.5	1	1	1	.2	.9
d	.8	.7	1	1	1	.5
e	0	.4	.2	1	1	.9
f	.9	.2	.9	.5	.9	1

Se comprueba fácilmente que (8.55) posee las propiedades (8.53) y (8.54).

Vamos a determinar nivel por nivel, para los valores α obtenidos en (8.55), cuáles son las submatrices ordinarias que sean: reflexivas, simétricas y transitivas. Definiendo la transitividad por:

$$\forall x, y, z \in E:$$

$$8.56 \quad \mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \bigvee_y (\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z))$$

En los grafos ordinarios, la transitividad se expresa, para los arcos, de la siguiente manera:

$$\forall x, y, z \in E:$$

$$8.57 \quad ((x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow ((x, z) \in R)$$

Se puede, evidentemente, verificar que, para los grafos ordinarios, (8.56) y (8.57) son equivalentes.

Busquemos, primero, los grafos ordinarios de (8.55) nivel por nivel.

8.58

$$R_1$$

	a	b	c	d	e	f
a	1					
b		1	1			
c			1	1	1	
d				1	1	1
e					1	1
f						1

$$R_{0.9}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1					1
b		1	1			
c			1	1	1	1
d				1	1	1
e					1	1
f	1		1		1	1

$$R_{0.8}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1			1		1
b		1	1			
c			1	1	1	1
d	1			1	1	1
e					1	1
f	1		1		1	1

$$R_{0.7}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1			1		1
b		1	1	1		
c			1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	1
e					1	1
f	1		1		1	1

$$R_{0.6}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1	1		1		1
b	1	1	1	1		
c			1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	1
e					1	1
f	1		1		1	1

$$R_{0.5}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1		1
b	1	1	1	1		
c	1	1	1	1		1
d	1	1	1	1	1	1
e					1	1
f	1		1	1	1	1

$$R_{0.4}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1		1
b	1	1	1	1	1	
c	1	1	1	1		1
d	1	1	1	1	1	1
e		1		1	1	1
f	1		1	1	1	1

$$R_{0.2}$$

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1		1
b	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	1
e		1	1	1	1	1
f	1	1	1	1	1	1

$$R_0$$

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	1
e	1	1	1	1	1	1
f	1	1	1	1	1	1

Para buscar cuáles son, para cada uno de estos grafos, las submatrices o grafos transitivos, es conveniente disponer de un algoritmo. Entre los varios que existen, vamos a tomar por su comodidad el de E. PICHAT. Tomemos como ejemplo la relación $R_{0,6}$ de (8.58).

Se considera la media matriz que se halla por encima de la diagonal principal. Una fila después de otra, se consideran los 0 (casillas vacías). Para cada 0, tomando los elementos como si se trataran de variables booleanas, se asocia mediante el signo de la suma booleana el elemento índice de la fila y los elementos correspondientes de las columnas en donde se encuentran los 0, los cuales serán reunidos en productos booleanos (.). Si no existe ningún 0 en la fila, se considerará que la suma es igual a 1.

Realizar el producto de los resultados y expresar la función obtenida en términos mínimos (así $x + x = x$, $x + xy = x$). Tomar entonces los complementos de cada término; se obtienen así las subrelaciones máximas que poseen la propiedad de transitividad.

Si se toma, pues, $R_{0,6}$ como ejemplo

	a	b	c	d	e	f
a	1	1		1		1
b		1	1	1		
c			1	1		1
d				1	1	
e					1	1
f						1

0.6

8.60

fila a , se forma	:	$a \dot{+} ce$
" b , "	:	$b \dot{+} ef$
" c , "	:	$c \dot{+} e$
" d , "	:	$d \dot{+} f$
" e , "	:	1
" f , "	:	1

Se obtiene:

8.61

$$\begin{aligned}
 S &= (a \dot{+} ce) \cdot (b \dot{+} ef) \cdot (c \dot{+} e) \cdot (d \dot{+} f) \\
 &= (ab \dot{+} aef \dot{+} bce \dot{+} cef) (c \dot{+} e) (d \dot{+} f) \\
 &= (abc \dot{+} abe \dot{+} aef \dot{+} bce \dot{+} cef) (d \dot{+} f) \\
 &= abcd \dot{+} abcf \dot{+} abde \dot{+} aef \dot{+} bcde \dot{+} cef
 \end{aligned}$$

Calculemos S' cuyos términos respectivos son los complementos de los de S . Se obtendrá:

8.62

$$S' = ef \dot{+} de \dot{+} cf \dot{+} bcd \dot{+} af \dot{+} abd$$

Lo que da como subrelaciones máximas transitivas:

8.63

		e	f			d	e			c	f
e	1	1		d	1	1		c	1	1	
f	1	1		e	1	1		f	1	1	

		b	c	d			a	f			a	b	d
b	1	1	1		a	1	1		a	1	1	1	
c	1	1	1		f	1	1		b	1	1	1	
d	1	1	1						d	1	1	1	

Finalmente, para cada uno de los niveles significativos de (8.55) pasando por (8.58) se obtiene:

8.64

8.64

$\alpha = 1$; a

a
1

, b

b	c	
1	1	
c	1	1

, c

c	d	
1	1	
d	1	1

, d

d	e	
1	1	
e	1	1

, f

f
1

.

$\alpha = 0,9$:

	a	f
a	1	1
f	1	1

	b	c
b	1	1
c	1	1

	c	d
c	1	1
d	1	1

	c	f
c	1	1
f	1	1

	d	e
d	1	1
e	1	1

	e	f
e	1	1
f	1	1

$\alpha = 0,8$:

	a	d
a	1	1
d	1	1

	a	f
a	1	1
f	1	1

	b	c
b	1	1
c	1	1

	c	d
c	1	1
d	1	1

	c	f
c	1	1
f	1	1

	d	e
d	1	1
e	1	1

	e	f
e	1	1
f	1	1

$\alpha = 0.7$:

	a	d
a	1	1
d	1	1

	a	f
a	1	1
f	1	1

	b	c	d
b	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

	c	f
c	1	1
f	1	1

	d	e
d	1	1
e	1	1

	e	f
e	1	1
f	1	1

$\alpha = 0,6$:

	a	b	d
a	1	1	1
b	1	1	1
d	1	1	1

	a	f
a	1	1
f	1	1

	b	c	d
b	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

	c	f
c	1	1
f	1	1

	d	e
d	1	1
e	1	1

	e	f
e	1	1
f	1	1

$\alpha = 0,5$:

	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1

	a	c	d	f
a	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1
f	1	1	1	1

	d	e	f
d	1	1	1
e	1	1	1
f	1	1	1

$\alpha = 0,4$:

	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1

	a	c	d	f
a	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1
f	1	1	1	1

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

	d	e	f
d	1	1	1
e	1	1	1
f	1	1	1

$\alpha = 0,2$:

	a	b	c	d	f
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1
f	1	1	1	1	1

	b	c	d	e	f
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1
e	1	1	1	1	1
f	1	1	1	1	1

$\alpha = 0$:

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	1
e	1	1	1	1	1	1
f	1	1	1	1	1	1

Si se examina para un mismo valor de α , las subrelaciones máximas transitivas, se observará que no todas son disjuntas; ésta es una caracte-

rística muy útil de una relación de semejanza (luego no transitiva) con respecto a una relación de similitud (transitiva) en donde todas las subrelaciones máximas son disjuntas, formando así clases de equivalencia. Para transformar una relación de semejanza en una relación de similitud, se aplica la siguiente fórmula:

$$8.65 \quad \hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

Hay que detenerse cuando $R^{n+1} = R^n$

Pero convirtiendo en transitiva una relación de semejanza, se pierden muchas informaciones útiles y precisamente la característica de la utilización de conceptos borrosos consiste en el intento de perder las menos posible y cuando no hay otro remedio retardarlas lo más que se pueda. Las intersecciones de las subrelaciones máximas transitivas aportan observaciones muy importantes, sobre todo en los problemas de las ciencias humanas y especialmente en economía.

LEY DE POSIBILIDAD

Recordemos que, si $h(x)$ es una función de la variable aleatoria X se le adscribe una ley de probabilidad $pr(x)$ (en el ámbito discreto) o una densidad de probabilidad $f(x)$ (en R), tal como:

$$8.66 \quad \sum_x pr(x) = 1 \quad \text{o bien} \quad \int_x f(x) dx = 1$$

Cuando nos referimos a un subconjunto borroso, se puede realizar una cosa análoga considerando una "ley de posibilidad" $\varphi(x)$ que debe ser tal que:

$$8.68 \quad 1) \quad \forall x \in E \quad : \quad \varphi(x) \in [0, 1]$$

$$8.69 \quad 2) \quad \sum_x \varphi(x) = 1$$

En la teoría de las probabilidades, se define la esperanza matemática por:

$$8.70 \quad E(H) = \sum_x h(x) \cdot pr(x)$$

o bien

$$8.71 \quad \mathbb{E}(H) = \int_x h(x) \cdot f(x) dx$$

De manera similar, se definirá para un subconjunto borroso $\underline{A}$ definido por $\mu_{\underline{A}}(x)$, la "posibilidad" en relación a una ley de posibilidad $\varphi(x)$:

$$8.72 \quad \text{pos}_{\varphi}(\underline{A}) = \bigvee_x (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \varphi(x))$$

Veamos un ejemplo

$$8.73 \quad \underline{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & e & f & g \\ \hline .7 & .3 & 1 & .8 & 0 & .2 & .5 \\ \hline \end{array}$$

y la ley de posibilidad

$$8.74 \quad \varphi(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & e & f & g \\ \hline .6 & .5 & .6 & 1 & .4 & .9 & .3 \\ \hline \end{array}$$

De donde:

$$8.75 \quad \text{pos}_{\varphi}(\underline{A}) = \text{MAX} (.7 \wedge .6, .3 \wedge .5, 1 \wedge .6, .8 \wedge 1, 0 \wedge .4, .2 \wedge .9, .5 \wedge .3) = 0.8$$

La noción de posibilidad, relativa a un subconjunto borroso, juega un papel similar en lo incierto (subjetivo) al de la esperanza matemática para una variable aleatoria (objetiva). De ahí el interés de esta noción en los problemas que hacen referencia a la incertidumbre considerada a través de datos subjetivos.

Hallaremos también el concepto de maxmin (máximo de los mínimos o supremo de los mínimos) para colocarnos, en un determinado tratamiento, en la posición más pesimista. Por honestidad debemos permanecer pesimistas; y si las cosas van mejor de lo previsto... miel sobre hojuelas. Con la introducción de limitaciones o de informaciones suplementarias, se puede mejorar esta visión pesimista, aunque siempre deberá, para ello, existir una justificación.

En los supuestos que vamos a tratar en el ámbito económico, se introducirán, cuando sea necesario, las nociones teóricas complementarias.

Esta obra se inicia por una parte teórica y no conviene que sea demasiado larga para que el lector no tarde demasiado en encontrar las correspondientes aplicaciones.

De todas maneras, antes de pasar a estas aplicaciones, veamos una noción interesante en la que va a combinarse lo borroso y lo aleatorio.

Subconjuntos aleatorios borrosos

OBTENCION DE UN SUBCONJUNTO ALEATORIO BORROSO

Sea un referencial finito E:

$$9.1 \quad E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y pidamos, ahora, a 10 observadores que no pueden comunicarse entre sí que nos den una función de pertenencia a E; es decir que proporcionen a través de un subconjunto borroso de E su estimación individual en relación a lo que representan los elementos de E. Se obtiene:

9.2

	a	b	c	d	e	f
$\tilde{A}_1 =$	.2	.3	.5	.9	.5	.3
$\tilde{A}_2 =$	.6	.7	.1	.8	.4	.8
$\tilde{A}_3 =$	.7	.6	.8	.9	.4	0
$\tilde{A}_4 =$	.8	.7	.2	.9	0	.8
$\tilde{A}_5 =$	1	.1	.3	1	.6	.1
$\tilde{A}_6 =$	0	.6	.7	.1	1	1
$\tilde{A}_7 =$	.2	.7	.2	0	1	0
$\tilde{A}_8 =$	0	.4	.3	.3	1	.2
$\tilde{A}_9 =$	.6	.3	.5	0	.9	.8
$\tilde{A}_{10} =$	.6	.8	1	0	.8	.6

Procedamos a contar cuántos observadores han afectado 0, luego .1, luego .2, ..., .9, 1, lo que se establecerá para cada nivel.

9.3

	a	b	c	d	e	f
0	2			3	1	2
.1		1	1	1		1
.2	2		2			1
.3		2	2	1		1
.4		1			2	
.5			2		1	
.6	3	2			1	1
.7	1	3	1			
.8	1	1	1	1	1	3
.9				3	1	
1	1		1	1	3	1

La elección de 10 observadores ha sido establecida para facilitar la presentación; no conviene imponer un número determinado de observadores sino que debe ser suficiente para que esta estadística pueda proporcionar una ley de probabilidad válida. La estimación a través de decenas es también arbitraria. Con estas observaciones, podemos ya pasar a dividir cada elemento de (9.3) por 10. De ello resulta:

9.4

	a	b	c	d	e	f
0	.2			.3	.1	.2
.1		.1	.1	.1		.1
.2	.2		.2			.1
.3		.2	.2	.1		.1
.4		.1			.2	
.5			.2		.1	
.6	.3	.2			.1	.1
.7	.1	.3	.1			
.8	.1	.1	.1	.1	.1	.3
.9				.3	.1	
1	.1		.1	.1	.3	.1

Demos ahora para toda $x \in E$ la ley de probabilidad acumulada complementaria, es decir en (9.4) obtengamos el acumulado partiendo de $\alpha = 1$.

9.5

	a	b	c	d	e	f
0	1	1	1	1	1	1
.1	.8	1	1	.7	.9	.8
.2	.8	.9	.9	.6	.9	.7
.3	.6	.9	.7	.6	.9	.6
.4	.6	.7	.5	.5	.9	.5
.5	.6	.6	.5	.5	.7	.5
.6	.6	.6	.3	.5	.6	.5
.7	.3	.4	.3	.5	.5	.4
.8	.2	.1	.2	.5	.5	.4
.9	.1	0	.1	.4	.4	.1
1	.1	0	.1	.1	.3	.1

Con ello habremos construido un subconjunto aleatorio borroso (en inglés "probabilistic set").

Señalemos, brevemente, que un subconjunto aleatorio borroso es una generalización del concepto de subconjunto borroso. Un subconjunto borroso de (9.1) puede presentarse de la siguiente manera:

9.6 $\underline{A} =$

a	b	c	d	e	f
.6	.3	1	0	.5	.1

9.7

	a	b	c	d	e	f
0	1	1	1	1	1	1
.1	1	1	1		1	1
.2	1	1	1		1	
.3	1	1	1		1	
.4	1		1		1	
.5	1		1		1	
.6	1		1			
.7			1			
.8			1			
.9			1			
1			1			

Como podemos observar se trata como en (9.5) de un subconjunto aleatorio borroso pero que sólo habrá sido establecido por un único observador. Se trata del mismo concepto generalizado de 1 observador a n observadores (en nuestro ejemplo $n = 10$ por comodidad de presentación).

Un subconjunto aleatorio borroso se designará por $\tilde{A}$. Veamos cómo se presenta ϕ y E .

			a	b	c	d	e	f				a	b	c	d	e	f		
9.8		0	1	1	1	1	1	1	1			0	1	1	1	1	1	1	
9.9	$\phi =$	.1										.1	1	1	1	1	1	1	
		.2										.2	1	1	1	1	1	1	
		.3										.3	1	1	1	1	1	1	
		.4										.4	1	1	1	1	1	1	
		.5										.5	1	1	1	1	1	1	
		.6										.6	1	1	1	1	1	1	
		.7										.7	1	1	1	1	1	1	
		.8										.8	1	1	1	1	1	1	
		.9										.9	1	1	1	1	1	1	
		1										1	1	1	1	1	1	1	

OPERACIONES CON SUBCONJUNTOS ALEATORIOS BORROSOS

Con los subconjuntos aleatorios borrosos se pueden realizar las mismas operaciones que con los subconjuntos borrosos; basta con hacer las operaciones nivel por nivel, ya que cada nivel proporciona un subconjunto borroso. Asimismo se pueden realizar las operaciones probabilísticas columna por columna. Se trata de una importante generalización que conjuga, de la mejor manera posible, lo subjetivo con lo objetivo o, si se quiere, lo que es incierto y lo que es aleatorio.

Se puede escribir : $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \subset E$:

$$9.10 \quad \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$$

conmutatividad

$$9.11 \quad \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$$

$$9.12 \quad (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$$

- 9.13 $(\underline{A} \cup \underline{B}) \cup \underline{C} = \underline{A} \cup (\underline{B} \cup \underline{C})$ asociatividad
- 9.14 $\underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}$ idempotencia
- 9.15 $\underline{A} \cup \underline{A} = \underline{A}$
- 9.16 $\underline{A} \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cup (\underline{A} \cap \underline{C})$ distributividad
- 9.17 $\underline{A} \cup (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{A} \cup \underline{C})$
- 9.18 $\underline{A} \cap \phi = \phi$
- 9.19 $\underline{A} \cup \phi = \underline{A}$
- 9.20 $\underline{A} \cap E = \underline{A}$
- 9.21 $\underline{A} \cup E = E$
- 9.22 $(\overline{\underline{A}}) = \underline{A}$
- 9.23 $\overline{\underline{A} \cap \underline{B}} = \overline{\underline{A}} \cup \overline{\underline{B}}$ teoremas de De Morgan
- 9.24 $\overline{\underline{A} \cup \underline{B}} = \overline{\underline{A}} \cap \overline{\underline{B}}$

LA COMPLEMENTACION DE UN SUBCONJUNTO ALEATORIO BORROSO

Queda por explicitar el complementario de un subconjunto aleatorio borroso. Veamos cómo se obtiene.

Si F_x es la función acumulativa del subconjunto aleatorio borroso para x , el complementario vendrá dado por:

$$\forall x \in E:$$

$$9.25 \quad \overline{F}_x(\overline{\alpha}) = \sum_{z=\alpha}^1 pr_x(1-z)$$

Así, para (9.5), partiendo de (9.4) resulta:

9.26 $\bar{\tilde{A}} =$

$\bar{\alpha}$	a	b	c	d	e	f	α
0	1	1	1	1	1	1	1
.1	.9	1	.9	.9	.7	.9	.9
.2	.9	1	.9	.6	.6	.9	.8
.3	.8	.9	.8	.5	.5	.6	.7
.4	.7	.6	.7	.5	.5	.6	.6
.5	.4	.4	.7	.5	.4	.5	.5
.6	.4	.4	.5	.5	.3	.5	.4
.7	.4	.3	.5	.5	.1	.5	.3
.8	.4	.1	.3	.4	.1	.4	.2
.9	.2	.1	.1	.4	.1	.3	.1
1	.2	0	0	.3	.1	.2	0

Para niveles recogidos en lo continuo de $[0, 1]$ se tomará:

$$\forall x \in E$$

$$9.27 \quad \bar{F}_x(\bar{\alpha}) = 1 - F_x(1 - \alpha)$$

Se tiene:

$$9.28 \quad \tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq \emptyset$$

$$9.29 \quad \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq E$$

SEGUNDA PARTE

Técnicas cuantitativas de gestión

La actualización en la incertidumbre

TIPOS DE ACTUALIZACION INCIERTOS

La conocida fórmula de actualización de rentas para n períodos (tomando el año como período) es:

$$10.1 \quad V_n = A_0 + A_1 (1+i)^{-1} + A_2 (1+i)^{-2} + \dots + A_n (1+i)^{-n}$$

en donde A_j es la renta relativa al año j , i es el tipo de actualización y V_n las rentas actualizadas a lo largo de los n años.

Esta fórmula de actualización sólo es válida en la hipótesis de que i sea constante, lo que resulta difícilmente admisible en los momentos actuales. Vamos a determinar qué ventajas pueden conseguirse con la utilización de los números borrosos para comparar series de rentas.

Supongamos que los tipos de actualización no solamente son variables sino que no son suficientemente conocidos con la debida anticipación. Sin embargo un grupo de expertos ha conseguido ponerse de acuerdo para tres valores de i : el más bajo será r , el de nivel de presunción 1 será m , mientras que el valor más elevado será s . Se ha aceptado así un número borroso de forma triangular para describir el valor incierto i para cada momento t .

La figura 10.1 representa el N.B.T:

$$10.2 \quad \underline{j} = (r, m, s)$$

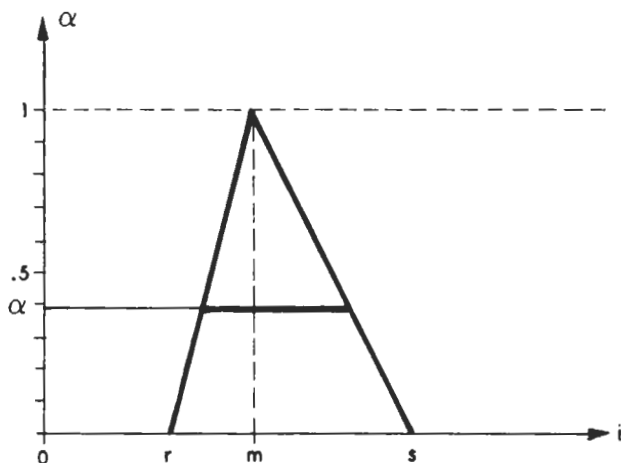


FIGURA 10.1

Si se designa por $[r(\alpha), s(\alpha)]$ el intervalo de confianza de $\tilde{i}$ al nivel α , se tiene:

$$\forall \alpha \in [0, 1] :$$

$$10.3 \quad [r(\alpha), s(\alpha)] = [r + (m - r)\alpha, s - (s - m)\alpha]$$

Si ahora tomamos la fórmula (10.1) para generalizarla con tipos inciertos por N.B.T., tendremos:

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$10.4 \quad V_n^{(\alpha)} = A_0 (+) \frac{A_1}{1 (+) [r_1(\alpha), s_1(\alpha)]} (+)$$

$$(+)\frac{A_2}{(1 (+) [r_1(\alpha), s_1(\alpha)]) (.) (1 (+) [r_2(\alpha), s_2(\alpha)])}$$

$$(+)\dots\dots$$

$$(+)\frac{A_n}{(1(+)[r_1(\alpha), s_1(\alpha)])(\cdot)(1(+)[r_2(\alpha), s_2(\alpha)])(\cdot)\dots(\cdot)(1(+)[r_n(\alpha), s_n(\alpha)])}$$

Esta fórmula proporciona el intervalo de confianza al nivel α para la renta total actualizada $V_n^{(\alpha)}$:

$$10.5 \quad V_n^{(\alpha)} = [R(\alpha), S(\alpha)]$$

Se observa que: $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$10.6 \quad (1(+)[r_k(\alpha), s_k(\alpha)]) = [1, 1](+)[r_k(\alpha), s_k(\alpha)] \\ = [1 + r_k(\alpha), 1 + s_k(\alpha)]$$

y, teniendo en cuenta (3.14) ya que nos encontramos en R^+ :

$$10.7 \quad \frac{1}{1(+)[r_k(\alpha), s_k(\alpha)]} = \left[\frac{1}{1 + s_k(\alpha)}, \frac{1}{1 + r_k(\alpha)} \right]$$

Así, la fórmula (10.4) se convierte en:

$$10.8 \quad V_n^{(\alpha)} = A_0 [1, 1](+) A_1 \left[\frac{1}{1 + s_1(\alpha)}, \frac{1}{1 + r_1(\alpha)} \right] \\ (+) A_2 \left[\frac{1}{(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha))}, \frac{1}{(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha))} \right] \\ (+) \dots\dots\dots$$

$$(+) A_n \left[\frac{1}{(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha)) \dots (1 + s_n(\alpha))}, \right. \\ \left. \frac{1}{(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha)) \dots (1 + r_n(\alpha))} \right]$$

La fórmula (10.8) se calcula con facilidad. Antes de presentar un ejemplo numérico, señalemos el interés que adquiere esta fórmula. Por una

parte permite calcular el abanico de posibilidades en el cual, para cada nivel, se confía encontrar el resultado real así como el valor correspondiente a la máxima presunción. Por otra parte, si se establece un umbral (formal o borroso) (figuras 10.2 y 10.3), se podrá determinar para qué nivel α podrá aceptarse la elección de las A_α y las hipótesis sobre los

$$[r_k(\alpha), s_k(\alpha)]$$

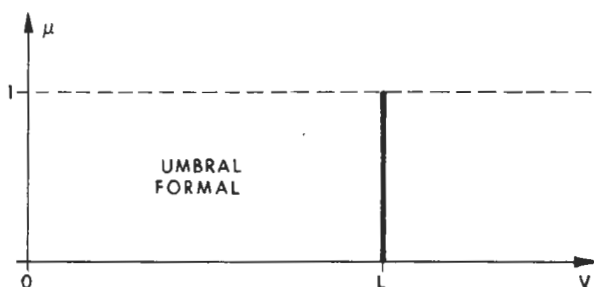


FIGURA 10.2

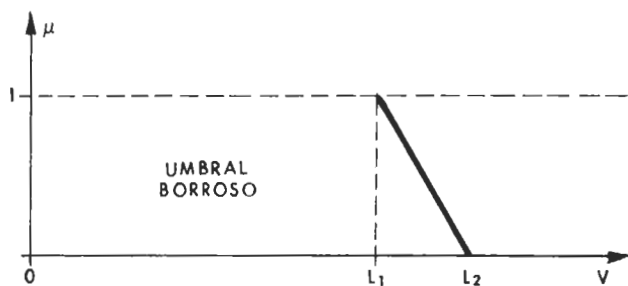


FIGURA 10.3

UN SUPUESTO CON HORIZONTE ECONOMICO FINITO

Veamos un ejemplo numérico. Se considera un horizonte económico de 5 años, es decir $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La cantidad inicial A_0 no será

tenida en cuenta ya que puede suponerse como un dato cierto, en cuyo caso puede ser añadido, si es necesario, al final de los cálculos.

Se parte de los datos siguientes:

10.9

año 1: $A_1 = 5.000$ unidades monetarias, $(r_1, m_1, s_1) = (8, 10, 12)$ (en %)

2: $A_2 = 4.000$ " " , $(r_2, m_2, s_2) = (9, 12, 15)$

3: $A_3 = 3.000$ " " , $(r_3, m_3, s_3) = (9, 12, 15)$

4: $A_4 = 3.000$ " " , $(r_4, m_4, s_4) = (8, 9, 10)$

5: $A_5 = 7.000$ " " , $(r_5, m_5, s_5) = (8, 9, 10)$

Estos datos son arbitrarios y no corresponden a hipótesis establecidas previamente. El único objetivo que perseguimos es la realización de un ejemplo de cálculo.

Para aplicar la fórmula (10.8) será necesario calcular algunas tablas para $\alpha = 0, .1, .2, .3, \dots, .9, 1$

$$1 + r_1(\alpha) = 1 + r_1 + (m_1 - r_1)\alpha = 1 + 0.08 + 0.02\alpha = 1.08 + 0.02\alpha$$

$$1 + r_2(\alpha) = 1 + r_2 + (m_2 - r_2)\alpha = 1 + 0.09 + 0.03\alpha = 1.09 + 0.03\alpha$$

$$10.10 \quad 1 + r_3(\alpha) = 1 + r_3 + (m_3 - r_3)\alpha = 1 + 0.09 + 0.03\alpha = 1.09 + 0.03\alpha$$

$$1 + r_4(\alpha) = 1 + r_4 + (m_4 - r_4)\alpha = 1 + 0.08 + 0.01\alpha = 1.08 + 0.01\alpha$$

$$1 + r_5(\alpha) = 1 + r_5 + (m_5 - r_5)\alpha = 1 + 0.08 + 0.01\alpha = 1.08 + 0.01\alpha$$

A partir de estos datos, se puede obtener:

$$(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha)) = (1.08 + 0.02\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)$$

$$(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha))(1 + r_3(\alpha)) =$$

$$= (1.08 + 0.02\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)$$

$$10.11 \quad (1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha))(1 + r_3(\alpha))(1 + r_4(\alpha)) =$$

$$= (1.08 + 0.02\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)(1.08 + 0.01\alpha)$$

$$(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha))(1 + r_3(\alpha))(1 + r_4(\alpha))(1 + r_5(\alpha)) =$$

$$= (1.08 + 0.02\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)(1.09 + 0.03\alpha)$$

$$(1.08 + 0.01\alpha)(1.08 + 0.01\alpha)$$

Por otra parte se tiene que:

10.12

$$1 + s_1(\alpha) = 1 + s_1 - (s_1 - m_1)\alpha = 1 + 0.12 - 0.02\alpha = 1.12 - 0.02\alpha$$

$$1 + s_2(\alpha) = 1 + s_2 - (s_2 - m_2)\alpha = 1 + 0.15 - 0.03\alpha = 1.15 - 0.03\alpha$$

$$1 + s_3(\alpha) = 1 + s_3 - (s_3 - m_3)\alpha = 1 + 0.15 - 0.03\alpha = 1.15 - 0.03\alpha$$

$$1 + s_4(\alpha) = 1 + s_4 - (s_4 - m_4)\alpha = 1 + 0.10 - 0.01\alpha = 1.10 - 0.01\alpha$$

$$1 + s_5(\alpha) = 1 + s_5 - (s_5 - m_5)\alpha = 1 + 0.10 - 0.01\alpha = 1.10 - 0.01\alpha$$

De donde se puede obtener:

10.13

$$(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha)) = (1.12 - 0.02\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)$$

$$(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha))(1 + s_3(\alpha)) = \\ = (1.12 - 0.02\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)$$

$$(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha))(1 + s_3(\alpha))(1 + s_4(\alpha)) = \\ = (1.12 - 0.02\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)(1.10 - 0.01\alpha)$$

$$(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha))(1 + s_3(\alpha))(1 + s_4(\alpha))(1 + s_5(\alpha)) = \\ = (1.12 - 0.02\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)(1.15 - 0.03\alpha)(1.10 - 0.01\alpha) \\ (1.10 - 0.01\alpha)$$

No detallamos los cálculos (1), para los que basta una pequeña calculadora de bolsillo, que llevan al resultado expresado en (10.15). La curva viene dada por la figura 10.4, en donde se observa que la función es casi triangular. No se trata de una casualidad ya que mientras el número de períodos (años) no es muy elevado, se obtiene siempre un resultado que se acerca a un N.B.T.

Por otra parte, el cálculo hubiera podido ser realizado con mayor rapidez tomando, para estos datos, la forma (10.2). Como es sabido, si (10.2) representa un N.B.T. su inversa no es un N.B.T. pero se le acerca mucho. Así, pues:

(1) El lector que lo desee puede consultar: KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. "Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos a la Gestión de las Empresas", Ed. Milladoiro 1986, capítulo 4.º, en donde encontrará un esquema de los cuadros que llevan con facilidad al resultado.

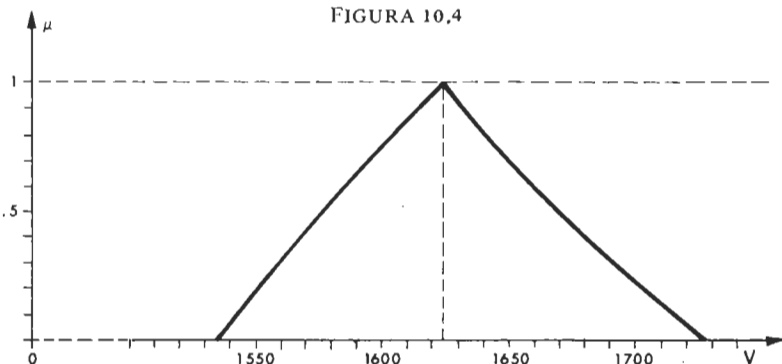
$$10.14 \quad \left(\frac{1}{1+s}, \frac{1}{1+m}, \frac{1}{1+r} \right)^n \simeq \left(\frac{1}{(1+s)^n}, \frac{1}{(1+m)^n}, \frac{1}{(1+r)^n} \right)$$

De todas maneras $\frac{1}{(1+s)^n}$ será el valor más pequeño, $\frac{1}{(1+m)^n}$ será el valor que corresponde al máximo de presunción y $\frac{1}{(1+r)^n}$ será el valor más elevado. (Evidentemente los resultados numéricos para estos valores sólo coincidirán exactamente si no se desprecian decimales).

10.15

α	$V_n^{(\alpha)}$
0	[15 342 , 17 207]
.1	[15 412 , 17 123]
.2	[15 513 , 17 004]
.3	[15 600 , 16 904]
.4	[15 687 , 16 805]
.5	[15 766 , 16 707]
.6	[15 845 , 16 610]
.7	[15 955 , 16 514]
.8	[16 046 , 16 416]
.9	[16 138 , 16 316]
1	16 230

FIGURA 10.4

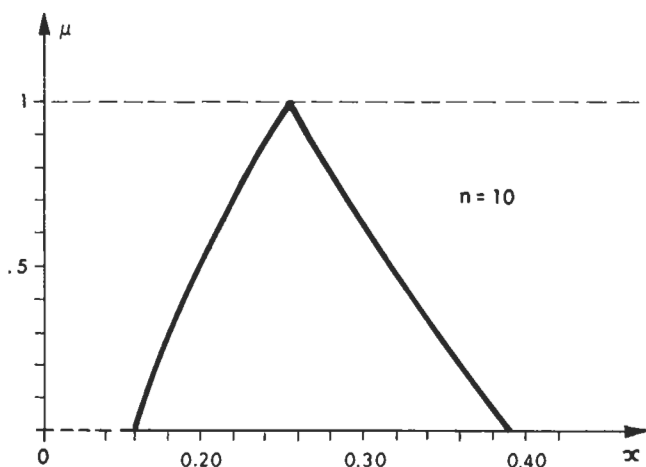


Si se admite esta simplificación, el ejemplo de actualización que hemos expuesto podrá escribirse:

$$\begin{aligned}
 V_n &= 5000 \left(\frac{1}{1.12}, \frac{1}{1.10}, \frac{1}{1.08} \right) (+) 4000 \left(\frac{1}{1.2880}, \frac{1}{1.2320}, \frac{1}{1.1772} \right) \\
 & (+) 3000 \left(\frac{1}{1.48120}, \frac{1}{1.37984}, \frac{1}{1.28314} \right) \\
 10.16 \\
 & (+) 3000 \left(\frac{1}{1.629320}, \frac{1}{1.504025}, \frac{1}{1.385791} \right) \\
 & (+) 7000 \left(\frac{1}{1.792252}, \frac{1}{1.639387}, \frac{1}{1.496654} \right) \\
 & = (15342 \quad , \quad 16230 \quad , \quad 17207)
 \end{aligned}$$

Estos cálculos resultan más cortos pero para un ordenador el tiempo de obtención de las respuestas es despreciable tanto para uno como para otro de estos métodos.

FIGURA 10.5



En la figura 10.5 se ha representado la evolución de la curva μ para:

$$10.17 \quad \left[\frac{1}{(1.2 - 0.05\alpha)^{10}}, \frac{1}{(1.1 + 0.05\alpha)^{10}} \right]$$

es decir para un tipo dado por:

$$10.18 \quad (0.100, 0.150, 0.200)$$

en %, lo que representa un abanico entre el 10 % y el 20 % en 10 años; la curva se acerca bastante a un N.B.T.

En la figura 10.6 se ha pasado a 20 años y nos alejamos mucho más de un N.B.T.

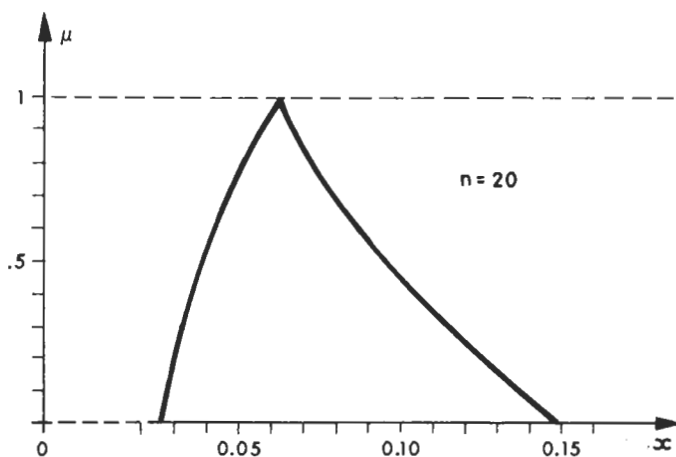


FIGURA 10.6

De manera general se puede afirmar que nos acercaremos más a un N.B.T. cuanto más reducidos sean los tipos de actualización y más pequeño sea el número de períodos (años); esto aparece de manera clara desde un punto de vista intuitivo.

Sin embargo, como es difícil de obtener una fórmula general de desviación relativa en relación a la forma del N.B.T. habida cuenta de la

variedad que puedan adquirir las A_i , los N.B.T. de los tipos y la duración, es preferible realizar los cálculos utilizando el método de niveles α , $\alpha \in \{0, .1, .2, \dots, .9, 1\}$ (α -cortes), siendo suficiente tomar 11 niveles. En la incertidumbre, la precisión de los resultados, que dependen de hipótesis subjetivas y no de medidas o datos formales, resulta menos importante. Si a pesar de ello se desea una mayor precisión, siempre es posible tomar 21 niveles, o 101 niveles por ejemplo.

LA HIPOTESIS DE RENTAS BORROSAS

Un supuesto más general consiste en admitir que las propias rentas son números borrosos. No resulta mucho más complicado.

Si la renta correspondiente al período n es incierta y dada por:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$10.19 \quad \mathcal{A}_\alpha^{(n)} = [A_1^{(n)} + (A_2^{(n)} - A_1^{(n)})\alpha, A_3^{(n)} - (A_3^{(n)} - A_2^{(n)})\alpha] \quad (1)$$

y el tipo de actualización interviene a través de:

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$10.20 \quad \left[\frac{1}{(1 + s - (s - m)\alpha)^n}, \frac{1}{(1 + r + (m - r)\alpha)^n} \right]$$

el valor actualizado incierto de $\mathcal{A}_\alpha^{(n)}$ es decir $\mathcal{A}'_\alpha^{(n)}$ será:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$10.21 \quad \mathcal{A}'_\alpha^{(n)} = \left[\frac{A_1^{(n)} + (A_2^{(n)} - A_1^{(n)})\alpha}{(1 + s - (s - m)\alpha)^n}, \frac{A_3^{(n)} - (A_3^{(n)} - A_2^{(n)})\alpha}{(1 + r + (m - r)\alpha)^n} \right]$$

Si se acepta la simplificación triangular se tiene:

(1) Hay que señalar que los índices inferiores de las $A_i^{(n)}$ no tienen aquí la misma significación que los de la fórmula (10.1).

$$10.22 \quad A'_{\alpha=0}^{(n)} = \left[\frac{A_1^{(n)}}{(1+s)^n}, \frac{A_3^{(n)}}{(1+r)^n} \right]$$

$$10.23 \quad A'_{\alpha=1}^{(n)} = \frac{A_2^{(n)}}{(1+m)^n}$$

y de ahí:

$$10.24 \quad \tilde{A}^{(n)} \simeq \left(\frac{A_1^{(n)}}{(1+s)^n}, \frac{A_2^{(n)}}{(1+m)^n}, \frac{A_3^{(n)}}{(1+r)^n} \right)$$

PLANTEAMIENTOS RELATIVOS AL PROCESO DE INVERSION

Uno de los problemas que pueden ser tratados a través del esquema que se ha descrito es el de la selección de inversiones en el ámbito de la incertidumbre. Su tratamiento se realiza normalmente a través de la obtención de un máximo o de un mínimo. En el capítulo 4, se ha mostrado como pueden clasificarse los números borrosos considerando su máximo (o bien su mínimo) o límite superior (o bien inferior) y, de ahí, estimar las distancias respectivas en relación al límite superior (o bien inferior) recordando que estas distancias d se hallan formadas por la suma de la distancia a la izquierda y de la distancia a la derecha.

De esta manera, si se consideran cuatro inversiones inciertas actualizadas $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4$, se calculará primero:

$$10.25 \quad \tilde{J}_M = \tilde{J}_1 \vee \tilde{J}_2 \vee \tilde{J}_3 \vee \tilde{J}_4$$

y de ahí $d(\tilde{J}_j, \tilde{J}_M), j = 1, 2, 3, 4$

La distancia d va a proporcionar un orden total (estricto o no) y permitirá tomar la decisión para un máximo. Si el orden no es estricto, se procederá a un segundo criterio o a un tercero (como se ha señalado en el capítulo 4).

Para la obtención de un mínimo se tomará la clasificación en sentido inverso. Como es sabido el hecho de tomar un extremo superior cierto J^{*M} en lugar de $\tilde{J}_M$ dará lugar a la misma clasificación; lo mismo sucederá para un extremo inferior J^{*m} cierto. Se elegirá el procedimiento de cálculo más cómodo.

Otro problema interesante relativo a las inversiones surge cuando se establece un umbral (cierto o incierto) para determinar si una inversión incierta actualizada será aceptada o no e incluso cuál será su nivel de aceptación introduciendo un "índice de aceptación".

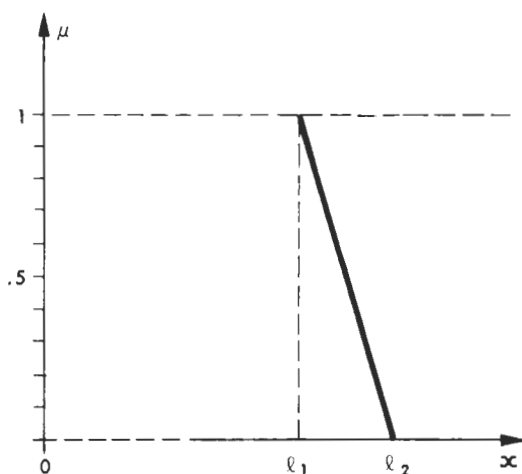


FIGURA 10.7

En la figura 10.7 se ha representado un "umbral borroso" para el cual se desea saber si puede ser aceptada una inversión actualizada (o no actualizada), que es:

$$\forall \mu \in [0, 1] \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
 10.26 \quad \mu(x) &= 1 & x \leq \ell_1 \\
 &= \frac{\ell_2 - x}{\ell_2 - \ell_1} & \ell_1 \leq x \leq \ell_2 \\
 &= 0 & \ell_2 \leq x
 \end{aligned}$$

Se puede considerar también un umbral borroso a sobrepasar en lugar de que no sea sobrepasado (a partir de un determinado índice a elegir);

la pendiente tendrá entonces sentido inverso. Evidentemente no es necesario considerar un umbral borroso rectilíneo, como el de la figura 10.7; se puede tomar cualquier otra curva con tal de que $\mu(x) = 1, x \leq \ell_1$; $\mu(x) = 0, x \geq \ell_2$ y $\mu(x)$ sea monótona decreciente entre ℓ_1 y ℓ_2 .

En la figura 10.8 se presenta un "índice de consentimiento"

$$10.27 \quad k(\mathcal{A}, \mathcal{L}) = \frac{\text{área } \zeta_1}{\text{área } \zeta}$$

Este índice puede variar de 1 a 0 según la manera en que $\mathcal{A}$ sobrepasa a $\mathcal{L}$.

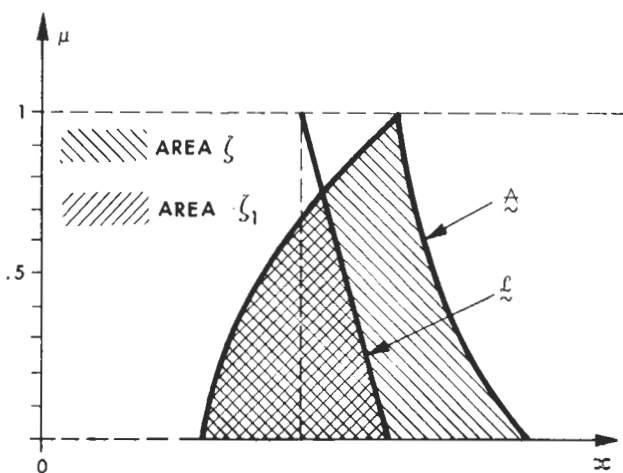


FIGURA 10.8

Se puede tomar también la "posibilidad":

$$10.28 \quad \text{pos}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \bigvee_x (\mu_{\mathcal{A}}(x) \wedge \mu_{\mathcal{L}}(x))$$

aunque el índice (10.27) parece más adecuado para este tipo de problemas.

El índice (10.27) así como también el obtenido en (10.28) puede ser

utilizado en el supuesto en que $x \in N$ y el paso de $[0, 1]$ sea 0.1; las fórmulas pueden ser adaptadas sin dificultad a este caso discreto.

Prácticamente, todos los problemas de inversiones para un futuro incierto pueden ser objeto de un estudio con números borrosos elegidos subjetivamente por uno o varios expertos.

La determinación de efectos olvidados (1)

MATRICES DE INCIDENCIA CUALITATIVA

Resulta interesante estudiar de manera cualitativa la incidencia de ciertos sectores sobre los demás, en relación con los aspectos económico, social, ecológico, etc. A partir de las matrices de incidencia cualitativas se pueden investigar diversos mecanismos de causa a efecto que aún no es posible descubrir a través de la intuición o la experiencia; es posible también intentar crear nuevos mecanismos entre diversos sectores para transformar ciertas situaciones. En la figura 11.1 presentamos una matriz de incidencia cualitativa elaborada por N. VALERY (2), jefe de redacción de *New Scientist*. Estas matrices intersectoriales juegan, para los aspectos cualitativos, el mismo papel que las matrices de LEONTIEFF para las incidencias cuantitativas cuando éstas son susceptibles de valoración. La matriz presentada por N. VALERY está formada por tres valores que pueden ser considerados como una valuación, más que como una medida: 1) gran incidencia, 2) incidencia más débil pero sensible, 3) incidencia despreciable; por nuestra parte les hemos asignado los valores 1, 0.5 y 0. Esta matriz no es, evidentemente simétrica pero sí reflexiva (su diagonal principal está formada por 1 ya que la influencia de un sector consigo mismo es igual a 1 por hipótesis).

(1) Este tema ha sido tratado en la obra de KAUFMANN, A.: *Modèles mathématiques pour la stimulation inventive*. Ed. Albin Michel. París 1979.

(2) Ver el artículo de N. VALERY en *Profils* n.º 8. Verano 1976. La presentación de la matriz de incidencia ha sido modificada con objeto de realizar la necesaria adaptación con los elementos utilizados en esta obra.

Hemos tomado la idea y el concepto presentado por VALERY para utilizarlo de manera distinta y muy especial. La matriz de incidencia intersectorial de VALERY puede ser considerada como una relación borrosa en $\{0, 0.5, 1\}$. Hemos encomendado a un grupo de expertos la reelaboración de esta relación borrosa para hacerla pasar de 3 niveles a 11 niveles en $\{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$. Dicho de otra manera, hemos intentado reconstruir esta matriz con una mayor sensibilidad y hemos llamado a la matriz o relación borrosa $\mathcal{R}$ obtenida (figura 11.2) "matriz de efectos de primera generación".

A partir de $\mathcal{R}$ vamos a intentar buscar los "efectos de segunda generación". La idea relativa a los efectos de segunda generación en los fenómenos socio-económicos y ecológicos se debe al gran economista y sociólogo Jean FOURASTIÉ. Considera que se trata de efectos que no han sido previstos y considerados cuando se han tomado decisiones, principalmente por altos niveles jerárquicos. Estos "efectos olvidados" se manifiestan más tarde, frecuentemente disimulados y a veces de manera drástica. Resulta conveniente detectarlos con anterioridad y tomar a priori las medidas necesarias para evitar adoptarlos después a un coste superior. Con este atractivo concepto de Fourastié, se ha buscado un método que permita descubrir (evidentemente de manera no exhaustiva) algunos efectos olvidados cuando se produce la toma de decisiones.

Para realizar una exposición a partir de un caso concreto, consideremos la matriz o relación borrosa $\mathcal{R}$ representada en la figura 11.2. Calculemos, ahora:

$$11.1 \quad \mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \quad \text{en donde } \circ \text{ es la composición maxmin}$$

El resultado se halla representado en la figura 11.3. Esta nueva matriz $\mathcal{R}^2$ posee las siguientes propiedades de fácil demostración:

$$11.2 \quad (\mathcal{R} \text{ reflexiva}) \Rightarrow (\mathcal{R}^2 \text{ reflexiva})$$

$$11.3 \quad (\mathcal{R} \text{ reflexiva}) \Rightarrow (\mathcal{R}^2 \supset \mathcal{R})$$

La matriz $\mathcal{R}^2$ representa, en cierto modo, la unión de los efectos de primera generación y los efectos de segunda generación. Para aislar los efectos de segunda generación de los efectos de la primera, se calcula una nueva matriz:

$$11.4 \quad (\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}) \iff (\forall x \in E: \mu_{\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}}(x) = \mu_{\mathcal{R}^2}(x) - \mu_{\mathcal{R}}(x))$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		Clima	Población	Agricultura	Sanidad	Sociedad	Educación	Ciencia y Tecnología	Industria	Energía	Equipamientos	Medio ambiente	Transportes	Comunicaciones	Economía y Finanzas	Defensa	Política
1	Clima	1	.5	1	.5	1	0	0	0	.5	0	.5	.5	.5	0	.5	0
2	Población	0	1	1	.5	1	1	0	.5	.5	.5	1	1	.5	.5	0	.5
3	Agricultura	.5	.5	1	.5	1	.5	.5	.5	1	1	1	.5	0	1	0	.5
4	Sanidad	0	1	.5	1	1	.5	1	.5	.5	0	.5	.5	.5	1	.5	.5
5	Sociedad	0	.5	.5	.5	1	1	1	1	.5	.5	.5	1	1	.5	1	1
6	Educación	0	1	.5	1	1	1	1	1	.5	.5	1	.5	1	1	1	1
7	Ciencia y Tecnología	.5	.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
8	Industria	.5	.5	.5	.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	Energía	.5	0	1	.5	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	.5	.5
10	Equipamientos	.5	0	1	0	.5	0	1	1	.5	1	1	.5	0	1	.5	0
11	Medio ambiente	.5	0	1	1	1	.5	.5	1	1	0	1	1	0	.5	.5	.5
12	Transportes	.5	1	1	0	1	.5	1	1	1	.5	1	1	1	1	.5	0
13	Comunicaciones	0	0	0	1	1	1	.5	.5	0	.5	0	1	1	.5	1	1
14	Economía y Finanzas	0	0	.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.5	1	1	1
15	Defensa	.5	1	.5	.5	1	.5	1	1	.5	.5	1	.5	1	1	1	1
16	Política	0	.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.5	1	1	1

Matriz de incidencia
de Nicholas Valery

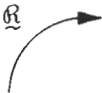
- 1 gran incidencia
.5 incidencia más débil pero sensible
0 incidencia despreciable

FIGURA 11.1

diferencia algebraica que no debe confundirse con la diferencia en conjuntos $\mathcal{R}^2 \cap \mathcal{R}$ que más adelante utilizaremos como variante.

En la matriz de la figura 11.4 los efectos de segunda generación se ponen de manifiesto por los valores cercanos a la unidad. En $\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}$ un

FIGURA 11.2

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		Clima	Población	Agricultura	Sanidad	Sociedad	Educación	Ciencia y Tecnología	Industria	Energía	Equipamientos	Medio ambiente	Transportes	Comunicaciones	Economía y Finanzas	Defensa	Política
1	Clima	1	.2	.9	.8	.3	.1	.5	.1	.5	.1	.8	.2	.4	.3	.6	0
2	Población	0	1	.3	.9	1	.8	.6	.5	.7	.3	.6	.8	.5	.2	1	.3
3	Agricultura	.1	.4	1	.8	.5	.1	.1	.3	.2	.4	1	.2	0	.6	.1	.4
4	Sanidad	0	.6	.1	1	.5	.4	.2	.1	.1	.3	.2	0	0	.3	.4	.2
5	Sociedad	0	.8	.3	.2	1	.8	.8	.9	1	.8	.9	.6	.6	.8	.6	.9
6	Educación	0	1	.3	.8	1	1	1	.8	.3	.2	.5	.2	.2	.2	.4	1
7	Ciencia y Tecnología	.2	.3	.4	.6	1	.5	1	1	1	1	.8	1	1	.6	1	.2
8	Industria	.3	.2	.2	.1	.8	0	.3	1	.2	1	.8	.4	.3	.5	.8	.2
9	Energía	.2	0	.1	0	.6	0	.2	1	1	.6	.9	1	0	.8	.4	.6
10	Equipamientos	0	.8	.7	.8	.6	.8	.4	1	1	1	.8	.8	.7	.5	.5	.3
11	Medio ambiente	.2	1	.3	1	1	.3	.3	.5	.2	0	1	.3	.1	.4	0	.4
12	Transportes	.1	.8	.2	.3	.1	0	0	.8	.6	.2	.2	1	.2	.1	.4	.2
13	Comunicaciones	0	.3	0	.1	.4	0	.2	.3	.2	.4	.3	.3	1	0	.3	0
14	Economía y Finanzas	0	.4	.2	.3	.6	.4	.5	.6	.8	.4	.3	.2	.3	1	.4	.8
15	Defensa	0	.8	.1	0	.6	.1	1	.6	.5	.5	0	.2	.1	.6	1	.8
16	Política	0	.7	.3	.4	1	.4	.2	.7	.5	.3	.5	.4	.3	1	1	1

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	$\mathcal{R}^2$	Clima	Población	Agricultura	Sanidad	Sociedad	Educación	Ciencia y Tecnología	Industria	Energía	Equipamientos	Medio ambiente	Transportes	Comunicaciones	Economía y Finanzas	Defensa	Política
1	Clima	1	.8	.9	.8	.8	.5	.6	.6	.5	.5	.9	.5	.5	.6	.6	.6
2	Población	.3	1	.4	.9	1	.8	1	.9	1	.8	.9	.8	.6	.8	1	.9
3	Agricultura	.3	1	1	1	1	.5	.5	.6	.6	.5	1	.5	.5	.6	.5	.6
4	Sanidad	.2	.8	.3	1	.6	.6	.6	.5	.6	.5	.6	.6	.5	.5	.6	.5
5	Sociedad	.3	.9	.7	.9	1	.8	.8	1	1	.9	.9	1	.8	.9	.9	.9
6	Educación	.3	1	.4	.9	1	1	1	1	1	1	.9	1	1	1	1	1
7	Ciencia y Tecnología	.3	.8	.7	.8	1	.8	1	1	1	1	.9	1	1	.8	1	.9
8	Industria	.3	.8	.7	.8	.8	.8	.8	1	1	1	.8	.8	.7	.8	.8	.8
9	Energía	.3	.9	.6	.9	.9	.6	.6	1	1	1	.9	1	.6	.8	.8	.8
10	Equipamientos	.3	.8	.7	.8	.8	.8	.8	1	1	1	.9	1	.7	.8	.8	.8
11	Medio ambiente	.3	1	.3	1	1	.8	.8	.9	1	.8	1	.8	.6	.8	1	.9
12	Transportes	.3	.8	.3	.8	.8	.8	.6	.8	.7	.8	.8	1	.5	.6	.8	.6
13	Comunicaciones	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	1	.4	.4	.4
14	Economía y Finanzas	.3	.7	.4	.5	.8	.6	.6	.8	.8	.6	.8	.8	.6	1	.8	.8
15	Defensa	.3	.8	.5	.8	1	.8	1	1	1	1	.8	1	1	.8	1	.8
16	Política	.3	.8	.3	.7	1	.8	1	.9	1	.8	.9	.7	.6	1	1	1

FIGURA 11.3

valor 0 significa que no existe efecto de segunda generación, al ser el valor en $\mathcal{R}^2$ igual que en $\mathcal{R}$.

Por el contrario, un valor elevado en el caso de $\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}$ indica la presencia de un efecto indirecto no descubierto a priori.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	$\tilde{R}^2 - \tilde{R}$	Clima	Población	Agricultura	Sanidad	Sociedad	Educación	Ciencia y Tecnología	Industria	Energía	Equipamientos	Medio ambiente	Transportes	Comunicaciones	Economía y Finanzas	Defensa	Política
1	Clima	0	.6	0	0	.5	.4	.1	.5	0	.4	.1	.3	.1	.3	0	.6
2	Población	.3	0	.1	0	0	0	.4	.4	.3	.5	.3	0	.8	.6	0	.6
3	Agricultura	.2	.6	0	.2	.5	.4	.4	.3	.4	.1	0	.3	.5	0	.4	.2
4	Sanidad	.2	.2	.2	0	.1	.2	.4	.4	.5	.2	.4	.6	.5	.2	.2	.3
5	Sociedad	.3	.1	.4	.7	0	0	0	.1	0	.1	0	.4	.2	.1	.3	0
6	Educación	.3	0	.1	.1	0	0	0	.2	.7	.8	.4	.8	.8	.8	.6	0
7	Ciencia y Tecnología	.1	.5	.3	.2	0	.3	0	0	0	0	.1	0	0	.2	0	.7
8	Industria	0	.6	.5	.7	0	.8	.5	0	.8	0	0	.4	.4	.3	0	.6
9	Energía	.1	.9	.5	.9	.3	.6	.4	0	0	.4	0	0	.6	0	.4	.2
10	Equipamientos	.3	0	0	0	.2	0	.4	0	0	0	.1	.2	0	.3	.3	.5
11	Medio ambiente	.1	0	0	0	0	.5	.5	.4	.8	.8	0	.5	.5	.4	1	.5
12	Transportes	.2	0	.1	.5	.7	.8	.6	0	.1	.6	.6	0	.3	.5	.4	.4
13	Comunicaciones	.3	.1	.4	.3	0	.4	.2	.1	.2	0	.1	.1	0	.4	.1	.4
14	Economía y Finanzas	.3	.3	.2	.2	.2	.2	.1	.2	0	.2	.5	.6	.3	0	.4	0
15	Defensa	.3	0	.4	.8	.4	.7	0	.4	.5	.5	.8	.8	.9	.2	0	0
16	Política	.3	.1	0	.3	0	.4	.8	.2	.5	.5	.4	.3	.3	0	0	0

FIGURA 11.4

EL CAMINO PARA LA RECUPERACION DE LOS EFECTOS SECUNDARIOS

Resulta interesante analizar el porqué este efecto de segunda generación no había aparecido inicialmente.

Siguiendo nuestro ejemplo, vamos a examinar primero la figura 11.4 y buscar en qué casillas se encuentran los números 1. Se les encuentra en (11.15): medio ambiente $\rightarrow$ defensa. Para ver de dónde viene este efecto de segunda generación, pongamos una debajo de otra la fila 11 y la columna 15 (transformada en fila) de la matriz $\mathcal{R}$ (figura 11.2)

11.5 fila (11):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.2	1	.3	1	1	.3	.3	.5	.2	0	1	.3	.1	.4	0	.4

11.6 columna (15)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.6	1	.1	.4	.6	.4	1	.8	.4	.5	0	.4	.3	.4	1	1

11.7 MIN (fila (11),
columna (15))

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.2	1	.1	.4	.6	.3	.3	.5	.2	0	0	.3	.1	.4	0	.4



Principalmente se observa que el efecto secundario proviene del efecto de (11) sobre (2) y de (2) sobre (15). El medio ambiente tiene un efecto importante sobre la población y la población tiene un efecto importante sobre la defensa. La figura 11.5 proporciona una representación mediante flechas de lo que se ha presentado en (11.5), (11.6) y (11.7).

En otros términos esto significa que un medio ambiente nocivo (es decir que se adapta mal a una población, es desfavorable para la defensa). Esta población no puede ser incentivada para defender un medio ambiente que soporta sin satisfacción. En definitiva, se defiende mejor aquello que se quiere.

Veamos el nivel 0.9 en $\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}$ de la figura 11.4, dado que ya se ha terminado con el nivel 1. Se encuentra en la casilla (9,2): energía - población, en la casilla (9,4): energía - sanidad y en la casilla (15,13): defensa - comunicaciones.

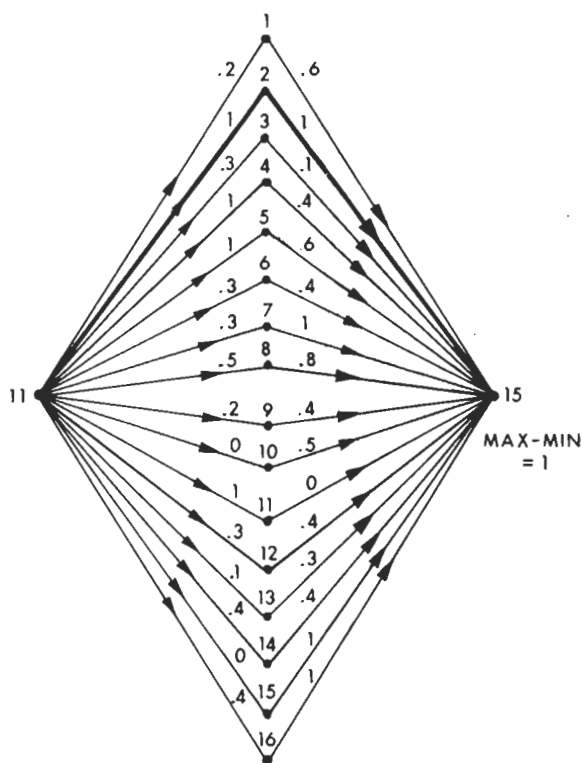


FIGURA 11.5

Examinemos, por ejemplo, la fila (9) y la columna (4) en $\mathcal{R}$ de la figura 11.2

11.8 fila (9):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.2	0	.1	0	.6	0	.2	1	1	.6	.9	1	0	.8	.4	.6

11.9 columna (4):

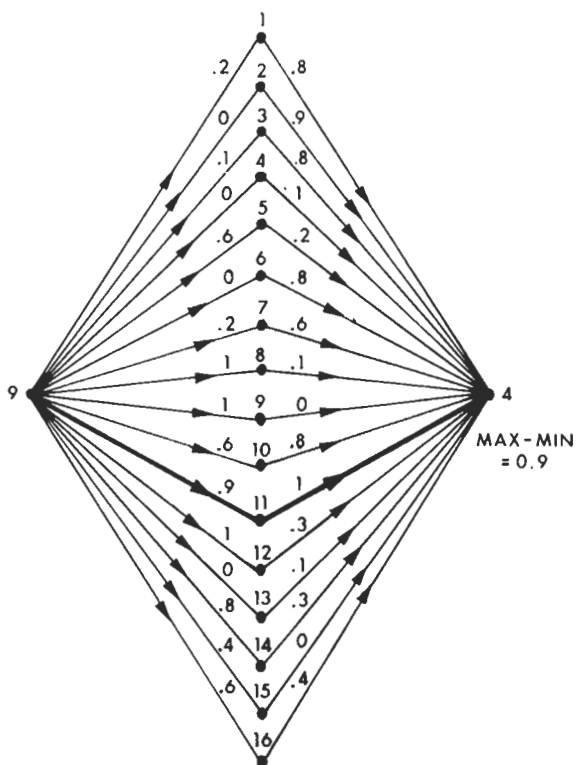
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.8	.9	.8	1	.2	.8	.6	.1	0	.8	1	.3	.1	.3	0	.4

11.10 MIN (fila (9) columna (4))

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.2	0	.1	0	.2	0	.2	.1	0	.6	.9	.3	0	.3	0	.4



FIGURA 11.6



Se observa que el efecto secundario proviene, principalmente, del efecto de (9) sobre (11) y de (11) sobre (4). La energía ejerce una importante influencia sobre el medio ambiente y el medio ambiente tiene una influencia importante sobre la salud como puede observarse en la figura 11.6. La secuencia (9) $\rightarrow$ (11) $\rightarrow$ (4) resulta muy interesante ya que permite realizar otras interpretaciones: utilizar la energía para modificar el medio ambiente y convertirlo en más saludable (desechar las zonas pantanosas, desalinizar el agua del mar, cambiar un miniclima nocivo, utilizar el agua caliente residual de las centrales nucleares para calentar las ciudades, etc.), transformar una polución en una mejora en las condiciones de vida por procedimientos químicos u otros, revisar las fuentes de calor utilizadas, etc.

Analicemos el caso (15,13) que en $\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}$ toma el valor 0.9

11.11 fila (15)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	.8	.1	0	.6	.1	1	.6	.5	.5	0	.2	1	.6	1	.8

11.12 columna (13)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.4	.5	0	0	.6	.2	1	.3	0	.7	.1	.2	1	.3	.1	.3

11.13 MIN (fila (15), columna (13))

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	.5	0	0	.6	.1	1	.3	0	.5	0	.2	1	.3	.1	.3



Cuya representación tiene lugar en la figura 11.7.

Se observa que el efecto secundario proviene del efecto de (15) sobre (7) y de (7) sobre (13). La defensa influye sobre la ciencia y la tecnología las cuales influyen también mucho sobre las comunicaciones. Resulta evidente que las investigaciones realizadas y los gastos efectuados por una nación para su defensa abren importantes puertas a los conocimientos

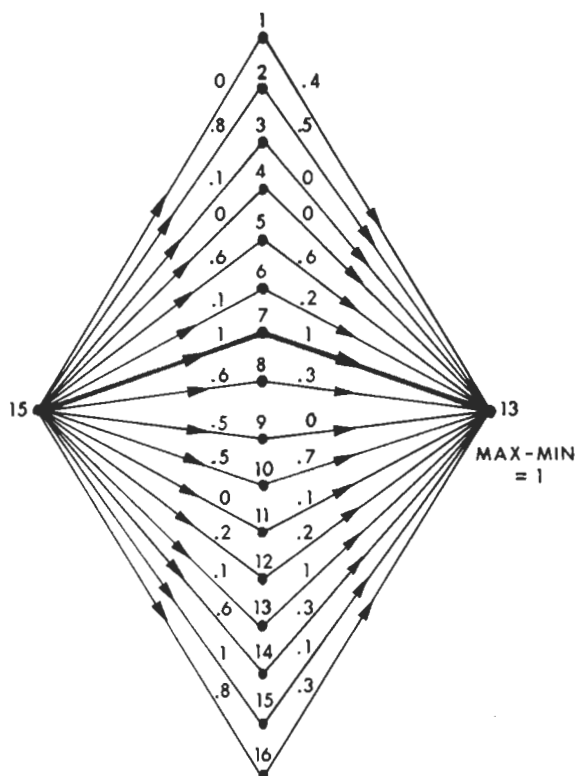


FIGURA 11.7

tecnológicos e incluso formales. Así se han mejorado y perfeccionado todas las formas de telecomunicación civil gracias a estos nuevos conocimientos. Por otra parte, las infraestructuras de comunicación (carreteras, vías férreas, aeropuertos, etc.) juegan un papel en tiempos de paz y son también infraestructuras potenciales en tiempos de guerra.

Estudiemos también la casilla (12,6) en la figura 11.4; una cualquiera entre otras muchas en la que aparece el valor 0.8. Esta casilla hace referencia a los transportes y la educación.

11.14 fila (12):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.1	.8	.2	.3	.1	0	0	.8	.6	.2	.2	1	.2	.1	.4	.2

11.15 columna (6):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.1	.8	.1	.4	.8	1	.5	0	0	.8	.3	0	0	.4	.1	.4

11.16 MIN (fila (12), columna (6))

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.1	.8	.1	.3	.1	0	0	0	0	.2	.2	0	0	.1	.1	.2

↑

La representación se ha realizado en la figura 11.8. El efecto proviene de (12) sobre (2) y de (2) sobre (6). Los transportes tienen una influencia sobre la población y la población sobre la educación. Se pueden deducir diversas conclusiones tales como: pueblos enclavados en lugares en los que existen dificultades para la educación, facilidades de transporte que permiten una gran diversificación de líneas educativas, se pueden también concebir medios educativos móviles (autobús - escuela, etc.).

Estudiemos finalmente otro par, la casilla (6,13) para la que se observa un 0.8 en $\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}$: educación y comunicaciones.

11.17 fila (6):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	.3	.8	1	1	1	.8	.3	.2	.5	.2	.2	.2	.4	1

11.18 columna (13):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
.4	.5	0	0	.6	.2	1	.3	0	.7	.1	.2	1	.3	.1	.3

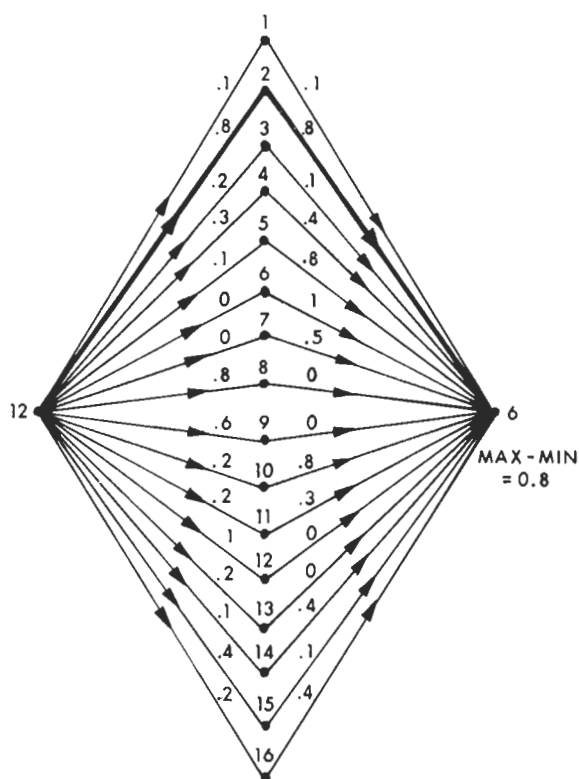


FIGURA 11.8

11.19 MIN (fila (6), columna (13))

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	.5	0	0	.6	.2	1	.3	0	.2	.1	.2	.2	.2	.1	.3

↑

La representación viene dada en la figura 11.9

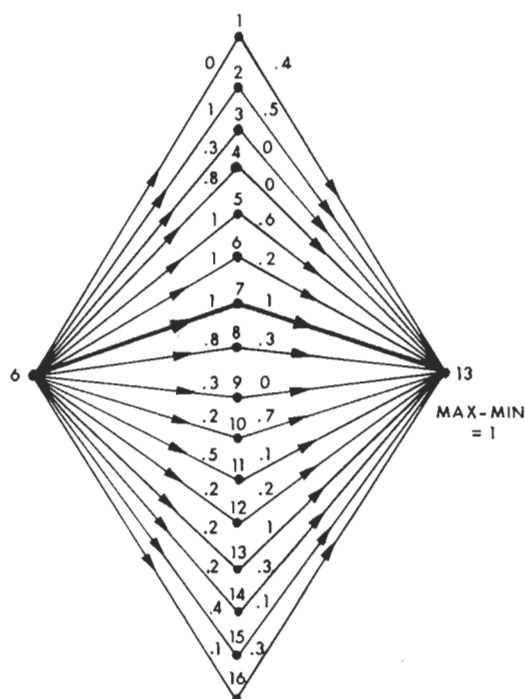


FIGURA 11.9

El efecto secundario a considerar es el de (6) sobre (7) y (7) sobre (13). La educación sobre la ciencia y la tecnología y de éstas sobre las comunicaciones. Aparecen multitud de ideas sobre tipos de escuelas relacionadas con las comunicaciones. Hay que señalar que uno de los efectos del importante desarrollo de los niveles educativos ha causado un efecto secundario a estudiar: el de la enseñanza a domicilio que podría reducir ciertos problemas de la educación (mujeres en el hogar, puesta al día de los técnicos, etc.) bloqueados por las dificultades del transporte o que comportan transportes suplementarios. La telemática educativa va a jugar un papel en la disminución de transportes y, por el contrario, va a contri-

buir al desarrollo de las redes de distribución de comunicaciones que no consumen energía.

Recordemos que la valuación de una matriz tal como la $\mathcal{R}$ es generalmente subjetiva y puede variar de uno a otro grupo de expertos. Con otro grupo que diera unas valuaciones diferentes, resulta evidente que se hallarían otros efectos secundarios o quizá los mismos. Con los medios empleados, se han obtenido unos resultados en la recuperación de efectos secundarios que, evidentemente, no pueden considerarse exhaustivos.

VARIANTES AL ESQUEMA PROPUESTO

Hemos utilizado para construir $\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}$ la “diferencia algébrica” ordinaria:

$$11.20 \quad \forall x, y \in E: \mu_{\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}^2}(x, y) - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)$$

pero se puede utilizar también la “diferencia de conjuntos”:

$$\begin{aligned} 11.21 \quad \forall x, y \in E: \mu_{\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}}(x, y) &= \mu_{\mathcal{R}^2 \cap \overline{\mathcal{R}}}(x, y) \\ &= \mu_{\mathcal{R}^2}(x, y) \wedge \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y) \end{aligned}$$

o también un tercer tipo de diferencia, la diferencia algébrica resultante, por inversión, de la “suma algébrica”:

$$11.22 \quad \underline{c} = \underline{a} \hat{+} \underline{b} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b} \quad , \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \in [0, 1]$$

entonces:

$$11.23 \quad \underline{a} = \frac{\underline{c} - \underline{b}}{1 - \underline{b}} \quad , \quad \underline{b} \leq \underline{c}$$

Aplicado a $\mathcal{R}^2$ y $\mathcal{R}$, este operador proporciona:

$$\forall x, y \in E:$$

$$11.24 \quad \mu_{\widetilde{\mathcal{R}}^2 - \widetilde{\mathcal{R}}}(x, y) = \frac{\mu_{\widetilde{\mathcal{R}}^2}(x, y)}{\mu_{\widetilde{\mathcal{R}}}(x, y)} - \frac{\mu_{\widetilde{\mathcal{R}}}(x, y)}{\mu_{\widetilde{\mathcal{R}}}(x, y)}$$

Se pueden utilizar (11.20) y (11.24) ya que se tiene siempre para una relación reflexiva $\widetilde{\mathcal{R}} \subset E \times E$, la propiedad $\widetilde{\mathcal{R}}^2 \supset \widetilde{\mathcal{R}}$.

Veamos en qué se convierte $\widetilde{\mathcal{R}}^2 - \widetilde{\mathcal{R}}$ con (11.21). Presentamos el resultado en la figura 11.10.

Como puede observarse comparando (11.20) y (11.21), (11.21) separa menos que (11.20); se pueden, sin embargo, utilizar de manera parecida para aquellos resultados que se alejan menos de 1. En lo que se refiere a (11.24), que resulta atractivo desde el punto de vista matemático, presenta en relación con lo que nos interesa aquí, un grave inconveniente. En efecto, consideremos la fórmula (11.23). Si $\underline{c} = 1$, sea cual sea el valor de $\underline{b}$ se tiene siempre $\underline{a} = 1$; de esta manera, este operador no separará para valores distintos de $\underline{b}$, que es lo que nos interesa obtener aquí. Se puede no obstante buscar, si resulta útil, operadores de diferencia obtenidos por inversión a partir de operadores analíticos borrosos, como los estudiados en el capítulo 8.

RELACIONES BORROSAS DE INCIDENCIA RECTANGULAR

Se parte de una relación borrosa $\mathcal{R}_{12}$ que proporciona los efectos estimados de incidencia de un conjunto de elementos E_1 sobre otro conjunto de elementos E_2 ; sea $\mathcal{R}_{23}$ otra relación borrosa que proporciona los efectos estimados de incidencia de E_2 sobre un tercer conjunto E_3 . Finalmente se establece una tercera relación borrosa de incidencia $\mathcal{R}_{13}$ de E_1 sobre E_3 (efectos directos de E_1 sobre E_3).

Dado que se han establecido las tres relaciones $\mathcal{R}_{12}$, $\mathcal{R}_{23}$ y $\mathcal{R}_{13}$, se calcula:

$$11.25 \quad \mathcal{R}_{13}^* = \mathcal{R}_{12} \circ \mathcal{R}_{23} \quad (\circ: \text{composición maxmin})$$

Después se calcula una nueva matriz:

$$11.26 \quad \mathcal{D}_{13} = \mathcal{R}_{13}^* - \mathcal{R}_{13}$$

En general, $\mathcal{D}_{13}$ no es una relación borrosa ya que puede contener valores negativos; para evitarlo se realiza una transformación, haciendo:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	$\tilde{R}^2 - \tilde{R}$ según (11.21)	Clima	Población	Agricultura	Sanidad	Sociedad	Educación	Ciencia y Tecnología	Industria	Energía	Equipamientos	Medio ambiente	Transportes	Comunicaciones	Economía y Finanzas	Defensa	Política
1	Clima	0	.8	.1	.2	.7	.5	.5	.6	.5	.5	.2	.5	.5	.6	.4	.6
2	Población	.3	0	.4	.1	0	.2	.4	.5	.3	.7	.4	.2	.5	.8	0	.7
3	Agricultura	.3	.6	0	.2	.5	.5	.5	.6	.6	.5	0	.5	.5	.4	.5	.6
4	Sanidad	.2	.4	.3	0	.5	.6	.6	.5	.6	.5	.6	.6	.5	.5	.6	.5
5	Sociedad	.3	.2	.7	.8	0	.2	.2	.1	0	.2	.1	.4	.4	.2	.4	.1
6	Educación	.3	0	.4	.2	0	0	0	.2	.7	.8	.5	.8	.8	.8	.6	.0
7	Ciencia y Tecnología	.3	.7	.6	.4	0	.5	0	0	0	0	.2	0	0	.4	0	.8
8	Industria	.3	.8	.7	.8	.2	.8	.7	0	.8	0	.2	.6	.7	.5	.2	.8
9	Energía	.3	.9	.6	.9	.4	.6	.6	0	0	.4	.1	0	.6	.2	.6	.4
10	Equipamientos	.3	.2	.3	.2	.4	.2	.6	0	0	0	.2	.2	.3	.5	.5	.7
11	Medio ambiente	.3	0	.3	0	0	.7	.7	.5	.8	.8	0	.7	.6	.6	1	.6
12	Transportes	.3	.2	.3	.7	.8	.8	.6	.2	.4	.8	.8	0	.5	.6	.6	.6
13	Comunicaciones	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	0	.4	.4	.4
14	Economía y Finanzas	.3	.6	.4	.5	.4	.6	.5	.4	.2	.6	.7	.8	.6	0	.6	.2
15	Defensa	.3	.2	.5	.8	.4	.8	0	.4	.5	.5	.8	.8	.9	.4	0	.2
16	Política	.3	.3	.3	.6	0	.6	.8	.3	.5	.7	.5	.6	.6	0	0	0

FIGURA 11.10

$$\forall (x, z) \in E_1 \times E_3 :$$

$$\begin{aligned}
 11.27 \quad \mu_{D_{13}}(x, z) &= 0, \quad \text{si} \quad \mu_{D_{13}}(x, z) < 0 \\
 &= \mu_{D_{13}}(x, z), \quad \text{si} \quad \mu_{D_{13}}(x, z) \geq 0
 \end{aligned}$$

En $\mathcal{D}_{13}$, se examinan las casillas partiendo de las que contienen los números más elevados. A cada número igual a 1 o próximo a 1 le corresponde un efecto olvidado de E_1 sobre E_3 cuando se ha valuado $\mathcal{R}_{13}$. Se analiza entonces para qué elementos de E_2 interviene este efecto olvidado.

Pueden ser elaboradas muchas variantes. En particular al considerar más de tres conjuntos E_i . Se puede también utilizar:

$$11.28 \quad \mathcal{D}_{13} = \mathcal{R}_{13}^* \cap \bar{\mathcal{R}}_{13}$$

en lugar de (11.26) y (11.27) con un poder separador sensiblemente más débil.

Se sugiere también, volviendo a $\mathcal{R}$ (figura 11.2), calcular:

$$11.29 \quad \mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^T$$

en donde $\mathcal{R}^T$ es la transpuesta de $\mathcal{R}$. Se obtiene entonces una relación $\mathcal{S}$ que es reflexiva y simétrica, es decir $\mathcal{S}$ es una relación borrosa de semejanza y resulta interesante descomponerla en subrelaciones máximas de similitud nivel por nivel. Si se hace lo mismo con $\mathcal{R}^2$ pueden aparecer comparaciones interesantes.

Existen otras muchas posibilidades. Los procedimientos utilizados pueden depender del tiempo disponible. Si de nuevo se considera $\mathcal{R}$ (figura 11.2) podemos subrayar el hecho de que esta relación borrosa de incidencia corresponde al momento t de su construcción y la designaremos por $\mathcal{R}_t$. A una fecha posterior $t + \tau$ se puede considerar que esta relación ha evolucionado para convertirse en $\mathcal{R}_{t+\tau} \neq \mathcal{R}_t$, se comparará entonces $\mathcal{R}_t \circ \mathcal{R}_{t+\tau}$ con $\mathcal{R}_t$. Esta vez $\mathcal{R}_t \circ \mathcal{R}_{t+\tau} - \mathcal{R}_t$ puede contener valores negativos que se reducirán a 0. Esta relación borrosa obtenida de esta manera puede ser útil para hacer que aparezcan efectos de segunda generación dinámicos. Resulta posible el estudio de estos fenómenos en varios momentos de tiempo de manera secuencial. Este estudio puede también ampliarse al supuesto de relaciones borrosas rectangulares.

Queremos insistir aquí en el hecho de que la investigación operativa constituye una ayuda científica a la decisión, en particular a la decisión económica y esta ayuda debe también incluir la investigación de los efectos de segunda generación evidentemente de manera no exhaustiva pero por lo menos de una manera mayor que lo que permite la simple intuición.

La previsión constituye la parte noble del cálculo económico y resulta necesario elegir en función de estas previsiones. Pero los efectos secundarios son siempre numerosos y resulta muy conveniente conocerlos cada vez más y mejor.

Alisado exponencial con datos inciertos

LA LEY GEOMETRICA

Recordemos en primer lugar algunas propiedades de la ley de probabilidad llamada “ley geométrica” o “ley de Pascal”. Esta ley viene definida por:

$$12.1 \quad \text{pr}(u) = \gamma (1 - \gamma)^u, \quad 0 < \gamma < 1, \quad u \in \mathbb{N}$$

La figura 12.1 proporciona un ejemplo de esta ley para $\gamma = 0.3$

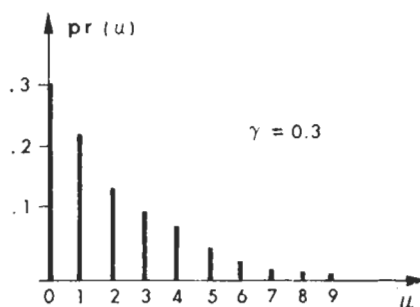


FIGURA 12.1

Recordemos que esta ley es tal que:

$$12.2 \quad \bar{u} = E(U) = \frac{1 - \gamma}{\gamma}$$

$$12.3 \quad \sigma_U^2 = \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma^2}$$

en donde U es la variable aleatoria que toma sus valores u en N .

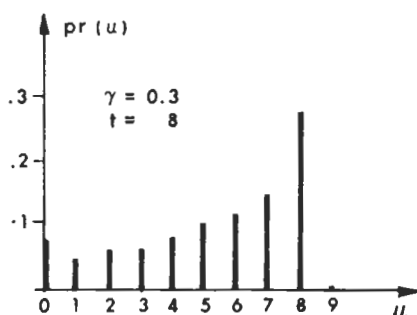


FIGURA 12.2

Definamos ahora una ley derivada de la anterior llamada “ley geométrica modificada y amputada a la izquierda para $u = 0$ ”:

$$\begin{aligned}
 12.4 \quad pr(u) &= (1 - \gamma)^t, & u = 0 \\
 &= \gamma (1 - \gamma)^{t-u}, & 0 \leq u \leq t \\
 &= 0, & u > t, \quad u, t \in N
 \end{aligned}$$

La figura 12.2 proporciona un ejemplo de esta ley para $\gamma = 0.3$ y $t = 8$.

ALISADO EXPONENCIAL Y SOBREALISADO

El método de alisado exponencial debe su nombre a la ley (12.4). Consiste en afectar a los valores numéricos de una serie cronológica unos

coeficientes o pesos que correspondan a esta ley. La estimación para el momento t , es decir $y(t)$ viene dada por la fórmula:

$$\begin{aligned}
 12.5 \quad y(t) &= (1 - \gamma)^t \cdot x(0) + \gamma(1 - \gamma)^{t-1} \cdot x(1) + \gamma(1 - \gamma)^{t-2} \cdot x(2) \\
 &\quad + \dots\dots\dots \\
 &\quad + \gamma(1 - \gamma) \cdot x(t-1) + \gamma \cdot x(t) \\
 &= (1 - \gamma)^t \cdot x(0) + \sum_{u=1}^t \gamma(1 - \gamma)^{t-u} \cdot x(u) \\
 y(t+1) &= (1 - \gamma)^{t+1} \cdot x(0) + \sum_{u=0}^t \gamma(1 - \gamma)^{t-u} \cdot x(u+1)
 \end{aligned}$$

Calculando $(1 - \gamma) \cdot y(t-1)$ a partir de (12.5), se obtiene fácilmente:

$$0 \leq u \leq t-1:$$

$$\begin{aligned}
 12.6 \quad y(u+1) &= \gamma x(u+1) + (1 - \gamma) \cdot y(u) \\
 y(0) &= x(0)
 \end{aligned}$$

Lo que permite calcular de una manera cómoda las estimaciones por recurrencia.

La fórmula (12.5) pone de manifiesto que el procedimiento consiste, en cierto modo, en una actualización del pasado, debilitando geométricamente los valores de la serie cronológica de t a 0 con una acumulación del resto de los pesos para $t = 0$.

La estimación $y(t+1)$ ha sido obtenida a partir de $x(t+1)$ y de $y(t)$ según (12.6), por lo que conviene aceptar como valor futuro de la serie en el momento $t+1$ una extrapolación $\xi(t+1)$ que será obtenida a partir de $y(t)$ según las hipótesis que evidentemente es necesario justificar, lo que vamos a realizar posteriormente. Así, si se admite que $x(t)$ tiene la forma:

$$12.7 \quad x(t) = \bar{x} + \xi(t)$$

en donde $\xi(t)$ representa pequeñas desviaciones en relación a $\bar{x}$, se tomará como extrapolación:

$$12.8 \quad \xi(t+1) = y(t)$$

Si se admite que $x(t)$ adopta la forma:

$$12.9 \quad x(t) = a + bt + \xi(t)$$

en donde a y b son coeficientes que deben ser ajustados para cada momento t según un método que explicamos más adelante, se tomará como extrapolación:

$$12.10 \quad \xi(t+1) = y(t) + k, \quad k = a - b \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)$$

12.11

A veces resulta cómodo considerar, para representar el valor extrapolado al momento t , es decir $\xi(t)$, la utilización de una función $\overline{x}(t)$

$$12.12 \quad \overline{x}(t) = \xi(t) = y(t-1)$$

que será la “previsión para el momento t ”.

Se utiliza también lo que se llama “sobrealisado” repitiendo el alisado exponencial sobre la serie ya alisada. Si:

$$12.13 \quad y_1(t) = (1-\gamma)^t \cdot x(0) + \sum_{u=1}^t \gamma (1-\gamma)^{t-u} \cdot x(u)$$

Se escribirá:

$$12.14 \quad y_2(t) = (1-\gamma)^t \cdot y_1(0) + \sum_{u=1}^t \gamma (1-\gamma)^{t-u} \cdot y_1(u)$$

e incluso, teniendo en cuenta que $y_1(0) = x(0)$:

$$12.15 \quad y_2(t) = (1+\gamma t)(1-\gamma)^t \cdot x(0) + \sum_{u=1}^t (t-u+1)\gamma^2 (1-\gamma)^{t-u} \cdot x(u)$$

Es posible también imaginar un tercer sobrealisado o realizarlo más veces si resulta conveniente.

Veamos un ejemplo numérico sencillo en el que se utiliza (12.6) con $\gamma = 0.8$

$$x(0) = 7, \quad y(0) = 7$$

$$x(1) = 6, \quad y(1) = 0.8 \times 6 + 0.2 \times 7 = 6.2$$

$$x(2) = 4, \quad y(2) = 0.8 \times 4 + 0.2 \times 6.2 = 4.44$$

$$12.16 \quad x(3) = 7, \quad y(3) = 0.8 \times 7 + 0.2 \times 4.44 = 6.488$$

$$x(4) = 9, \quad y(4) = 0.8 \times 9 + 0.2 \times 6.488 = 8.4976$$

$$x(5) = 13, \quad y(5) = 0.8 \times 13 + 0.2 \times 8.4976 = 12.09952$$

$$x(6) = 8, \quad y(6) = 0.8 \times 8 + 0.2 \times 12.09952 = 8.819904$$

$$x(7) = 12, \quad y(7) = 0.8 \times 12 + 0.2 \times 8.819904 = 11.3639808$$

INCORPORACION DE INTERVALOS DE CONFIANZA

Supongamos, ahora, que las $x(u)$ en lugar de ser datos ciertos son conocidos bajo la forma de intervalos de confianza, lo que se presenta en distintas situaciones (informaciones muy diversas, a veces subjetivas, transmitidas por circuitos humanos deformadores, etc...). Supongamos que:

$$12.17 \quad X(u) = [x_1(u), x_2(u)]$$

Dado que se habrá mantenido el orden de los extremos inferiores y de los extremos superiores, se puede escribir:

$$12.18 \quad Y(t) = (1 - \gamma)^t \cdot X(0) + \sum_{u=1}^t \gamma (1 - \gamma)^{t-u} \cdot X(u)$$

$$12.19 \quad Y(u+1) = \gamma \cdot X(u+1) + (1 - \gamma) Y(u)$$

en donde:

$$12.20 \quad Y(u) = [y_1(u), y_2(u)]$$

Se pueden calcular separadamente las $y_1(u)$ y las $y_2(u)$ e inmediatamente después ensamblar los resultados.

Veamos un ejemplo, siempre con $\gamma = 0.8$

$$X(0) = [x_1(0), x_2(0)] = [6, 9]$$

$$X(1) = [x_1(1), x_2(1)] = [5, 8]$$

$$12.21 \quad X(2) = [x_1(2), x_2(2)] = [3, 4]$$

$$X(3) = [x_1(3), x_2(3)] = [9, 9]$$

$$X(4) = [x_1(4), x_2(4)] = [6, 8]$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & x_1(0) = 6 \quad , \quad y_1(0) = 6 \\
 & x_1(1) = 5 \quad , \quad y_1(1) = 0.8 \times 5 + 0.2 \times 6 = 5.2 \\
 12.22 \quad & x_1(2) = 3 \quad , \quad y_1(2) = 0.8 \times 3 + 0.2 \times 5.2 = 3.44 \\
 & x_1(3) = 9 \quad , \quad y_1(3) = 0.8 \times 9 + 0.2 \times 3.44 = 7.888 \\
 & x_1(4) = 6 \quad , \quad y_1(4) = 0.8 \times 6 + 0.2 \times 7.888 = 6.3776
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_2(0) = 9 \quad , \quad y_2(0) = 9 \\
 & x_2(1) = 8 \quad , \quad y_2(1) = 0.8 \times 8 + 0.2 \times 9 = 8.2 \\
 12.23 \quad & x_2(2) = 4 \quad , \quad y_2(2) = 0.8 \times 4 + 0.2 \times 8.2 = 4.84 \\
 & x_2(3) = 9 \quad , \quad y_2(3) = 0.8 \times 9 + 0.2 \times 4.84 = 8.168 \\
 & x_2(4) = 8 \quad , \quad y_2(4) = 0.8 \times 8 + 0.2 \times 8.168 = 8.0336
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 & Y(0) = [6, 9] \quad , \quad Y(1) = [5.2, 8.2] \\
 12.24 \quad & Y(2) = [3.44, 4.84] \quad , \quad Y(3) = [7.888, 8.168] \\
 & Y(4) = [6.3776, 8.0336]
 \end{aligned}$$

ALISADO EXPONENCIAL CON NUMEROS BORROSOS

Se puede pasar, ahora, a los números borrosos escribiendo para cada nivel $\alpha \in [0, 1]$

$$12.25 \quad Y_{\alpha}(t) = (1 - \gamma)^t \cdot Y_{\alpha}(0) (+) \sum_{u=1}^t \gamma (1 - \gamma)^{t-u} \cdot X_{\alpha}(u)$$

y también:

$$12.26 \quad Y_{\alpha}(u+1) = \gamma \cdot X_{\alpha}(u+1) (+) (1 - \gamma) \cdot Y_{\alpha}(u)$$

y por lo tanto, los números borrosos serán:

$$12.27 \quad \underline{Y}(t) = (1 - \gamma)^t \cdot \underline{Y}(0) (+) \sum_{u=1}^t \gamma (1 - \gamma)^{t-u} \cdot \underline{X}(u)$$

y:

$$12.28 \quad \underline{Y}(u+1) = \gamma \cdot \underline{X}(u+1) (+) (1 - \gamma) \cdot \underline{Y}(u)$$

teniendo en cuenta que:

$$12.29 \quad k \cdot \underline{A} = k [a_1, a_2] = [k \cdot a_1, k \cdot a_2] \quad , \quad k \geq 0$$

Antes de pasar a desarrollar un ejemplo, conviene también recordar que, si $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_n$ son números borrosos triangulares, entonces:

$$12.30 \quad \underline{A} = k_1 \cdot \underline{A}_1 (+) k_2 \cdot \underline{A}_2 (+) \dots + k_m \cdot \underline{A}_m$$

$$k_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

en donde:

$$12.31 \quad \sum_{i=1}^m k_i = 1$$

es también un N.B.T. (hay que añadir que para ello la condición (12.31) no resulta indispensable).

Vamos a utilizar de nuevo N.B.T. por su simplicidad. Se consideran los siguientes datos cronológicos inciertos:

$$12.32 \quad \underline{X}(0) = (3, 7, 9), \underline{X}(1) = (4, 5, 5), \underline{X}(2) = (11, 12, 14) \\ \underline{X}(3) = (6, 8, 8), \underline{X}(4) = (7, 7, 7), \underline{X}(5) = (5, 6, 9)$$

Se calcula, haciendo:

$$12.33 \quad \underline{X}(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$$

y tomando

$$12.34 \quad \gamma = 0.7$$

$$x_1(0) = 3 \quad , \quad y_1(0) = 3$$

$$\begin{aligned}
& X_1(1) = 4 \quad , \quad y_1(1) = 0.7 \times 4 + 0.3 \times 3 = 3.7 \\
12.35 \quad & X_1(2) = 11 \quad , \quad y_1(2) = 0.7 \times 11 + 0.3 \times 3.7 = 8.81 \\
& x_1(3) = 6 \quad , \quad y_1(3) = 0.7 \times 6 + 0.3 \times 8.81 = 6.843 \\
& x_1(4) = 7 \quad , \quad y_1(4) = 0.7 \times 7 + 0.3 \times 6.843 = 6.9529 \\
& x_1(5) = 5 \quad , \quad y_1(5) = 0.7 \times 5 + 0.3 \times 6.9529 = 5.58587 \\
& x_2(0) = 7 \quad , \quad y_2(0) = 7 \\
& x_2(1) = 5 \quad , \quad y_2(1) = 0.7 \times 5 + 0.3 \times 7 = 5.6 \\
& x_2(2) = 12 \quad , \quad y_2(2) = 0.7 \times 12 + 0.3 \times 5.6 = 10.08 \\
12.36 \quad & x_2(3) = 8 \quad , \quad y_2(3) = 0.7 \times 8 + 0.3 \times 10.08 = 8.624 \\
& x_2(4) = 7 \quad , \quad y_2(4) = 0.7 \times 7 + 0.3 \times 8.624 = 7.4872 \\
& x_2(5) = 6 \quad , \quad y_2(5) = 0.7 \times 6 + 0.3 \times 7.4872 = 6.44616 \\
& x_3(0) = 9 \quad , \quad y_3(0) = 9 \\
& x_3(1) = 5 \quad , \quad y_3(1) = 0.7 \times 5 + 0.3 \times 9 = 6.2 \\
& x_3(2) = 14 \quad , \quad y_3(2) = 0.7 \times 14 + 0.3 \times 6.2 = 11.66 \\
12.37 \quad & x_3(3) = 8 \quad , \quad y_3(3) = 0.7 \times 8 + 0.3 \times 11.66 = 9.098 \\
& x_3(4) = 7 \quad , \quad y_3(4) = 0.7 \times 7 + 0.3 \times 9.098 = 7.6294 \\
& X_3(5) = 9 \quad , \quad y_3(5) = 0.7 \times 9 + 0.3 \times 7.6294 = 8.58882
\end{aligned}$$

Se obtienen así los N.B.T.:

$$\begin{aligned}
& \underline{Y}(0) = (3, 7, 9) \quad , \quad \underline{Y}(1) = (3.7, 5.6, 6.2) \\
12.38 \quad & \underline{Y}(2) = (8.81, 10.08, 11.66) \quad , \quad \underline{Y}(3) = (6.843, 8.624, 9.098) \\
& \underline{Y}(4) = (6.9529, 7.4872, 7.6294), \quad \underline{Y}(5) = (5.58587, 6.44616, 8.58882)
\end{aligned}$$

La figura 12.3 representa los datos no alisados (12.32) y la figura 12.4

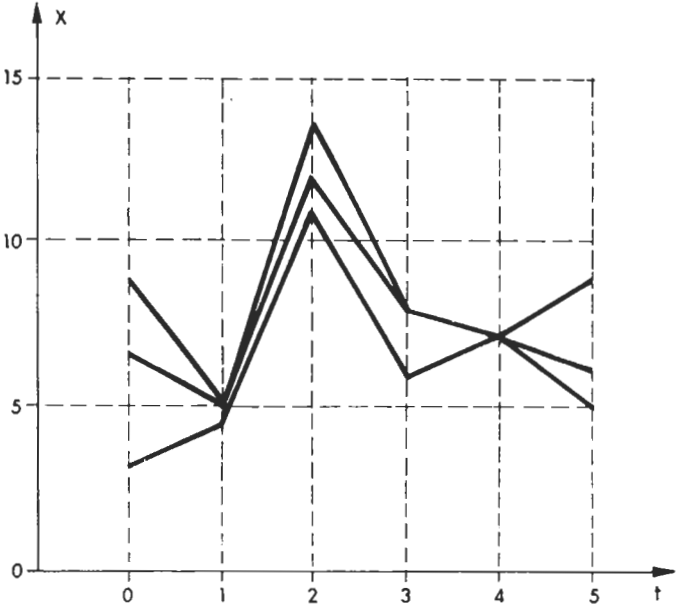
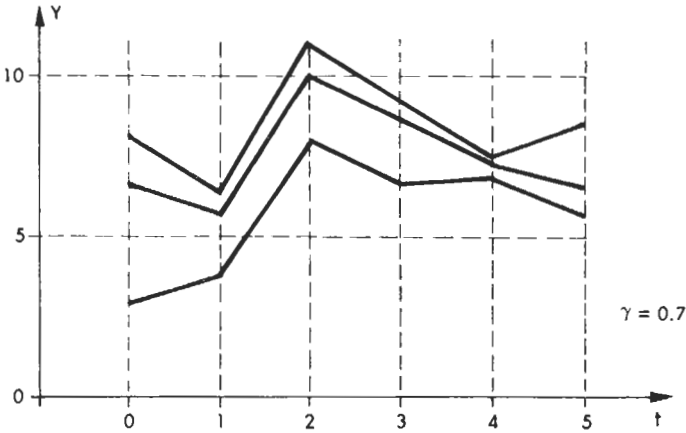


FIGURA 12.3

FIGURA 12.4



los datos alisados. Parece que la evolución se percibe mejor en la figura 12.4. Por otra parte, hay que recordar que la curva central no representa los valores medios sino los valores del máximo de presunción ($\mu = 1$) de los N.B.T.

En la figura 12.5 se ha representado un sobrealisado de $\underline{Y}$ que hemos llamado $\underline{Y}'$. Se pueden obtener interesantes conclusiones.

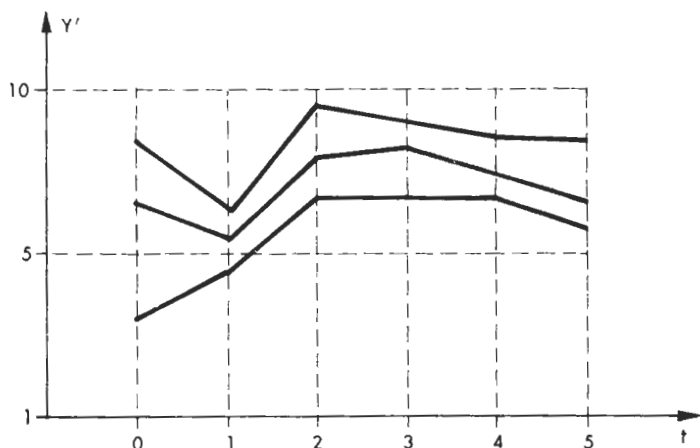


FIGURA 12.5

En este capítulo, no se han abordado las cuestiones fundamentales relativas a la teoría del alisado, como son la utilización del método de los mínimos cuadrados, el paso de la valoración en t a la previsión en $t + 1$, elección del coeficiente γ , métodos adaptativos, etc. El único objetivo ha consistido en poner de manifiesto que no se plantean problemas complicados para pasar a datos inciertos bajo forma de números borrosos. En realidad, es necesario rehacer toda la teoría del alisado exponencial tomando números borrosos $\underline{X}_i(t)$ en lugar de datos ciertos.

Señalemos además que se pueden considerar también coeficientes γ borrosos. Se ha podido observar en epígrafes anteriores que el producto de N.B.T. no proporciona más que una aproximación a un N.B.T.; si resultara necesario, se pasaría por cálculos nivel a nivel.

En muchos problemas de alisado y de previsión, nos enfrentamos con umbrales que no es posible sobrepasar. Con la utilización del índice de consentimiento, como se ha hecho anteriormente, se pueden estimar los riesgos que se corren al traspasar el umbral, lo que resulta en muchas ocasiones importante y permite, a veces, elegir una política de gestión distinta.

El método «branch and bound» con datos inciertos

CONSTRUCCION DE UNA ARBORESCENCIA

No puede resultar extraño que en esta obra se incluyan temas muy diversos que no siempre tienen una conexión entre sí, ya que nuestro objetivo es poner de manifiesto que los métodos de tratamiento de la incertidumbre pueden ser aplicados, cuando resulta útil o necesario, a todos los problemas, a todos los procesos de tratamiento de datos ciertos. El método "branch and bound", conocido por todos los que han utilizado los modelos de investigación operativa, puede servir también para el estudio de los problemas combinatorios, como podrá comprobarse. Pero antes de presentar el supuesto de datos borrosos, recordemos los principios de este método cuando se suponen datos ciertos. Será presentado un ejemplo, el llamado "problema del viajante de comercio" o búsqueda de un camino hamiltoniano en un grafo.

Sea:

$$13.1 \quad E = \{s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_n\}$$

el conjunto finito de soluciones de un problema. El método y los razonamientos continuarán siendo válidos para conjuntos numerables no finitos e incluso para conjuntos no numerables de soluciones.

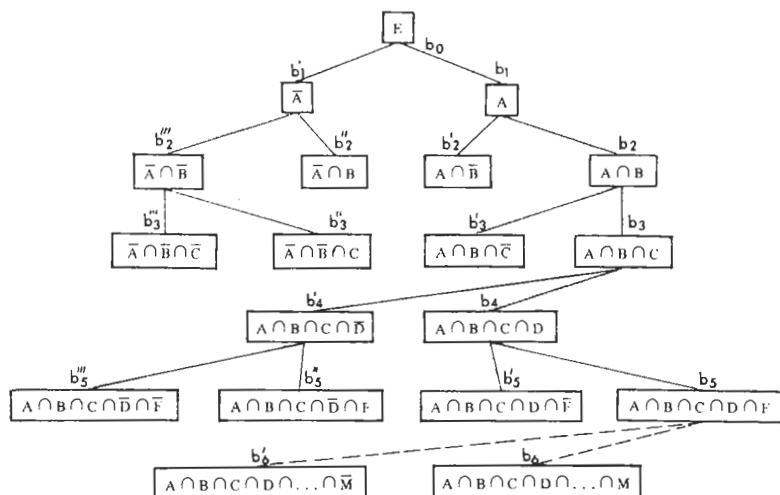
Supongamos una función $f(s_i)$ ligada a cada solución $s_i \in E$, e intentemos determinar el subconjunto $E_m \subset E$ de las soluciones que corresponden al mínimo de $f(s_i)$ (se supone que este mínimo existe). Aunque en primer lugar tratemos de buscar un mínimo, el método empleado puede

servir para la obtención de un subconjunto $E_M \subset E$ de soluciones máximas.

Consideremos, ahora, una propiedad P_A que permita realizar una bipartición de E en dos subconjuntos complementarios entre sí A y $\bar{A}$: $A, \bar{A} \subset E$. Supongamos que es posible encontrar una cota inferior b_0 al valor de las soluciones elementos de E , así como una cota inferior $b_1 \geq b_0$ al valor de las soluciones elementos de A y finalmente una cota inferior $b'_1 \geq b_0$ al de las soluciones elementos de $\bar{A}$.

Consideremos ahora otra propiedad separadora P_B , en donde la propiedad $P_A \Delta P_B$ (el símbolo Δ corresponde a "y") se halla asociada a $A \cap B$, de la misma manera que $P_A \Delta P_{\bar{B}}$ a $A \cap \bar{B}$, $P_{\bar{A}} \Delta P_B$ a $\bar{A} \cap B$, y $P_{\bar{A}} \Delta P_{\bar{B}}$ a $\bar{A} \cap \bar{B}$. Continuemos de esta manera introduciendo en cada etapa una nueva propiedad separadora distinta de las anteriores: $P_C, P_D, \dots$ etc. Se construye así una arborescencia. Supongamos que, en lugar de construir una arborescencia completa lo que llevará en la r -ésima etapa a 2^r vértices que cuelgan de la arborescencia, sólo describimos en cada etapa a dos de ellos y establecemos como regla que sólo se va a progresar en las biparticiones sucesivas cuando todas las cotas inferiores valora-

FIGURA 13.1



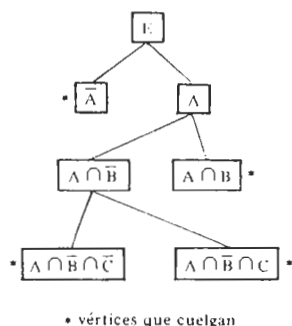


FIGURA 13.2

das de los vértices que cuelgan cuando nos hallamos en la etapa t , tengan un valor superior o igual a la cota inferior del vértice que cuelga considerado, a partir del cual se puede realizar una nueva bipartición. Se puede afirmar entonces que el conjunto E de soluciones se halla acotado inferiormente por este valor ya que la unión de todos los subconjuntos situados en los vértices que cuelgan proporciona el referencial E . Se trata de una propiedad general de todo procedimiento dicotómico e incluso de toda arborescencia realizada a través de subconjuntos disjuntos sin omisión ni repetición. La figura 13.1 pone de manifiesto de manera gráfica las explicaciones anteriores.

La figura 13.2 proporciona un ejemplo en el que se examina fácilmente cómo la unión de los vértices que cuelgan da lugar al referencial E .

Los vértices que cuelgan son:

$$13.2 \quad \bar{A}, A \cap B, A \cap \bar{B} \cap C, A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Se tiene que:

$$13.3 \quad (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B}$$

$$13.4 \quad (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

$$13.5 \quad A \cup \bar{A} = E$$

A partir de lo que acabamos de señalar, supongamos que se detiene la dicotomía cuando el subconjunto acotado, respetando la regla asignada, sólo contiene un elemento, entonces la cota de este elemento no puede ser otra que su valor y este valor corresponde a una solución mínima de E para la función $f(s_i)$.

Evidentemente, razonando de manera similar, se puede buscar una solución máxima en el supuesto de que exista. En este caso se programa considerando las cotas superiores que se intentará disminuir en cada etapa.

Prácticamente el problema más delicado viene dado por la elección de las propiedades que determinan la separación y por el procedimiento que permita acotar etapa por etapa los subconjuntos separados. Hay que señalar también que es posible, además, realizar no sólo biparticiones sino también triparticiones, ..., n -particiones adoptando los razonamientos expuestos anteriormente.

OBTENCION DE UN CIRCUITO HAMILTONIANO MINIMO

Para hacer más asequible el método "branch and bound", veamos el supuesto de su utilización con objeto de obtener un circuito hamiltoniano mínimo en un grafo (problema del viajante de comercio).

Se considera un grafo completo. A cada arco (X_i, X_j) le es asignado un valor $v_{ij} \geq 0$ (aquí, inicialmente, las v_{ij} son números no negativos ordinarios). Se colocan valores ∞ en la diagonal principal de la matriz de los valores v_{ij} y en aquellas casillas de esta matriz en las que un par no es un arco. Posteriormente veremos cómo se puede ampliar este esquema al supuesto de números borrosos. He aquí el algoritmo utilizado.

- A) Restar a cada fila y/o columna de la matriz de las v_{ij} el elemento más pequeño de la fila (o de la columna) hasta su agotamiento. Con ello se consigue una nueva matriz en la que los elementos, designados por v'_{ij} , contienen por lo menos un 0 por fila y por lo menos un 0 por columna.
- B) Calcular la suma de todos los elementos restados de las filas y/o de las columnas de la matriz en la que los elementos son las v_{ij} . Esto proporciona una cota inferior de la raíz de la arborescencia, raíz que corresponde al conjunto E de todas las soluciones.
- C) Elegir (X_i, X_j) para realizar la bipartición, ramificando de tal manera que:

$$13.6 \quad \theta(X_i, X_j) = \max_{i,j} \gamma(X_i, X_j)$$

en donde $\gamma(X_i, X_j)$ es la suma del elemento más pequeño de la fila X_i , sin tener en cuenta $v(X_i, X_j)$, y del elemento más pequeño de la columna X_j , sin considerar $v(X_i, X_j)$, calculando esta $\gamma(X_i, X_j)$ para todas las $v(X_i, X_j) = 0$.

- D) Colocar un vértice y un arco en la arborescencia que correspondan a la propiedad $\bar{P}_{k\ell}$: los circuitos no pasan por (X_k, X_ℓ) . Asignar a este vértice una cota igual a la cota del vértice anterior más el valor $\theta(X_k, X_\ell)$.
- E) Colocar un vértice y un arco de la arborescencia correspondientes a la propiedad $P_{k\ell}$: los circuitos pasan por (X_k, X_ℓ) . Suprimir en la matriz la fila X_k y la columna X_ℓ . Poner un valor ∞ en todas las casillas que correspondan a un arco que realice un circuito cuya longitud no sea inferior a n (en donde n es un cardinal de E) o bien que impida la formación de un circuito hamiltoniano (circuito que debe pasar una y una sola vez por cada uno de los vértices del grafo). Al colocar este valor ∞ (o un número muy grande en relación con los demás) se impedirá que una solución como ésta no cumpla la hipótesis: todo circuito debe ser hamiltoniano.
- F) Restar a cada fila y/o a cada columna de la matriz obtenida en E) el elemento más pequeño de la fila (o de la columna) hasta su agotamiento. Se obtiene con ello una matriz que contiene por lo menos un 0 por línea y un 0 por columna.
- G) Calcular la suma de todos los elementos restados a las filas y/o a las columnas de la matriz. Añadir esta cantidad a la cota obtenida en el vértice anterior de la arborescencia; se obtiene así la cota relativa al vértice de la arborescencia en la que se ha introducido la propiedad $P_{k\ell}$.
- H) Si la matriz obtenida es de orden 1×1 los cálculos han terminado y se ha obtenido un circuito hamiltoniano mínimo. En caso contrario debe continuarse en I).
- I) Examinar el valor de las cotas obtenidas *para todos los vértices que cuelgan* y seleccionar la más pequeña (si existe una arbitrariamente).
- J) La cota elegida en I) corresponde a un vértice para el cual la propiedad de bipartición es una propiedad P_{ij} o una propiedad $\bar{P}_{ij}$ (P_{ij} : el circuito hamiltoniano pasa por (X_i, X_j) y $\bar{P}_{ij}$: el circuito hamiltoniano no pasa por (X_i, X_j)).
Si el vértice de la arborescencia posee una propiedad P_{ij} , se pasa de

nuevo a C). Si el vértice corresponde a una propiedad $\bar{P}_{ij}$ se pasa a K).
 K) En la matriz que corresponde a este vértice, colocar ∞ en la casilla (X_i, X_j) en donde i y j son los de $\bar{P}_{ij}$. Restar de la fila X_i y de la columna X_j sus respectivos elementos más pequeños. Pasar de nuevo a C).

Este algoritmo ha sido establecido para valores $v_{ij} = v(X_i, X_j)$ que son números ordinarios no negativos. Señalemos, desde un principio, que este algoritmo no puede aplicarse directamente a grafos "valuados" en intervalos de confianza o en números borrosos ya que, restando a sí mismo un intervalo de confianza, no se obtiene un 0 (lo mismo sucede, en consecuencia, para un número borroso).

Se va pues a razonar de manera distinta y operar con los valores inferiores y superiores de los intervalos de confianza de nivel α .

EL METODO "BRANCH AND BOUND" EN EL SUPUESTO DE NUMEROS BORROSOS

Veamos pues, después de la observación que acabamos de realizar, cómo se puede utilizar el método en el supuesto de números borrosos. Se va a considerar una matriz formada por los elementos $\underline{v}_{ij}$ que son números borrosos. Se consideran n α -cortes, por ejemplo $n = 11$ con $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$. Para cada α -corte, se obtiene una matriz en la que los elementos son intervalos de confianza $[a_{ij}(\alpha), b_{ij}(\alpha)]$ (en realidad el ejemplo numérico que va a exponerse a continuación serán secuencias de números enteros en $\mathbb{N}$). Se trata entonces separadamente cada matriz en la que los elementos son $a_{ij}(\alpha)$ (o bien en donde los elementos son $b_{ij}(\alpha)$) lo que implica realizar $n-1$ cálculos en paralelo. Ya no queda más que sintetizar los resultados mediante el correspondiente encaje. El método constituye una generalización para todo lo que puede ser tratado mediante "branch and bound".

Estudiemos un ejemplo a partir de la matriz dada en la figura 13.3.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
∞	$\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ .4 & .7 & 1 & .6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8 & 9 \\ .2 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 & 6 & 7 \\ .4 & 1 & .6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ .1 & .4 & .2 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 6 \\ .8 & 1 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8 & 9 \\ .4 & 1 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 7 & 8 & 9 \\ .3 & 1 & .9 \end{smallmatrix}$	∞	$\begin{smallmatrix} 7 & 8 & 9 \\ .2 & 1 & .7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ .4 & 1 & .8 & .5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ .2 & .7 & .8 & 1 & .7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & .8 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .5 & 1 & .5 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 5 & 6 \\ .4 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ .1 & .4 & .8 & 1 & .5 \end{smallmatrix}$	∞	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ .7 & 1 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 & 6 & 7 \\ .4 & 1 & .3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ .1 & .9 & 1 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 6 & 7 & 8 \\ .6 & 1 & .1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10 & 11 \\ .3 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ .7 & 1 & .8 & .4 & .1 \end{smallmatrix}$	∞	$\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 \\ .9 & 1 & .8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & .3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & .4 & .1 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & .8 & .5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ .7 & 1 & .9 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .5 & 1 & .5 \end{smallmatrix}$	∞	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ .4 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7 & 8 & 9 \\ .3 & 1 & .8 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 6 \\ .6 & 1 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ .6 & 1 & .9 & .7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ .4 & .6 & 1 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 7 & 8 \\ .5 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 \\ .5 & 1 & .8 \end{smallmatrix}$	∞	$\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & .7 & .3 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 8 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ .4 & 1 & .2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .3 & .6 & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ .5 & 1 & .5 & .5 & .1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 6 \\ .4 & 1 & .8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & .3 \end{smallmatrix}$	∞

FIGURA 13.3

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	3	8	5	0	4	8
2	7	∞	7	7	2	9	1
3	5	6	∞	0	5	5	3
4	6	10	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	1	∞	1	7
6	4	1	0	7	3	∞	3
7	8	0	1	15	4	3	∞

NIVEL 0.1

EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	6	9	7	3	6	9
2	9	∞	9	10	6	11	3
3	6	10	∞	2	7	8	3
4	8	11	7	∞	5	3	11
5	6	6	5	3	∞	2	9
6	6	4	3	8	5	∞	5
7	8	2	3	19	6	4	∞

NIVEL 0.1

EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	3	8	5	1	4	8
2	7	∞	7	7	2	9	1
3	5	7	∞	0	5	6	3
4	6	10	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	1	∞	1	7
6	4	1	0	7	3	∞	3
7	8	0	1	15	4	3	∞

NIVEL 0.2

EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	6	9	7	3	6	9
2	9	∞	9	10	6	11	3
3	6	10	∞	2	7	8	3
4	7	11	6	∞	5	3	10
5	6	6	5	3	∞	2	9
6	6	4	3	8	5	∞	5
7	8	2	3	18	6	4	∞

NIVEL 0.2

EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	3	9	5	1	4	8
2	7	∞	8	7	3	9	1
3	5	7	∞	0	5	6	3
4	6	10	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	1	∞	1	7
6	4	1	0	7	3	∞	3
7	8	0	1	15	4	3	∞

NIVEL 0.3

EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	6	9	7	3	5	9
2	9	∞	9	10	6	10	3
3	6	10	∞	1	7	7	3
4	7	11	6	∞	5	3	10
5	6	6	4	3	∞	2	9
6	5	4	2	8	5	∞	5
7	8	1	3	18	6	4	∞

NIVEL 0.3

EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	3	9	5	1	4	8
2	8	∞	8	7	3	9	1
3	5	7	∞	0	5	6	3
4	6	11	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	1	∞	1	8
6	4	1	0	7	3	∞	3
7	8	0	2	15	4	3	∞

NIVEL 0.4

EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	6	9	7	3	5	9
2	9	∞	9	10	6	10	3
3	6	10	∞	1	6	7	3
4	7	11	6	∞	5	2	10
5	6	6	4	3	∞	2	9
6	5	4	2	8	5	∞	4
7	8	1	3	18	6	3	∞

NIVEL 0.4

EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	4	9	6	2	4	9
2	8	∞	8	8	3	9	1
3	6	8	∞	0	6	6	3
4	6	11	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	1	∞	2	8
6	4	1	1	7	3	∞	3
7	8	1	2	15	5	3	∞

NIVEL 0.5
EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	6	9	7	3	5	9
2	9	∞	9	10	6	10	3
3	6	10	∞	1	6	7	3
4	7	11	5	∞	5	2	9
5	6	6	4	3	∞	2	9
6	5	4	2	8	5	∞	4
7	8	1	3	18	6	3	∞

NIVEL 0.5
EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	4	9	6	2	4	9
2	8	∞	8	8	3	9	2
3	6	8	∞	0	6	6	3
4	6	11	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	2	∞	2	8
6	4	1	1	8	4	∞	3
7	8	1	2	16	5	3	∞

NIVEL 0.6
EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	6	9	7	3	5	9
2	9	∞	9	9	6	10	2
3	6	9	∞	1	6	7	3
4	7	11	5	∞	5	2	9
5	5	6	4	2	∞	2	9
6	5	4	2	8	5	∞	4
7	8	1	3	16	6	3	∞

NIVEL 0.6
EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	4	9	6	2	4	9
2	8	∞	8	8	3	9	2
3	6	8	∞	0	6	6	3
4	7	11	3	∞	3	2	9
5	4	6	2	2	∞	2	8
6	5	2	2	8	4	∞	3
7	8	1	3	16	5	3	∞

NIVEL 0.7
EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	9	6	3	5	9
2	9	∞	9	9	6	10	2
3	6	9	∞	1	6	7	3
4	7	11	5	∞	5	2	9
5	5	6	4	2	∞	2	9
6	5	4	2	8	5	∞	4
7	8	1	3	16	6	3	∞

NIVEL 0.7
EXTREMO SUPERIOR

FIGURA 13.4

FIGURA 13.4

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	9	6	3	4	9
2	8	∞	8	8	4	9	2
3	6	8	∞	1	6	6	3
4	7	11	4	∞	3	2	9
5	4	6	3	2	∞	2	8
6	5	2	2	8	4	∞	3
7	8	1	3	16	5	3	∞

NIVEL 0.8
EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	9	6	3	5	9
2	9	∞	8	9	5	10	2
3	6	9	∞	1	6	7	3
4	7	11	5	∞	5	2	9
5	5	6	4	2	∞	2	9
6	5	3	2	8	5	∞	3
7	8	1	3	16	6	3	∞

NIVEL 0.8
EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	9	6	3	5	9
2	8	∞	8	8	5	9	2
3	6	9	∞	1	6	6	3
4	7	11	4	∞	3	2	9
5	4	6	3	2	∞	2	8
6	5	2	2	8	4	∞	3
7	8	1	3	16	5	3	∞

NIVEL 0.9
EXTREMO INFERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	9	6	3	5	9
2	9	∞	8	8	5	9	2
3	6	9	∞	1	6	7	3
4	7	11	4	∞	4	2	9
5	4	6	4	2	∞	2	8
6	5	3	2	8	4	∞	3
7	8	1	3	16	5	3	∞

NIVEL 0.9
EXTREMO SUPERIOR

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	9	6	3	5	9
2	8	∞	8	8	5	9	2
3	6	9	∞	1	6	7	3
4	7	11	4	∞	4	2	9
5	4	6	3	2	∞	2	8
6	5	2	2	8	4	∞	3
7	8	1	3	16	5	3	∞

NIVEL 1

NO HA SIDO REPRESENTADO EL NIVEL 0
DADA SU ESCASA RELEVANCIA

Vamos a tratar completamente las dos primeras de las 19 matrices por el algoritmo descrito desde A) hasta K); para las 17 restantes únicamente daremos los resultados.

Se parte de la matriz de la figura 13.5.

A) Consideremos esta matriz; se puede quitar 1 de la fila 2, 2 de la fila 4 y 1 de la fila 5. Se obtiene entonces la matriz de la figura 13.6. En esta matriz se puede quitar 3 de la columna 1 y se obtiene la matriz de la figura 13.7 en donde existe por lo menos un 0 en cada fila y cada columna.

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	3	8	5	0	4	8	
2	7	∞	7	7	2	9	1	1
3	5	6	∞	0	5	5	3	
4	6	10	3	∞	3	2	9	2
5	4	6	2	1	∞	1	7	1
6	4	1	0	7	3	∞	3	
7	8	0	1	15	4	3	∞	

FIGURA 13.5

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	3	8	5	0	4	8	
2	6	∞	6	6	1	8	0	
3	5	6	∞	0	5	5	3	
4	4	8	1	∞	1	0	7	
5	3	5	1	0	∞	0	6	
6	4	1	0	7	3	∞	3	
7	8	0	1	15	4	3	∞	3

FIGURA 13.6

FIGURA 13.7

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	3	8	5	0	4	8	
2	3	∞	6	6	1	8	0	4
3	2	6	∞	0	5	5	3	
4	1	8	1	∞	1	0	7	
5	0	5	1	0	∞	0	6	
6	1	1	0	7	3	∞	3	
7	5	0	1	15	4	3	∞	

- B) La suma de las cantidades que se han quitado es $1 + 2 + 1 + 3 = 7$. En la arborescencia de la figura 13.26, se asignará a E el valor 7.
- C) Consideremos ahora todos los 0 de la figura 13.7 y apliquemos, para cada uno de ellos la fórmula (13.6) indicando el resultado en un pequeño encuadre en la parte superior derecha de la casilla que tiene un 0. Se observa que el máximo 4 aparece en (X_1, X_5) y también en (X_2, X_7) .
- D) En la arborescencia de la figura 13.26, se coloca un vértice $\overline{15}$ para el que se le asigna $7 + 4 = 11$. Se observará que para simplificar la escritura, en esta ocasión y a veces en el futuro, E_{ij} será sustituido por ij y $\overline{E}_{ij}$ por $\overline{ij}$.
- E) En la arborescencia de la figura 13.26, se coloca un vértice 15; en la matriz de la figura 13.7, se suprime la fila 1 y la columna 5, lo que proporciona la figura 13.8. Examinando los arcos seleccionados, en este caso 15, se ve que es necesario dar el valor ∞ a la casilla 51 (si el camino pasa por 15, no debe pasar por 51).
- F) Si se observa la figura 13.8 se ve que puede quitarse 1 a la columna 1.
- G) La suma de elementos restados es 1 por lo que la cota en 15 de la arborescencia será $7 + 1 = 8$.
- H) La matriz de la figura 13.10 es de orden 6×6 , por lo que se pasa a I).
- I) La cota más pequeña se halla en 15 para la que se tiene 8.
- J) Se pasa a C).
- C) Se considerarán todos los 0 de la figura 13.10 y se les aplica la fórmula (13.6). El máximo de (X_i, X_j) es 5 en la casilla 27.
- D) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap \overline{27}$ con un valor $8 + 5 = 13$.
- E) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27$. En la matriz de la figura 13.10, se suprime la fila 2 y la columna 7, lo que da la matriz de la figura 13.11. Hay que colocar ∞ en la casilla 72 para no realizar un circuito.
- F) Observando la figura 13.11, se ve que puede suprimirse 1 de la fila 7 y 1 de la columna 2, dando lugar a la matriz de la figura 13.13.
- G) La suma de elementos que se han eliminado en la figura 13.11 es igual a $1 + 1 = 2$. Se colocará pues en el vértice $15 \cap 27$ de la arborescencia la cota $8 + 2 = 10$.
- H) La matriz es de orden 5×5 , por lo que se pasa a I).
- I) La cota más pequeña en la arborescencia de la figura 13.26 es 10 en $15 \cap 27$.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran todos los 0 de la matriz de la figura 13.13 y se aplica la fórmula (13.6). El máximo se produce para 62; se tiene el valor 4.

	1	2	3	4	6	7
2	3	∞	6	6	8	0
3	2	6	∞	0	5	3
4	1	8	1	∞	0	7
5	∞	5	1	0	0	6
6	1	1	0	7	∞	3
7	5	0	1	15	3	∞

FIGURA 13.8

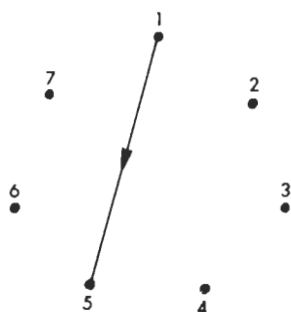


FIGURA 13.9

	1	2	3	4	6	7
2	2	∞	6	6	8	0
3	1	6	∞	0	5	3
4	0	8	1	∞	0	7
5	∞	5	1	0	0	6
6	0	1	0	7	∞	3
7	4	0	1	15	3	∞

FIGURA 13.10

	1	2	3	4	6
3	1	6	∞	0	5
4	0	8	1	∞	0
5	∞	5	1	0	0
6	0	1	0	7	∞
7	4	∞	1	15	3

FIGURA 13.11

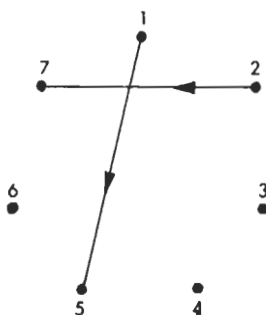


FIGURA 13.12

	1	2	3	4	6
3	1	5	∞	0	5
4	0	7	1	∞	0
5	∞	4	1	0	0
6	0	0	0	7	∞
7	3	∞	0	14	2

FIGURA 13.13

- D) En la arborescencia, se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap \overline{62}$ con la cota $10 + 4 = 14$.
- E) En la arborescencia, se coloca $15 \cap 27 \cap 62$. Se suprime la fila 6 y la columna 2 de la matriz de la figura 13.13, lo que proporciona la matriz de la figura 13.14. Se coloca un símbolo ∞ en la casilla 76 con objeto de evitar que se produzca un circuito.
- F) Examinando la figura 13.14, se observa que no se puede restar nada en ninguna fila ni columna. Se puede representar la figura 13.15.
- G) La cota en $15 \cap 27 \cap 62$ es pues $10 + 0 = 10$.
- H) La matriz de la figura 13.16 es de orden 4×4 . Se pasa a I).
- I) La cota más pequeña para los vértices que cuelgan de la arborescencia es igual a 10 en el vértice $15 \cap \overline{27} \cap 62$.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran todos los 0 de la matriz de la figura 13.16 y se aplica la fórmula (13.6). El máximo es 4 en 73.
- D) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap \overline{73}$ con la cota $10 + 4 = 14$.
- E) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73$. En la matriz de la figura 13.16, se suprime la fila 7 y la columna 3; esto da lugar a la matriz de la figura 13.17. Es preciso colocar ∞ en la casilla 36 para evitar la formación de un circuito.
- F) Examinando la figura 13.17 se observa que no es posible restar nada. Se obtiene así la matriz de la figura 13.19.
- G) La cota en $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73$ es pues $10 + 0 = 10$.
- H) La matriz de la figura 13.19 es de orden 3×3 ; se pasa a I).
- I) La cota más pequeña es 10 en $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73$.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran todos los 0 de la matriz de la figura 13.19 y se aplica la fórmula (13.6). El máximo se produce para 34 y 41 con el valor 1. Tomamos arbitrariamente 34.
- D) En la arborescencia, se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap \overline{34}$ con la cota $10 + 1 = 11$.
- E) En la arborescencia, se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 34$. En la matriz de la figura 13.19 se suprime la fila 3 y la columna 4. Esto proporciona la matriz de la figura 13.20, en donde se coloca una ∞ en la casilla 46.
- F) Examinando la figura 13.20, se observa que no puede restarse nada a ninguna fila ni columna.
- G) La cota de la arborescencia en $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 34$ es pues $10 + 0 = 10$.
- H) La matriz de la figura 13.20 es de orden 2×2 , por lo que se pasa a I).

	1	3	4	6
3	1	∞	0	5
4	0	1	∞	0
5	∞	1	0	0
7	3	0	14	∞

FIGURA 13.14

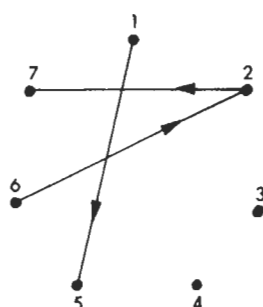


FIGURA 13.15

	1	3	4	6
3	1	∞	0	5
4	0	1	∞	0
5	∞	1	0	0
7	3	0	14	∞

FIGURA 13.16

	1	4	6
3	1	0	∞
4	0	∞	0
5	∞	0	0

FIGURA 13.17

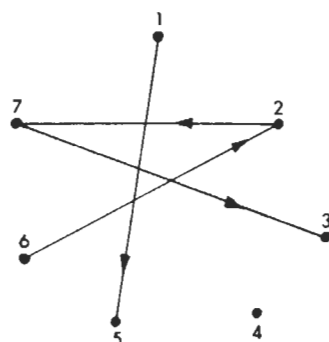


FIGURA 13.18

	1	4	6
3	1	0	∞
4	0	1	0
5	∞	0	0

FIGURA 13.19

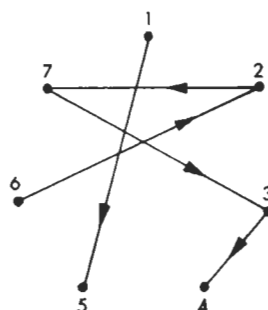


FIGURA 13.21

	1	6
4	0	∞
5	∞	0

FIGURA 13.22

	1	6
4	0	∞
5	∞	0

FIGURA 13.20

	6
5	0

FIGURA 13.23

- I) La cota más pequeña de la arborescencia es $10 \cap 15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 34$.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran los 0 de la matriz de la figura 13.22. Utilizando la fórmula (13.6) se encuentran dos valores ∞ : el uno en 41, el otro en 56. Se toma arbitrariamente 41.
- D) En la arborescencia, se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 34 \cap 41$ con la cota $10 + \infty = \infty$.
- E) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 34 \cap 41$. En la matriz de la figura 13.22, se suprime la fila 4 y la columna 1. Se obtiene la matriz de la figura 13.23.
- F) Examinando la figura 13.23, se observa que no es posible restar nada de ninguna fila ni columna (lo que resulta elemental).
- G) La cota correspondiente a $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 34 \cap 41$ es pues $10 + 0 = 10$.
- H) La matriz de la figura 13.23 es de orden 1×1 con lo que el proceso ha llegado a su fin. Queda por cerrar el circuito hamiltoniano, lo que se realiza con 56. Esto proporciona la cota $10 + 0 = 10$ y el circuito hamiltoniano mínimo tiene como valor 10. Se halla representado en la figura 13.25:

$$13.7 \quad (X_1, X_5, X_6, X_2, X_7, X_3, X_4, X_1)$$

Presentamos a través de la figura 13.25 la arborescencia completa obtenida por los cálculos realizados. Se observa que la solución es única ya que ningún otro vértice abandonado de los que cuelgan posee una cota igual a 10. Por otra parte, los arcos 41 y 56 abandonados a lo largo del proceso se vuelven a encontrar en la solución final (figura 13.25).

Vamos a realizar también el desarrollo del proceso para la segunda matriz de nivel 0.1, con objeto de que sirva para asentar las ideas sobre este tema.

- A) Consideremos la matriz de la figura 13.27. Se puede restar 3 de la fila 1, 3 de la fila 2, 2 de la fila 3, 3 de la fila 4, 2 de la fila 5, 3 de la fila 6 y 2 de la fila 7. Esto proporciona la matriz de la figura 13.28 en la que también puede restarse 3 de la columna 1. De esta manera existe, en la matriz de la figura 13.29 así obtenida, por lo menos un 0 en cada fila y en cada columna.
- B) La suma de las cantidades eliminadas es:

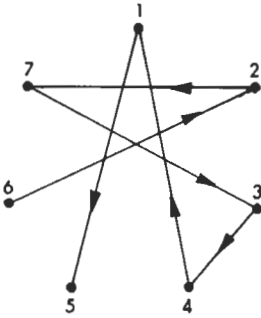


FIGURA 13.24

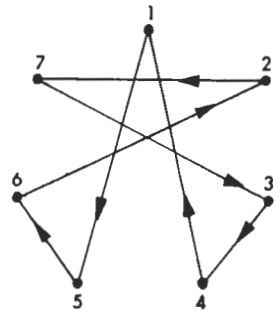
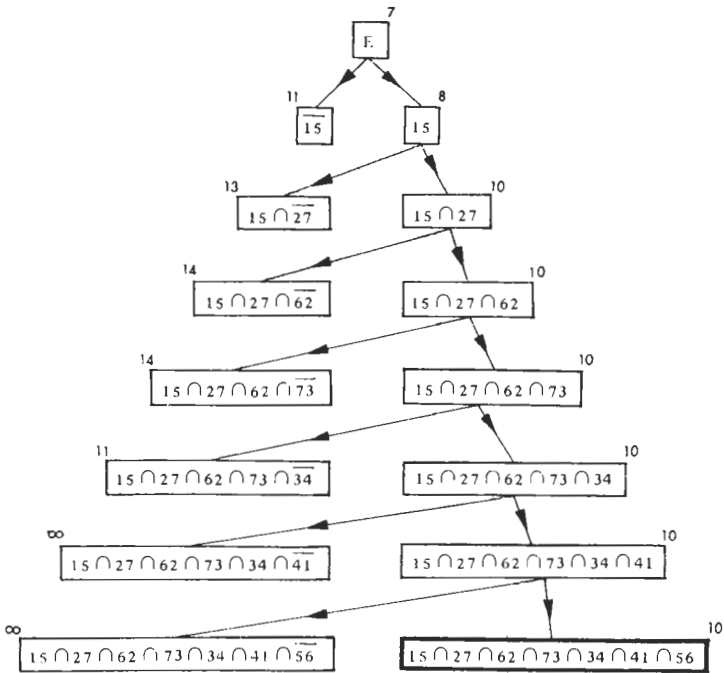


FIGURA 13.25

FIGURA 13.26



$$(3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2) + (3) = 21.$$

En la arborescencia de la figura 13.51 se colocará para E la cota 21.

- C) En la figura 13.29 consideramos ahora todos los 0. Para cada uno de ellos, se aplicará la fórmula (13.6). El máximo tiene lugar para 15 con el valor 5.
- D) En la arborescencia de la figura 13.51, se coloca un vértice $\overline{15}$ con el valor $21 + 5 = 26$.
- E) En la arborescencia se coloca también un vértice 15. En la matriz de la figura 13.29 se suprime la fila 1 y la columna 5, lo que proporciona la matriz de la figura 13.30. En esta matriz debe colocarse ∞ en la casilla 51 para impedir la formación de un circuito. Se obtiene la matriz de la figura 13.32.
- F) Si se examina la figura 13.32 se observa que no es posible restar nada.
- G) Se coloca pues $21 + 0 = 21$ en el vértice 15 de la arborescencia de la figura 13.51.
- H) La matriz es de orden 6×6 . Se puede pasar a I).
- I) La cota más pequeña de la arborescencia es 21 en 15.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran todos los 0 en la matriz de la figura 13.32 y se aplica la fórmula 13.6. El máximo se produce en 27 con el valor 4.
- D) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27$ con la cota $21 + 4 = 25$.
- E) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27$. En la matriz de la figura 13.32 se suprime la fila 2 y la columna 7, lo que da lugar a la figura 13.33. En esta matriz debe colocarse un ∞ en 72 para evitar un circuito. Se obtiene la matriz de la figura 13.35.
- F) Examinando la figura 13.35 se observa que es posible restar 1 de la fila 7 y 1 de la columna 2 lo que proporciona la matriz de la figura 13.36.
- G) La cota correspondiente a $15 \cap 27$ es pues $21 + 2 = 23$.
- H) El orden de la matriz es 5×5 ; se pasa a I).
- I) La cota más pequeña de la arborescencia es 23 en $15 \cap 27$.
- J) Se vuelve a pasar a C).
- C) Se consideran todos los 0 de la figura 13.36. Para cada uno de ellos se aplica la fórmula (13.6). El máximo tiene lugar en 62 con el valor 3.
- D) En la arborescencia se coloca el vértice $15 \cap 27 \cap \overline{62}$ con el valor $23 + 3 = 26$.
- E) En la arborescencia se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62$. En la matriz de la figura 13.36 se suprime la fila 6 y la columna 2 lo que proporciona la matriz de la figura 13.37. En esta matriz debe colocarse un ∞ en la casilla 76 para evitar un circuito.

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	6	9	7	3	6	9	3
2	9	∞	9	10	6	11	3	3
3	6	10	∞	2	7	8	3	2
4	8	11	7	∞	5	3	11	3
5	6	6	5	3	∞	2	9	2
6	6	4	3	8	5	∞	5	3
7	8	2	3	19	6	4	∞	2

FIGURA 13.27

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	3	6	4	0	3	6	
2	6	∞	6	7	3	8	0	
3	4	8	∞	0	5	6	1	
4	5	8	4	∞	2	0	8	
5	4	4	3	1	∞	0	7	
6	3	1	0	5	2	∞	2	
7	6	0	1	17	4	2	∞	3

FIGURA 13.28

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	3	6	4	0	3	6	
2	3	∞	6	7	3	8	0	4
3	1	8	∞	0	5	6	1	
4	2	8	4	∞	2	0	8	
5	1	4	3	1	∞	0	7	
6	0	1	0	5	2	∞	2	
7	3	0	1	17	4	2	∞	

FIGURA 13.29

	1	2	3	4	6	7	
2	3	∞	6	7	8	0	
3	1	8	∞	0	6	1	
4	2	8	4	∞	0	8	
5	1	4	3	1	0	7	
6	0	1	0	5	∞	2	
7	3	0	1	17	2	∞	

FIGURA 13.30

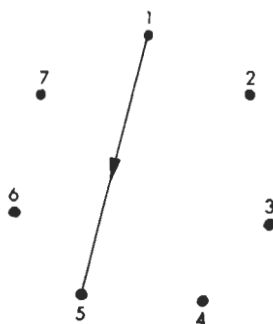


FIGURA 13.31

	1	2	3	4	6	7	
2	3	∞	6	7	8	0	4
3	1	8	∞	0	6	1	
4	2	8	4	∞	0	8	
5	∞	4	3	1	0	7	
6	0	1	0	5	∞	2	
7	3	0	1	17	2	∞	

FIGURA 13.32

- F) Examinando la figura 13.39 se observa que puede sustraerse 1 de la columna 1, obteniéndose así la matriz de la figura 13.40.
- G) Se coloca pues $23 + 1 = 24$ en el vértice $15 \cap 27 \cap 62$ de la arborescencia.
- H) El orden de la matriz de la figura 13.40 es 4×4 ; se pasa pues, a I).
- I) La cota más pequeña del vértice $15 \cap 27 \cap 62$ de la arborescencia es 24.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran todos los 0 de la matriz de la figura 13.40 y se aplica la fórmula (13.6) lo que permite seleccionar 73 con el valor 4.
- D) Se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap \overline{73}$ en la arborescencia con la cota $24 + 4 = 28$.
- E) Se coloca en la arborescencia un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73$. En la matriz de la figura 13.40 se suprime la fila 7 y la columna 3. Esto proporciona la figura 13.41. En esta matriz debe colocarse un ∞ en la casilla 36 para evitar un circuito. Se obtiene la figura 13.43.
- F) Examinando la figura 13.43 se observa que no es posible sustraer nada.
- G) Se colocará pues $24 + 0 = 24$ en el vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73$ de la arborescencia.
- H) La matriz de la figura 13.43 es de orden 3×3 ; se pasa a I).
- I) La cota más pequeña es 24 en $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73$.
- J) Se pasa a C).
- C) Se consideran todos los 0 de la matriz de la figura 13.43 y se aplica la fórmula (13.6). Se tiene el valor 1 en cuatro apartados. Se elige, arbitrariamente, el 31.
- D) Se coloca en la arborescencia un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap \overline{31}$ con el valor $24 + 1 = 25$.
- E) Se coloca en la arborescencia un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 31$. En la matriz 13.43 se suprime la fila 3 y la columna 1, lo que proporciona la matriz de la figura 13.44. En esta matriz debe colocarse un ∞ en la casilla 56 para evitar un circuito; esto da lugar a la figura 13.46.
- F) Examinando la figura 13.46, se observa que puede restarse 1 en la fila 5, lo que da lugar a la figura 13.47.
- G) Se colocará, pues, $24 + 1 = 25$ en el vértice de la arborescencia $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 31$.
- H) El orden de la matriz de la figura 13.47 es 2×2 . Se pasa a I).
- I) La cota más pequeña de la arborescencia es 25. Se halla en $15 \cap \overline{27}$, $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap \overline{31}$ y en $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 31$. De manera arbitraria podemos elegir este último vértice.
- J) Se pasa a C).

	1	2	3	4	6
3	1	8	∞	0	6
4	2	8	4	∞	0
5	∞	4	3	1	0
6	0	1	0	5	∞
7	3	0	1	17	2

FIGURA 13,33

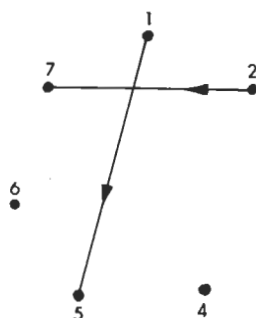


FIGURA 13,34

	1	2	3	4	6
3	1	8	∞	0	6
4	2	8	4	∞	0
5	∞	4	3	1	0
6	0	1	0	5	∞
7	3	∞	1	17	2

FIGURA 13,35

	1	2	3	4	6
3	1	7	∞	0	6
4	2	7	4	∞	0
5	∞	3	3	1	0
6	0	1	0	5	∞
7	2	0	1	16	1

FIGURA 13,36

	1	3	4	6
3	1	∞	0	6
4	2	4	∞	0
5	∞	3	1	0
7	2	0	16	1

FIGURA 13,37

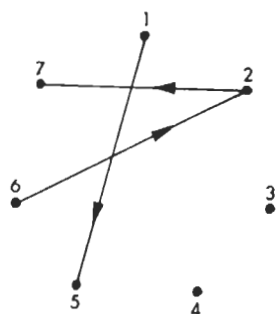


FIGURA 13,38

	1	3	4	6
3	1	∞	0	6
4	2	4	∞	0
5	∞	3	1	0
7	2	0	16	∞

FIGURA 13,39

	1	3	4	6
3	0	∞	0	6
4	1	4	∞	0
5	∞	3	1	0
7	1	0	16	∞

FIGURA 13,40

	1	4	6
3	0	0	6
4	1	∞	0
5	∞	1	0

FIGURA 13,41

- C) Se consideran todos los 0 de la matriz de la figura 13.47; esto proporciona ∞ en dos posiciones. Arbitrariamente se elige 46.
- D) Se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 31 \cap 46$ en la arborescencia con $25 + \infty = \infty$.
- E) Se coloca un vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 31 \cap 46$ en la arborescencia.
- F) Si se observa la matriz de la figura 13.48, se ve claramente que no es posible sustraer nada.
- G) Se coloca $25 + 0 = 25$ en el vértice $15 \cap 27 \cap 62 \cap 73 \cap 31 \cap 46$ de la arborescencia.
- H) El orden de la matriz de la figura 13.48 es 1×1 . Se pasa a 1).
- 1) La cota más pequeña es 25 y se encuentra en tres vértices que cuelgan. Si se elige el que acabamos de hallar en G) se cierra el circuito con 54 y se ha encontrado un circuito hamiltoniano mínimo cuyo valor es 25. La existencia de otros vértices que cuelgan con valor 25 indica una posibilidad de otras soluciones mínimas. La arborescencia obtenida se presenta en la figura 13.51.

Parece conveniente señalar que como consecuencia de estos dos procesos podría llegar a pensarse que no resulta necesario volver hacia atrás en un vértice que cuelga para el que el extremo es más pequeño. Sería totalmente erróneo. Vamos a presentar en la figura 13.52 la arborescencia correspondiente a la matriz de nivel $\alpha = 1$. Los números que aparecen dentro de un círculo indican el orden en que se ha realizado la construcción de la arborescencia.

Vamos a dar, ahora, los resultados para los α niveles de 0.1 a 1 indicando que, para ciertos valores, los caminos hamiltonianos obtenidos no son únicos. En este supuesto vamos a presentar uno sólo.

El número borroso del (o de los) camino hamiltoniano borroso mínimo se obtiene seguidamente (13.8) a través de un encaje.

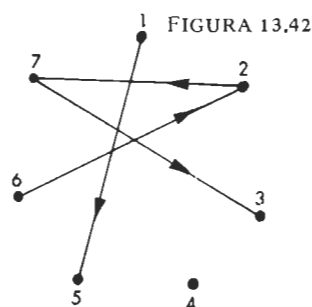
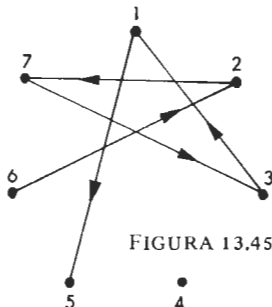


FIGURA 13.43

	1	4	6
3	0	1	∞
4	1	∞	0
5	∞	1	0

FIGURA 13.44

	4	6
4	∞	0
5	1	0



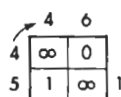


FIGURA 13.46

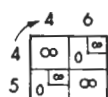


FIGURA 13.47



FIGURA 13.48

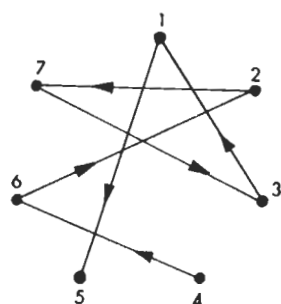


FIGURA 13.49

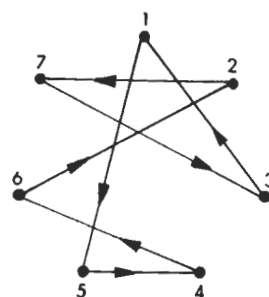
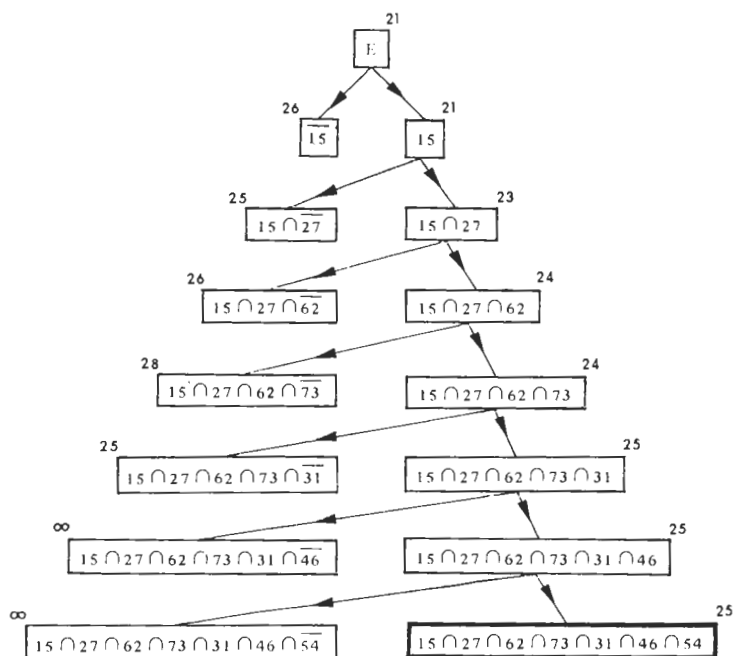


FIGURA 13.50

FIGURA 13.51



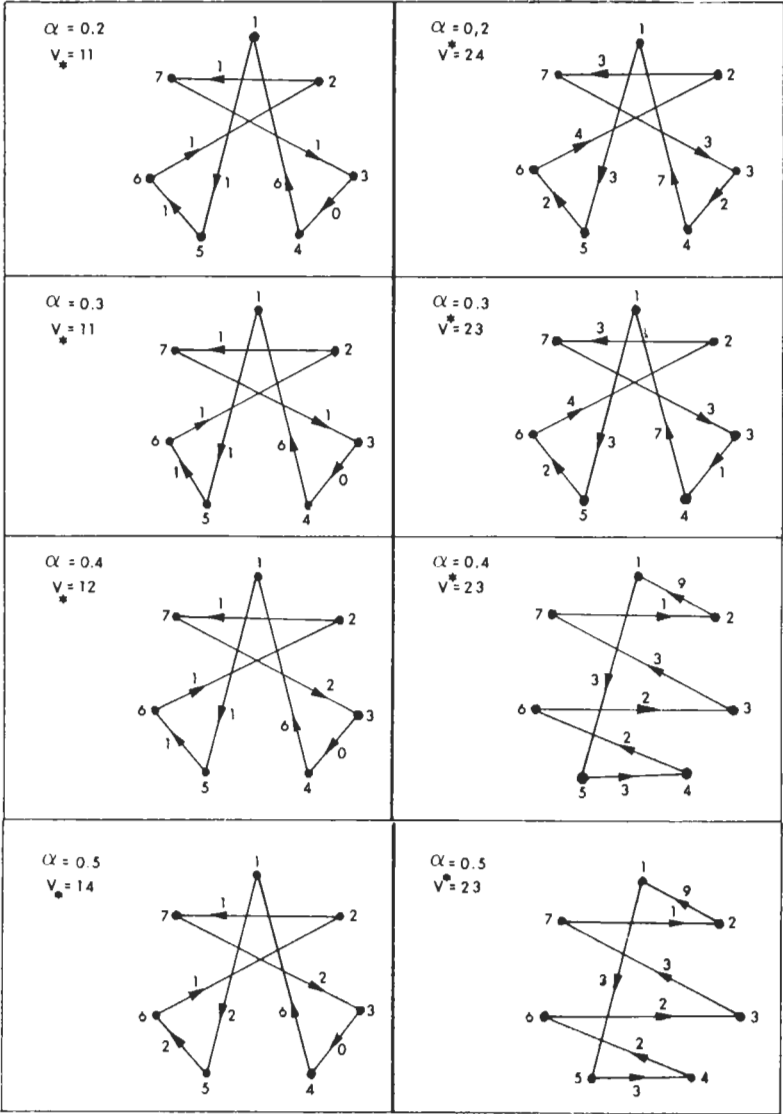


FIGURA 13.53

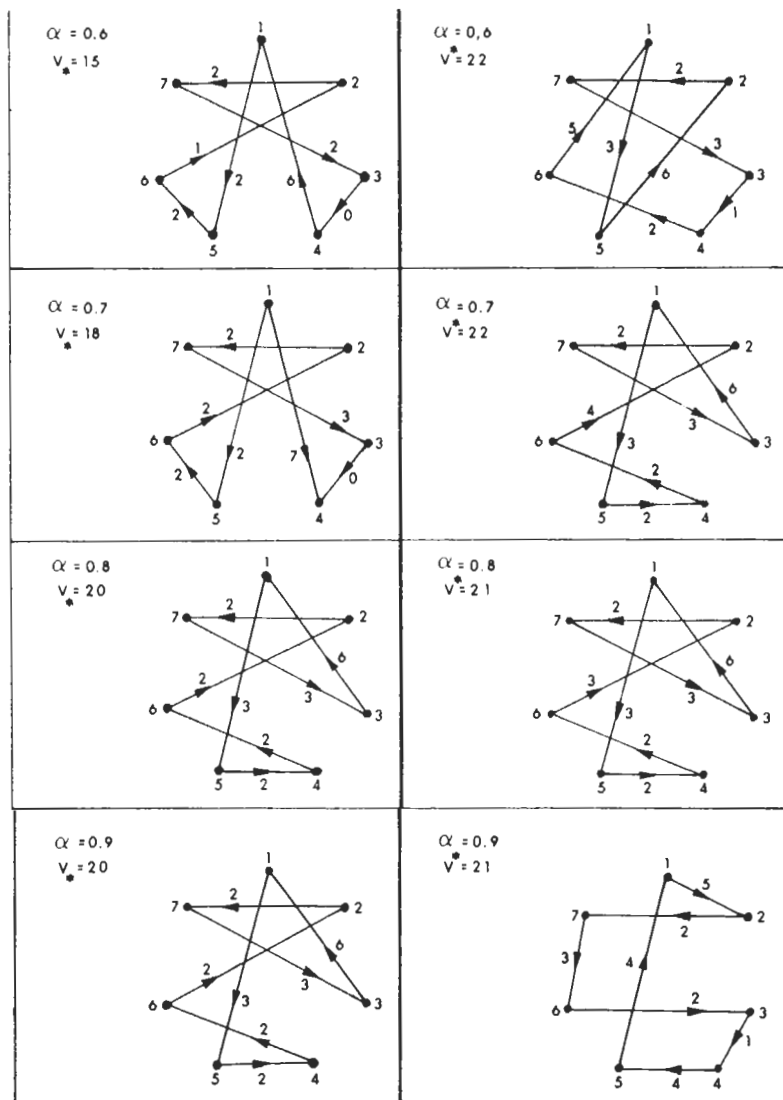


FIGURA13,53

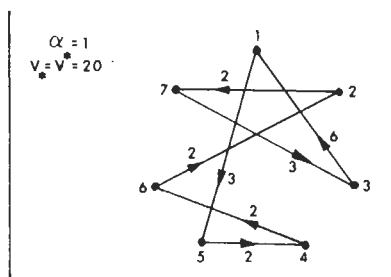


FIGURA 13.53

13.8

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
.3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
.4			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
.5					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
.6						1	1	1	1	1	1	1	1			
.7								1	1	1	1	1	1			
.8										1	1					
.9											1	1				
1												1				
	.1	.3	.4	.4	.5	.6	.6	.6	.7	.7	1	.9	.7	.5	.2	.1

INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS

Es posible, por construcción, realizar la siguiente interpretación de los resultados de la figura 13.53. Si consideramos *un nivel* α y si se elige el camino hamiltoniano que proporciona un valor V^* (extremo superior) este valor no será sobrepasado; si se elige un camino hamiltoniano V_* (extremo inferior) este valor siempre será superado o igualado (aunque no será superior a V^*).

Sin embargo resulta necesario insistir que esto es válido para el nivel α elegido ya que si se considera, por ejemplo, $\alpha = 0.4$, $V^* = 23$ es decir $V_{0.4}^* = 3 + 3 + 2 + 2 + 3 + 1 + 9 = 23$; el mismo camino al nivel 0.2 proporciona $V_{0.2}^* = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 9 = 26$. A un nivel de presunción más bajo se puede sobrepasar $V_{0.4}^*$. De esta manera se elige un camino aceptando un riesgo que puede asociarse al nivel α considerado. Si existe un mismo camino hamiltoniano mínimo para un mismo nivel α , el valor del camino pertenecerá a $[V_*, V^*]$. Así, tomando como ejemplo los resultados de la figura 13.53, si escogemos un nivel $\alpha = 0.1$ y si se elige V^* se obtiene que el valor incierto del camino pertenecerá a $[10, 25]$. Si se elige $\alpha = 0.2$, como los dos caminos son iguales, el valor incierto pertenecerá a $[V_*, V^*] = [11, 24]$.

Resulta interesante calcular, para todos los circuitos hamiltonianos distintos presentados en la figura 13.53 los números borrosos respectivos que son representativos del valor borroso. Existen 5 circuitos distintos:

— (1, 5, 6, 2, 7, 3, 4, 1) para los 8 casos siguientes:

$\alpha = 0.1$ y V_* , $\alpha = 0.2$ y V_* , $\alpha = 0.3$ y V_* ,

$\alpha = 0.4$ y V_* , $\alpha = 0.5$ y V_* , $\alpha = 0.6$ y V_* ,

$\alpha = 0.2$ y V^* , $\alpha = 0.3$ y V^* .

— (1, 5, 4, 6, 2, 7, 3, 1) para los 6 casos:

$\alpha = 0.8$ y V_* , $\alpha = 0.9$ y V_* , $\alpha = 0.1$ y V^* ,

$\alpha = 0.7$ y V^* , $\alpha = 0.8$ y V^* , $\alpha = 1$ y $V^* = V_*$

13.9 — (1, 5, 4, 6, 3, 7, 2, 1) para los 2 casos:

$\alpha = 0.4$ y V^* , $\alpha = 0.5$ y V^*

— (1, 5, 2, 7, 3, 4, 6, 1) para el caso:

$\alpha = 0.6$ y V^*

— (1, 2, 7, 6, 3, 4, 5, 1) para el caso:

$\alpha = 0.9$ y V^*

Para cada uno de estos caminos distintos, vamos a suministrar los valores borrosos, después de realizados los correspondientes cálculos.

El número borroso obtenido en (13.8) es el valor del circuito hamiltoniano borroso óptimo; se da la circunstancia que este circuito borroso óptimo es un circuito no borroso (comparar (13.8) y (13.10)); en otros supuestos, el circuito hamiltoniano óptimo puede ser borroso (es decir

(1,5,6,2,7,3,4,1) PROPORCIONA:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
13.10	.1	.3	.4	.4	.5	.6	.6	.6	.7	.7	1	.9	.7	.5	.2	.1

(1,5,4,6,2,7,3,1) PROPORCIONA:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
13.11	0	.1	.3	.4	.4	.5	.5	.6	.6	.7	1	.9	.7	.5	.5	.3

(1,5,4,6,3,7,2,1) PROPORCIONA:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
13.12	0	0	0	.1	.3	.4	.4	.4	.5	.6	.7	1	.9	.5	.3	.2	.2

(1,5,2,7,3,4,6,1) PROPORCIONA:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	20	22	23	24	25	26
13.13	0	0	0	0	.1	.3	.4	.5	.6	.6	.7	.7	1	.5	.3	.2	.2

(1,2,7,6,3,4,5,1) PROPORCIONA:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
13.14	0	0	0	0	.4	.4	.5	.6	.7	.7	.9	1	.8	.8	.6	.5	.5

27 28 29

.3	.2	.2
----	----	----

no ser especificable en tanto que circuito en el sentido de la teoría ordinaria (no borrosa) de grafos). El resultado obtenido en (13.8) debe ser considerado como un extremo inferior. Comparando (13.10), (13.11), (13.12), (13.13) y (13.14) se observa que (13.10) es un extremo inferior de (13.11), (13.12), (13.13) y (13.14).

El método "branch and bound" se aplica también sin demasiadas dificultades en el supuesto de obtención de un máximo (extremo inferior) para datos expresados en números borrosos. La diagonal principal se llenará de 0 en lugar de ∞ y si se establece que, a lo largo del proceso, un circuito no debe pasar por un arco, se colocará un 0 en la casilla correspondiente (o bien un símbolo de prohibición que impida considerar la casilla). Evidentemente deberá modificarse en consecuencia el algoritmo relativo a los circuitos hamiltonianos. Se pueden tomar, también, los complemen-

tos a uno con mayoración de los datos borrosos para convertirlo así en un problema de mínimos.

La obtención de caminos hamiltonianos (caminos no cerrados) con datos borrosos se realiza a través de procedimientos muy similares.

En general, el método "branch and bound" se aplica a datos formados por monoides conmutativos y monótonos. En el ámbito de lo borroso se pueden plantear una gran variedad de casos nuevos e interesantes. No faltan, en los problemas combinatorios de las situaciones reales, datos expresados en números borrosos; incluso puede decirse que son frecuentes. Si se trata de distancias, son generalmente no borrosas, pero si son tiempos, costes, beneficios, etc..., este tipo de datos se hallan impregnados de una incertidumbre natural que conviene tener en cuenta.

Como ha podido observarse, el concepto de opción de optimización en el supuesto de datos borrosos plantea problemas diferentes del que hace referencia a los casos no borrosos. La palabra optimización no puede tener el mismo sentido estricto en el supuesto de datos borrosos. Volveremos a insistir en esta importante cuestión.

Método P.E.R.T. o C.P.M. con plazos inciertos

REPRESENTACION DE LOS TIEMPOS MEDIANTE INTERVALOS DE CONFIANZA

El método del camino crítico (en inglés Critical Path Method o también P.E.R.T.) es tan conocido que no vamos a molestar al lector recordando el supuesto normal con datos ciertos o incluso aleatorios (1). Sin embargo, el hecho de que en la práctica resulte habitual, en estos momentos, que los plazos de ejecución de las tareas se planteen de manera incierta parece conveniente y útil proponer algunas variantes a los métodos clásicos para tratar, de la mejor manera posible, las redes utilizadas en las situaciones menos favorables para el planificador. Vamos a proponer diversas maneras de operar en el supuesto de datos inciertos.

Vamos a presentar algunas variantes a partir de un ejemplo.

Supongamos que los tiempos de las operaciones de una red, estudiada por los métodos del camino crítico, se establezcan mediante la hipótesis según la cual para cada tarea se puede asignar, en lo que se refiere al tiempo de ejecución, un tiempo "optimista" y un tiempo "pesimista". Por lo tanto una vez más, bajo forma de intervalos de confianza se tendrá:

$$14.1 \quad T = [\text{duración optimista, duración pesimista}]$$

y que para cada hipótesis, la baja y alta, se busca el plazo total y el camino crítico. Veamos pues un ejemplo.

(1) Si alguien desea refrescar la memoria puede consultar: A. KAUFMANN y G. DESBAZEILLE: "Método del camino crítico". Ed. Sagitario, Barcelona, 1965.

Para cada operación (X_i, X_j) se establece una duración optimista $t_*(X_i, X_j)$ y una duración pesimista $t^*(X_i, X_j)$.

Empecemos con los datos optimistas (figura 14.1).

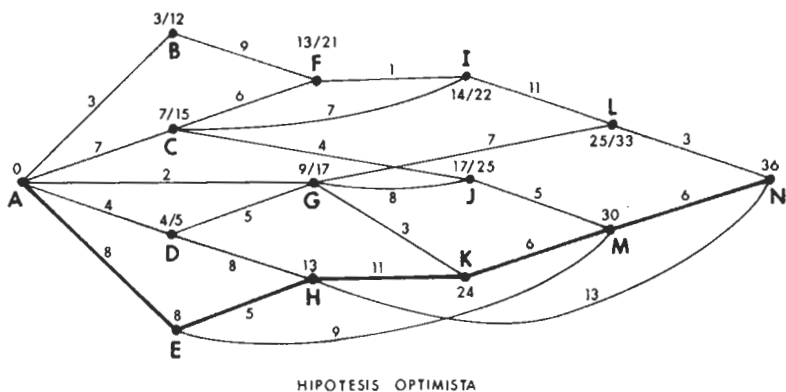


FIGURA 14.1

En la figura 14.1 se ha presentado el camino crítico y se dotan a los acontecimientos que no están en el camino crítico de dos fechas t/t' en donde t' representa la fecha que no debe sobrepasarse si no se quiere modificar la fecha más próxima del final de los trabajos, en nuestro caso 36 (duración optimista).

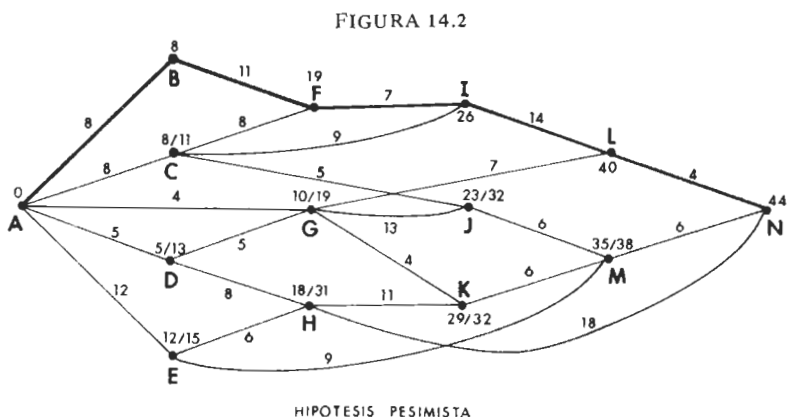


FIGURA 14.2

En la figura 14.2 se han representado las hipótesis pesimistas. El camino crítico ha cambiado. La finalización de los trabajos ha sido estimada en 44 unidades de tiempo en lugar de 36.

Se han obtenido, con las mismas notaciones que las de la figura 14.1, para los acontecimientos que no se hallan en el camino crítico, las fechas que no deben ser sobrepasadas. Resulta, ahora, conveniente realizar una observación. Evidentemente, con la hipótesis pesimista la fecha más cercana de finalización de los trabajos ha sido alejada aunque las fechas a no sobrepasar no se hallan forzosamente más lejanas. Examinemos, por ejemplo, lo que sucede en F. En la hipótesis optimista no debe sobrepasarse 21 y en la hipótesis pesimista no se debe ir más lejos de 19, en donde $19 < 21$. Por el contrario, en G, en la hipótesis optimista, no se debe sobrepasar 17 y en la pesimista no se puede sobrepasar 19 y $19 > 17$. Así, el paso de un camino crítico a otro no provoca una diferencia en las fechas de alerta siempre en el mismo sentido. Convendría tomar, como fecha de alerta, la más pequeña. Así, en F se tomará 19 y en G se tomará 17.

De todas maneras conviene, desde que una o varias operaciones han finalizado, confeccionar un nuevo grafo teniendo en cuenta lo que ya ha sido realizado; por otra parte, esto puede en ciertos casos modificar los plazos de las operaciones optimista o pesimista. En la incertidumbre, resulta necesario un espíritu de adaptación y tener en cuenta cómo evoluciona la información. El hecho de considerar intervalos de confianza que corresponden a estimaciones de expertos (de uno o de varios) impone todavía más la adaptación a medida que va desarrollándose el proyecto.

EL PROCESO CON LA UTILIZACION DE N. B. T.

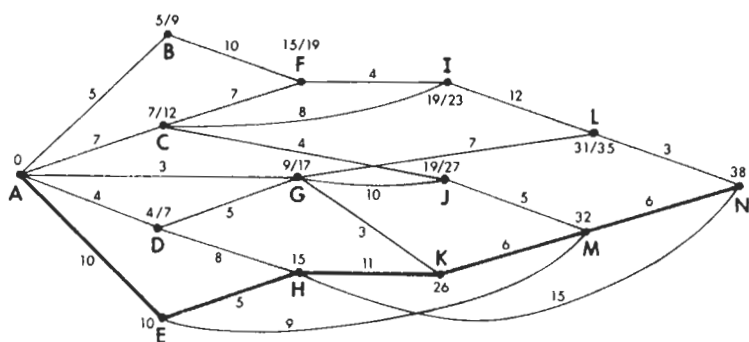
Supongamos ahora que se ha considerado un tercer tipo de datos; datos que vamos a calificar de "realistas" y que se encuentran dentro del abanico optimismo-pesimismo. Vamos a representarlos en el mismo grafo que el de las figuras 14.1 y 14.2.

La figura 14.3 proporciona los resultados con datos realistas. Se da la circunstancia de que el camino crítico coincide con el relativo a los datos optimistas, pero no tiene por qué ser siempre así. La duración realista es, en este caso, 38.

Vamos a abordar, ahora, otro método. Supongamos que con los datos de las figuras 14.1, 2 y 3 construimos números borrosos triangulares:

14.2

(optimismo, realismo, pesimismo)



HIPOTESIS REALISTA

FIGURA 14.3

Como es conocido, la suma de números borrosos da lugar a un número borroso pero el máximo (supremum) y el mínimo (inferum) no proporcionan números borrosos triangulares más que en el supuesto de que exista dominio. Para avanzar a lo largo del grafo, precisamos de una regla sencilla. Elegiremos la siguiente ya citada y utilizada. Si se parte de dos números borrosos triangulares:

$$14.3 \quad (a_1, a_2, a_3) \text{ y } (b_1, b_2, b_3)$$

14.4

vamos a escribir:

$$14.5 \quad (a_1 + 2a_2 + a_3 > b_1 + 2b_2 + b_3) \Rightarrow ((a_1, a_2, a_3) \succ (b_1, b_2, b_3))$$

En el supuesto de igualdad, se puede tomar como segundo criterio $a_2 > b_2$ y si es necesario un tercer criterio $a_3 > b_3$.

Nos encontramos ante un proceso secuencial de optimización.

Si consideramos los datos de las figuras 14.1, 2 y 3 bajo la forma de números borrosos triangulares.

$$\begin{aligned}
 & \underline{v}(A, B) = (3, 5, 8), \underline{v}(A, C) = (7, 7, 8), \underline{v}(A, D) = (4, 4, 5), \\
 & \underline{v}(A, E) = (8, 10, 12), \underline{v}(A, G) = (2, 3, 4), \underline{v}(B, F) = (9, 10, 11), \\
 & \underline{v}(C, F) = (6, 7, 8), \underline{v}(C, I) = (7, 8, 9), \underline{v}(C, J) = (4, 4, 5), \\
 14.6 \quad & \underline{v}(D, G) = (5, 5, 5), \underline{v}(D, H) = (8, 8, 8), \underline{v}(E, H) = (5, 5, 6), \\
 & \underline{v}(E, M) = (9, 9, 9), \underline{v}(F, I) = (1, 4, 7), \underline{v}(G, J) = (8, 10, 13), \\
 & \underline{v}(G, K) = (3, 3, 4), \underline{v}(G, L) = (7, 7, 7), \underline{v}(H, K) = (11, 11, 11), \\
 & \underline{v}(H, N) = (13, 15, 18), \underline{v}(I, L) = (11, 12, 14), \underline{v}(J, M) = (5, 5, 6), \\
 & \underline{v}(K, M) = (6, 6, 6), \underline{v}(L, N) = (3, 3, 4), \underline{v}(M, N) = (6, 6, 6).
 \end{aligned}$$

Procedamos a la optimización

$$\begin{aligned}
 & \underline{v}^*(B) = (3, 5, 8), \underline{v}^*(C) = (7, 7, 8), \underline{v}^*(D) = (4, 4, 5), \\
 & \underline{v}^*(E) = (8, 10, 12), \underline{v}^*(F) = \underline{v}^*(B) (+) \underline{v}(B, F) \check{V} \underline{v}^*(C) (+) \\
 & \underline{v}^*(C, F) = (12, 15, 19) \check{V} (13, 14, 16) = (12, 15, 19), \\
 14.7 \quad & \underline{v}^*(G) = \underline{v}^*(A) (+) \underline{v}(A, G) \check{V} \underline{v}^*(D) (+) \underline{v}(D, G) \\
 & = (2, 3, 4) \check{V} (9, 9, 10) = (9, 9, 10) \\
 & \underline{v}^*(H) = \underline{v}^*(D) (+) \underline{v}(D, H) \\
 & \check{V} \underline{v}^*(E) (+) \underline{v}(E, H) = (12, 12, 13) \check{V} (13, 15, 18) = (13, 15, 18), \\
 & \underline{v}^*(I) = \underline{v}^*(F) (+) \underline{v}(F, I) \check{V} \underline{v}^*(C) (+) \underline{v}(C, I) = (13, 19, 26), \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Los resultados son trasladados a la figura 14.4. Se obtiene para la fecha más cercana el número borroso triangular (36, 38, 41) y el camino crítico coincide con el de las figuras 14.1 y 14.3. Llegados a este punto nos encontramos con una dificultad que debemos superar. Los cálculos

(1) El símbolo $\check{V}$ indica que se utiliza el criterio (14.5) y si es necesario los otros dos criterios de manera sucesiva.

han sido presentados en la figura 14.4. Se observa que no es posible, bajo esta forma, presentar los datos de alerta en los acontecimientos que no se hallan en el camino crítico. Entonces, se puede utilizar para cada número borroso triangular (a_1, a_2, a_3) lo que llamaremos su "mejor representación", la mitad de su distancia a $(0, 0, 0)$, es decir:

$$14.8 \quad \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}$$

Así transformados, los resultados de la figura 14.4 proporcionan los de la figura 14.5.

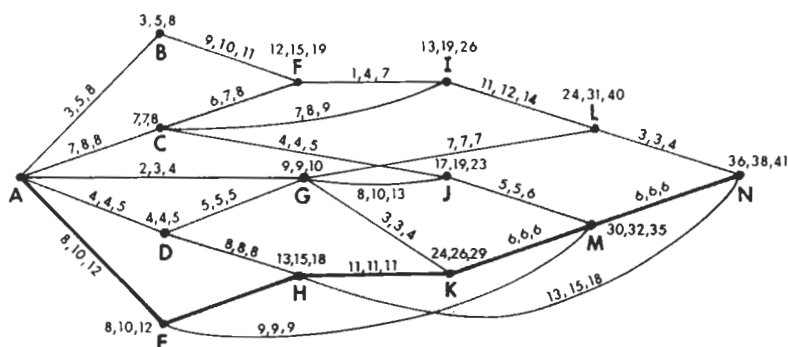


FIGURA 14.4

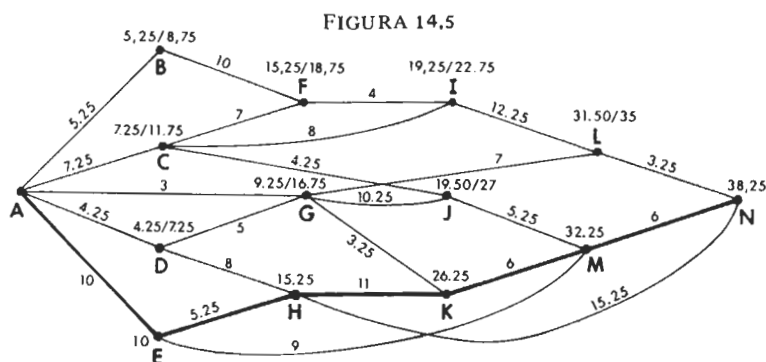


FIGURA 14.5

Se han podido colocar así las fechas de alerta, las cuales constituyen la expresión de la sustitución de los N.B.T. por su mejor representación formal. Podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿por qué no utilizar desde el inicio la mejor representación de los N.B.T.? Pues dado que los dos grafos 14.4 y 14.5 se utilizan conjuntamente, aportan informaciones complementarias.

Comparando las figuras 14.3 y 14.5 se observa que los resultados son muy parecidos. Pero no siempre sucede así. Comparemos

$$\frac{a_1 + 2 a_2 + a_3}{4} \quad \text{con } a_2 :$$

$$14.9 \quad \frac{a_1 + 2 a_2 + a_3}{4} : a_2$$

e incluso:

$$14.10 \quad a_1 + a_3 : a_2$$

Mientras $a_1 + a_3$ se halle próximo a $2 a_2$ los resultados no diferirán demasiado, tanto si se toma $\frac{a_1 + 2 a_2 + a_3}{4}$ como a_2 . Pero no sucederá lo mismo si $a_1 + a_3$ es sensiblemente distinto a $2 a_2$.

En ciertos casos la utilización de N.B.T. puede resultar inaceptable y es aconsejable utilizar números borrosos cuya forma se adapte mejor al problema que se desea resolver. Es entonces cuando resulta conveniente la realización de cálculos nivel por nivel, por ejemplo 11 niveles 0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1 y para cada uno de ellos considerar los intervalos de confianza. Evidentemente el tiempo total de ejecución del proyecto, que será también un intervalo de confianza, va a variar en su encaje. Los cálculos son más largos (prácticamente diez veces más) pero con el uso de ordenadores, este efecto resulta despreciable. En este supuesto conviene estudiar las mejores variantes.

LA HIPOTESIS DEL SUMINISTRO DE DATOS POR VARIOS EXPERTOS

Vamos a abordar ahora una situación bastante generalizada. Se da cuando los datos de las operaciones son suministrados por varios exper-

tos que pueden estar en desacuerdo y resulta interesante definir un procedimiento que sea adaptable a esta situación.

Para empezar supongamos que una operación es estudiada por cuatro expertos (por ejemplo) y que cada experto expresa su opinión a través de un N.B.T. Proponemos que, para cada N.B.T., se considere su mejor representación que llamaremos "real asociado al N.B.T." o "número asociado" cuya fórmula viene dada por:

$$14.11 \quad a = \frac{a_1 + 2 a_2 + a_3}{4}$$

Se calculará entonces para cada N.B.T. el número asociado y se tomará como dato optimista el más pequeño de los números asociados y como dato pesimista el más grande. Así, por ejemplo, dadas cuatro opiniones de expertos:

<u>N.B.T.</u>	<u>Número asociado</u>
(5, 8, 9)	7.5
(4, 7, 11)	7.25
(5, 5, 8)	5.75
(3, 6, 13)	7

Se tendría entonces para las duraciones:

$$14.13 \quad \text{dato optimista:} \quad t_* = 5.75$$

$$14.14. \quad \text{dato pesimista:} \quad t^* = 7.50$$

Para cada operación se determinarán las t_* y t^* . Con las t_* se tratará la red asignando la fecha optimista al momento más temprano de la finalización de los trabajos, el camino crítico y las fechas de alerta de los acontecimientos que no se hallan en el camino crítico. Se hará lo mismo con las t^* . Es lo que hemos propuesto en las figuras 14.1 y 14.2 pero en esta ocasión con los datos suministrados por los expertos como en (14.12). El planificador aportará su opinión y eventualmente sus decisiones a partir del abanico $[t_*, t^*]$ tanto para la duración total como para las fechas de alerta, teniendo en cuenta que puede producirse una inver-

sión para ciertos acontecimientos (fecha de alerta más tardía para el supuesto optimista o recíprocamente). Esto no debe resultar paradójico si se tiene en cuenta que las redes consideradas no forman un grafo totalmente ordenado que posee sin embargo una función ordinal.

Se puede proponer también otra manera de agregar: para cada t_* y t^* de una misma operación se toma la duración media:

$$14.15 \quad \bar{t} = \frac{t_* + t^*}{2}$$

y considera el N.B.T. simétrico:

$$14.16 \quad (t_*, \bar{t}, t^*)$$

lo que proporciona los números asociados $\frac{t_* + t^*}{2}$ con los cuales se tratará la red. Las tres redes calculadas con los t_* , $\bar{t}$, t^* permitirán una aproximación eficaz al desarrollo del proyecto en aquellas situaciones de incertidumbre resultantes de la inevitable subjetividad de los expertos.

Se pueden considerar otras variantes que, en determinadas ocasiones, resultan necesarias. Si el número de expertos es suficientemente grande, se pueden utilizar datos bajo la forma de subconjuntos aleatorios borrosos en donde se elaboran estadísticas sobre subjetividades diversas. Los cálculos resultan más largos pero no olvidemos que estamos viviendo en la era de la informática.

Una vez más resulta evidente que la certeza, e incluso la aleatoriedad, es más rigurosa que la incertidumbre, pero vivimos también en la era de la incertidumbre y hay que acomodarse a ella.

Criterios de decisión basados en cocientes con datos inciertos

CONSIDERACIONES PREVIAS

En el ámbito de la gestión resulta frecuente la necesidad de tomar decisiones que se apoyan en criterios tales como el de coste-eficacia, calidad-precio, ratios financieros (1), etc. que se plantean en forma de cocientes formados por datos que por estar referidos a períodos futuros, resultan inciertos. En líneas generales el numerador y denominador de estos cocientes varían de manera inversa en función de una misma variable escogida convenientemente. En situaciones de incertidumbre resulta muy eficaz la utilización de los números borrosos.

El planteamiento puede realizarse suponiendo que todos los datos son positivos, es decir que pertenecen al conjunto R_0^+ . Utilizaremos primero el concepto de intervalo de confianza para pasar luego a los números borrosos.

Se designa el numerador con la letra N y el denominador con la letra D. Un intervalo de confianza numerador será designado por:

$$15.1 \quad N = [N_1, N_2]$$

y un intervalo de confianza denominador por:

(1) Para el tratamiento de los ratios financieros en la incertidumbre puede consultarse KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela. 1986, cap. 8.

$$15.2 \quad D = [D_1, D_2]$$

siendo $N_1, N_2, D_1, D_2 > 0$ como se ha señalado anteriormente. Por la aritmética de los intervalos de confianza se tendrá:

$$15.3 \quad Q = N(\cdot) D = \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1} \right]$$

Si se escribe:

$$15.4 \quad Q = [Q_1, Q_2]$$

se tendrá:

$$15.5 \quad [Q_1, Q_2] = \left[\frac{N_1}{Q_2}, \frac{N_2}{Q_1} \right]$$

COMPARACION ENTRE INTERVALOS DE CONFIANZA

Para comparar dos intervalos de confianza se dispone, como primer criterio el de dominio:

$$15.6 \quad A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2]$$

$$15.7 \quad (a_1 > b_1, a_2 > b_2) \Rightarrow (A > B)$$

Si no fuera suficiente, se tomaría:

$$15.9 \quad \left(\frac{a_1 + a_2}{2} > \frac{b_1 + b_2}{2} \right) \Rightarrow (A > B)$$

Si $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$, se debería tomar un tercer criterio:

$$15.10 \quad (a_1 > b_1) \Rightarrow (A > B)$$

o, según la naturaleza del problema,

$$15.11 \quad (a_2 > b_2) \Rightarrow (A > B)$$

Para ordenar A y B resulta lo mismo realizar la comparación con su máximo que con su mínimo y tomar la correspondiente distancia. El criterio (15.9) es equivalente al siguiente:

$$15.12 \quad (d(A, A \wedge B)) > (d(B, A \wedge B)) \Rightarrow (A > B)$$

o bien en sentido inverso:

$$15.13 \quad (d(A, A \vee B)) < (d(B, A \vee B)) \Rightarrow (A > B)$$

El criterio (15.9) es también una distancia, la de los extremos del intervalo a $[0, 0] = 0$ dividida por 2.

Veamos un ejemplo de clasificación de cocientes.

$$15.14 \quad N^{(1)} = [4, 9] \quad D^{(1)} = [12, 15]$$

$$15.16 \quad Q^{(1)} = [4/15, 9/12] = [0.266, 0.750]$$

$$15.17 \quad N^{(2)} = [3, 10] \quad D^{(2)} = [11, 24]$$

$$15.19 \quad Q^{(2)} = [3/24, 10/11] = [0.125, 0.909]$$

$$15.20 \quad N^{(3)} = [2, 12] \quad D^{(3)} = [6, 9]$$

$$15.22 \quad Q^{(3)} = [2/9, 12/6] = [0.222, 2.000]$$

Como no existe dominio entre cada uno de los $Q^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ excepto entre $Q^{(2)}$ y $Q^{(3)}$, tomemos el criterio (15.9).

$$15.23 \quad d(Q^{(1)}, 0) = \frac{0.266 + 0.750}{2} = 0.508$$

$$15.24 \quad d(Q^{(2)}, 0) = \frac{0.125 + 0.909}{2} = 0.517$$

$$15.25 \quad d(Q^{(3)}, 0) = \frac{0.222 + 2.000}{2} = 1.111$$

En cuyo caso:

$$15.26 \quad (1.111 > 0.517 > 0.508) \Rightarrow (Q^{(3)} \succ Q^{(2)} \succ Q^{(1)})$$

CLASIFICACION DE COCIENTES EXPRESADOS EN NUMEROS BORROSOS

Pasemos ahora a los números borrosos. Se parte de:

$$\forall N_1(\alpha), N_2(\alpha), D_1(\alpha), D_2(\alpha) \in R_0^+$$

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

entonces será:

$$15.27 \quad N(\alpha) = [N_1(\alpha), N_2(\alpha)], D(\alpha) = [D_1(\alpha), D_2(\alpha)]$$

$$15.29 \quad Q(\alpha) = [Q_1(\alpha), Q_2(\alpha)]$$

$$15.30 \quad = \left[\frac{N_1(\alpha)}{D_2(\alpha)}, \frac{N_2(\alpha)}{D_1(\alpha)} \right]$$

y se escribirá:

$$15.31 \quad d(Q(\alpha), 0) = \frac{1}{2} \left(\int_{\alpha=0}^1 Q_1(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha=0}^1 Q_2(\alpha) d\alpha \right)$$

y al considerar el ámbito discreto y tomar valores de: $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ se tendrá:

$$15.32 \quad d(Q(\alpha), 0) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=0}^1 Q_1(\alpha) + \sum_{\alpha=0}^1 Q_2(\alpha) \right)$$

$$\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$$

Veamos un ejemplo de clasificación para tres cocientes:

15.33

15.34 $Q_1 = \underline{N}_1 (\cdot) \underline{D}_1$, $Q_2 = \underline{N}_2 (\cdot) \underline{D}_2$, $Q_3 = \underline{N}_3 (\cdot) \underline{D}_3$

15.35

en donde los números borrosos vienen dados por los cuadros siguientes a través de los α -cortes.

15.36

α	$N_1 (\alpha)$	$D_1 (\alpha)$	$Q_1 (\alpha) = N_1 (\alpha) (\cdot) D_1 (\alpha)$
0	[4, 9]	[12, 15]	[0.226, 0.750]
0.1	[4, 9]	[12, 15]	[0.226, 0.750]
0.2	[4, 8]	[12, 15]	[0.226, 0.666]
0.3	[5, 8]	[12, 15]	[0.333, 0.666]
0.4	[5, 8]	[12, 14]	[0.357, 0.666]
0.5	[5, 8]	[12, 14]	[0.357, 0.666]
0.6	[6, 7]	[13, 14]	[0.428, 0.538]
0.7	[6, 7]	[13, 14]	[0.428, 0.538]
0.8	[6, 7]	[13, 14]	[0.428, 0.538]
0.9	[6, 7]	[13, 14]	[0.428, 0.538]
1	7	13	0.538

15.37

α	$N_2(\alpha)$	$D_2(\alpha)$	$Q_2(\alpha) = N_2(\alpha) \cap D_2(\alpha)$
0	[3, 10]	[11, 24]	[0.125, 0.909]
0.1	[4, 10]	[11, 23]	[0.173, 0.909]
0.2	[4, 10]	[12, 22]	[0.181, 0.833]
0.3	[4, 9]	[12, 21]	[0.190, 0.750]
0.4	[5, 9]	[12, 20]	[0.250, 0.750]
0.5	[5, 9]	[13, 19]	[0.263, 0.692]
0.6	[6, 9]	[14, 19]	[0.315, 0.642]
0.7	[6, 9]	[14, 18]	[0.333, 0.642]
0.8	[6, 8]	[15, 17]	[0.352, 0.533]
0.9	[7, 8]	[15, 17]	[0.411, 0.533]
1	8	16	0.500

15.38

α	$N_3(\alpha)$	$D_3(\alpha)$	$Q_3(\alpha) = N_3(\alpha) \cap D_3(\alpha)$
0	[2, 12]	[6, 9]	[0.222, 2.000]
0.1	[2, 11]	[6, 8]	[0.250, 1.833]
0.2	[3, 11]	[6, 8]	[0.375, 1.833]
0.3	[3, 11]	[6, 8]	[0.375, 1.833]
0.4	[3, 10]	[6, 8]	[0.375, 1.666]
0.5	[3, 9]	[7, 8]	[0.375, 1.285]

0.6	[4, 8]	[7, 8]	[0.500, 1.142]
0.7	[4, 7]	[7, 8]	[0.500, 1.000]
0.8	[4, 6]	[7, 8]	[0.500, 0.857]
0.9	[5, 6]	[8, 8]	[0.625, 0.750]
1	5	8	0.625

Se van a ordenar ahora los tres cocientes utilizando sus números representativos, tomando la distancia a través de la semisuma.

15.39

α	$d(Q_1(\alpha), 0)$	$d(Q_2(\alpha), 0)$	$d(Q_3(\alpha), 0)$
0	0.488	0.517	1.111
0.1	0.488	0.541	1.041
0.2	0.446	0.507	1.104
0.3	0.499	0.470	1.104
0.4	0.511	0.500	1.020
0.5	0.511	0.477	0.830
0.6	0.483	0.478	0.821
0.7	0.483	0.487	0.750
0.8	0.483	0.442	0.678
0.9	0.483	0.472	0.687
1	0.538	0.500	0.625
TOTAL	5.413	5.391	9.771

En este supuesto por el hecho de utilizar números borrosos se obtiene:

$$15.40 \quad (5.391 < 5.413 < 9.771) \Rightarrow (Q_2 \approx Q_1 \approx Q_3)$$

UTILIZACION DE N.B.T. MEDIANTE APROXIMACION

Se van a considerar ahora los números borrosos triangulares $\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3, \underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3$ y presentar una aproximación que resulta muy operativa.

Como ya se ha señalado el cociente de dos N.B.T. no da lugar a un N.B.T. exceptuando el caso en que los N.B.T. se reducen a números no borrosos. Sin embargo se puede realizar una interesante aproximación.

Supongamos dos N.B.T. y su cociente definidos por sus α -cortes:

$$15.41 \quad \underline{A} = (a_1, a_2, a_3) \quad , \quad \underline{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

15.42

Los α -cortes proporcionan:

$$15.43 \quad A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha]$$

$$15.44 \quad B_\alpha = [b_1 + (b_2 - b_1)\alpha, b_3 - (b_3 - b_2)\alpha]$$

$$15.45 \quad A_\alpha (:) B_\alpha = \left[\frac{a_1 + (a_2 - a_1)\alpha}{b_3 - (b_3 - b_2)\alpha}, \frac{a_3 - (a_3 - a_2)\alpha}{b_1 + (b_2 - b_1)\alpha} \right]$$

Si se toma la aproximación siguiente:

$$15.46 \quad \underline{A} (:) \underline{B} = (a_1, a_2, a_3) (:) (b_1, b_2, b_3) \approx \left(\frac{a_1}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_1} \right)$$

será, para el α -corte:

$$15.47 \quad (\underline{A} (:) \underline{B})_\alpha = \left[\frac{a_1}{b_3} + \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_3} \right) \alpha, \frac{a_3}{b_1} - \left(\frac{a_3}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} \right) \alpha \right]$$

Si se toma (15.47) en lugar de (15.45) nos podemos preguntar cuál es la desviación máxima con relación a α . Para proceder a una respuesta se

va a calcular la desviación a la izquierda de (15.45) en relación a (15.47) y después la desviación a la derecha.

Así se obtiene:

$$15.48 \quad \mathbb{E}_{y\alpha} = \frac{a_1 + (a_2 - a_1)\alpha}{b_3 - (b_3 - b_2)\alpha} - \frac{a_1}{b_3} - \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_3} \right) \alpha$$

La derivada de $\mathbb{E}_{y\alpha}$ es:

$$\begin{aligned} \frac{d \mathbb{E}_{y\alpha}}{d \alpha} &= \frac{(a_2 - a_1)(b_3 - (b_3 - b_2)\alpha) + (a_1 + (a_2 - a_1)\alpha)(b_3 - b_2)}{(b_3 - (b_3 - b_2)\alpha)^2} - \\ &- \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_3} \right) = \end{aligned}$$

15.49

$$= (a_2 b_3 - a_1 b_2) \left(\frac{1}{(b_3 - (b_3 - b_2)\alpha)^2} - \frac{1}{b_2 b_3} \right)$$

Esta derivada se anula para:

$$15.50 \quad 1) \quad a_2 b_3 = a_1 b_2 \text{ es decir } \frac{a_1}{b_3} = \frac{a_2}{b_2}$$

en este caso, es nula para todos los valores de α y la aproximación es perfecta.

15.51 2) cuando $a_2 b_3 \neq a_1 b_2$ será necesario que:

$$15.52 \quad \frac{1}{(b_3 - (b_3 - b_2)\alpha)^2} = \frac{1}{b_2 b_3}$$

es decir:

$$15.53 \quad \alpha = \frac{b_3 - \sqrt{b_2 b_3}}{b_3 - b_2}$$

Si se sustituye (15.53) en (15.48) se obtiene la desviación máxima a la izquierda.

Pasemos a la desviación a la derecha

$$15.54 \quad \mathcal{E}_d \alpha = \frac{a_3 - (a_3 - a_2)\alpha}{b_1 + (b_2 - b_1)\alpha} - \frac{a_3}{b_1} + \left(\frac{a_3}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} \right) \alpha$$

Se toma la derivada, que se anula para:

$$15.55 \quad 1) a_2 \cdot b_1 = a_3 \cdot b_2 \text{ es decir: } \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_1}$$

en este caso la aproximación es perfecta.

15.56 2) si: $a_2 \cdot b_1 \neq a_3 \cdot b_2$ será necesario que:

$$15.57 \quad \frac{1}{(b_1 + (b_2 - b_1)\alpha)^2} = \frac{1}{b_1 \cdot b_2}$$

De donde resulta que:

$$15.58 \quad \alpha = \frac{\sqrt{b_1 \cdot b_2} - b_1}{b_2 - b_1}$$

Si se sustituye (15.58) en (15.54) se obtiene la desviación máxima a la derecha.

Si $\mathcal{E}_y^*$ es la desviación máxima a la izquierda y $\mathcal{E}_d^*$ la de la derecha, se puede escribir:

$$15.59 \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}_y^* + \mathcal{E}_d^*$$

y decidir si la aproximación es aceptable.

Veamos un ejemplo:

$$15.60 \quad \underline{A} = (3, 7, 8) \quad , \quad \underline{B} = (11, 14, 18)$$

15.61

Si se toma la aproximación:

$$15.62 \quad \underline{A} (:) \underline{B} = (3/18, 7/14, 8/11) \\ = (0.166, 0.500, 0.727)$$

La maximización del error a la izquierda viene dado por:

$$15.63 \quad \alpha = \frac{18 - \sqrt{14 \cdot 18}}{18 - 14} = 0.531$$

La desviación a la izquierda es:

$$15.64 \quad \mathcal{E}_y \alpha = \frac{3 + 4 \alpha}{18 - 4 \alpha} - \frac{3}{18} - \left(\frac{7}{14} - \frac{3}{18} \right) \alpha$$

Se sustituye (15.63) en (15.64) y se obtiene:

$$15.65 \quad \mathcal{E}_y^* = \frac{3 + 4 \times 0.531}{18 - 4 \times 0.531} - 0.166 - (0.5 - 0.166) \cdot 0.531 = \\ = -0.021$$

Resulta relativamente pequeña la desviación al compararla con 0.166 y con 0.500.

El máximo error a la derecha viene dado por:

$$15.66 \quad \alpha = \frac{\sqrt{11 \cdot 14} - 11}{14 - 11} = 0.469$$

La desviación a la derecha es:

$$15.67 \quad \mathcal{E}_d^* = \frac{8 - 0.469}{11 + 3 \times 0.469} - \frac{8}{11} + \left(\frac{8}{11} - \frac{7}{14} \right) 0.469 = -0.015$$

Como se puede observar, la desviación a la derecha es suficientemente pequeña en relación a 0.500 y 0.727 y puede, por tanto, ser aceptada. Se puede en este caso utilizar la aproximación.

En ciertos supuestos, no es posible considerar esta aproximación, por lo que resulta conveniente calcular, cada vez, las desviaciones máximas.

Si se parte de los datos (15.60) y (15.61) y se realizan de nuevo los cálculos ahora para los α -cortes se tiene:

15.68

	A_{α}	B_{α}	$A_{\alpha}(\cdot) B_{\alpha}$	$(A(\cdot) B)_{\alpha}$
	$[3 + 4\alpha, 8 - \alpha]$	$[11 + 3\alpha, 18 - 4\alpha]$	$\left[\frac{3 + 4\alpha}{18 - 4\alpha}, \frac{8 - \alpha}{11 + 3\alpha} \right]$	$[0.166 + 0.334\alpha, 0.727 - 0.227\alpha]$
0	[3, 8]	[11, 18]	[0.166, 0.727]	[0.166, 0.727]
.1	[3.4, 7.9]	[11.3, 17.6]	[0.193, 0.699]	[0.199, 0.705]
.2	[3.8, 7.8]	[11.6, 17.2]	[0.220, 0.672]	[0.232, 0.681]
.3	[4.2, 7.7]	[11.9, 16.8]	[0.250, 0.647]	[0.266, 0.658]
.4	[4.6, 7.6]	[12.2, 16.4]	[0.280, 0.622]	[0.299, 0.636]
.5	[5, 7.5]	[12.5, 16]	[0.312, 0.600]	[0.333, 0.613]
.6	[5.4, 7.4]	[12.8, 15.6]	[0.346, 0.578]	[0.366, 0.590]
.7	[5.8, 7.3]	[13.1, 15.2]	[0.381, 0.557]	[0.399, 0.568]
.8	[6.2, 7.2]	[13.4, 14.8]	[0.418, 0.537]	[0.433, 0.545]
.9	[6.6, 7.1]	[13.7, 14.4]	[0.458, 0.518]	[0.466, 0.522]
1	7	14	0.500	0.500

Las desviaciones a izquierda y derecha obtenidas por los α -cortes son:

15.69

	$\xi_{y\alpha}$	$\xi_{d\alpha}$
0	0	0
.1	-0.006	-0.006
.2	-0.012	-0.009
.3	-0.016	-0.011
.4	-0.019	-0.014

.5	-0.021	-0.013
.6	-0.020	-0.012
.7	-0.018	-0.011
.8	-0.015	-0.008
.9	-0.008	-0.004
1	0	0

Se puede observar que las desviaciones son siempre del mismo signo, en este caso negativo, ya que se ha tomado $(A_\alpha (:) B_\alpha) (-) (\underline{A} (:) \underline{B})_\alpha$.

En los supuestos más habituales, se puede aceptar, pues, esta aproximación cuando los N.B.T. no se hallan demasiado desplegados.

Supongamos que se tengan que comparar cuatro cocientes borrosos. Si los datos son N.B.T. se les separará con sus números asociados significativos:

$$\underline{N}_1 = (5, 8, 9) \quad \underline{D}_1 = (5, 13, 15), \underline{Q}_1 = (0.333, 0.615, 1.800), \bar{Q}_1 = 0.840$$

$$\underline{N}_2 = (5, 9, 13), \underline{D}_2 = (6, 11, 12), \underline{Q}_2 = (0.416, 0.818, 2.166), \bar{Q}_2 = 1.054$$

$$\underline{N}_3 = (2, 11, 12), \underline{D}_3 = (7, 8, 9) \quad \underline{Q}_3 = (0.222, 1.375, 1.714), \bar{Q}_3 = 1.171$$

$$\underline{N}_4 = (4, 7, 7), \underline{D}_4 = (9, 9, 10), \underline{Q}_4 = (0.400, 0.777, 0.777), \bar{Q}_4 = 0.682$$

De donde se deduce que:

$$\underline{Q}_4 \preceq \underline{Q}_1 \preceq \underline{Q}_2 \preceq \underline{Q}_3$$

lo que permite clasificar y tomar decisiones.

El método de Saaty-Dinh para la determinación de las funciones de pertenencia

MATRICES RECIPROCAS Y COHERENTES

Aunque este capítulo podría haberse incluido en la primera parte de esta obra, dado que constituye una técnica ligada a los estudios económicos hemos preferido colocarlo junto con los esquemas operativos de gestión.

El problema de asignar los valores que la función de pertenencia toma para cada elemento del subconjunto borroso ha sido objeto de numerosos trabajos. No resulta fácil y es susceptible de discusión la valuación de sensaciones o intenciones. Es por ello que se han imaginado procesos diversos para conseguirlo. Nos proponemos explicar un método que se debe a los trabajos realizados por T. L. SAATY (1) por una parte y por X. B. DINH (2) por otra, basados en la utilización de matrices cuadradas con términos simétricos invertidos.

Los dos métodos son, de hecho, muy semejantes. El primero fue presentado en 1978 por SAATY, y el segundo, con una gran cantidad de desarrollos, en 1984 por DINH.

Consideremos un referencial finito:

$$16.1 \quad E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

- (1) SAATY, T.L.: "Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, Vol. I - N.º 1, pág. 57-68.
 (2) DINH XUÂN BÃ: "A method for estimating the membership function of a fuzzy set", *Revue Busefal*, L.S.I. Univer, Paul Sabatier, Toulouse 1984, N.º 19, Pags. 68-82.

y un subconjunto borroso de este referencial:

$$16.2 \quad \widetilde{W} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \hline \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & \mu_n \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_i(x_i) \in [0, 1]$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ahora, a partir de $\widetilde{W}$ construyamos una matriz llamada "recíproca". Recordemos que una matriz recíproca es aquella que:

$$16.3 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} :$$

$$m_{ii} = 1$$

$$16.4 \quad m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}$$

$$16.5 \quad m_{ij} \in R_0^+$$

Recordemos también que una matriz de R_0^+ será "consistente" o "coherente" si:

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\} :$$

$$16.6 \quad m_{ij} \cdot m_{jk} = m_{ik}$$

Con la ayuda del subconjunto borroso $\widetilde{W}$ construyamos la siguiente matriz:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} :$$

$$16.7 \quad f_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_j}$$

$$16.8 \quad [f_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_1}{\mu_2} & \frac{\mu_1}{\mu_3} & \dots & \frac{\mu_1}{\mu_n} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} & 1 & \frac{\mu_2}{\mu_3} & \dots & \frac{\mu_2}{\mu_n} \\ \frac{\mu_3}{\mu_1} & \frac{\mu_3}{\mu_2} & 1 & \dots & \frac{\mu_3}{\mu_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu_n}{\mu_1} & \frac{\mu_n}{\mu_2} & \frac{\mu_n}{\mu_3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz de R_0^+ tal como la $[f_{ij}]$ es recíproca por construcción y también coherente, ya que:

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$16.9 \quad \frac{\mu_i}{\mu_j} \cdot \frac{\mu_j}{\mu_k} = \frac{\mu_i}{\mu_k}$$

Una matriz de R_0^+ recíproca y coherente posee una propiedad que aunque trivial resulta muy interesante.

Designemos por $[\mu_i]$ la matriz correspondiente a $\tilde{W}$ y por $[\mu_i]^T$ su traspuesta. Se puede escribir:

$$16.10 \quad [f_{ij}] \cdot [\mu_i]^T = n [\mu_i]^T$$

ya que:

$$16.11 \quad \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot \mu_j = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_i}{\mu_j} \cdot \mu_j = n \cdot \mu_i$$

Veamos un ejemplo:

$$16.12 \quad E = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$$16.13 \quad \tilde{W} = \begin{array}{c|c|c|c} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline & .3 & .1 & 1 & .8 \end{array}$$

de donde:

$$16.14 \quad [f_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3/10 & 3/8 \\ 1/3 & 1 & 1/10 & 1/8 \\ 10/3 & 10 & 1 & 10/8 \\ 8/3 & 8 & 8/10 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es recíproca y coherente por construcción. Se tiene:

$$16.15 \quad [f_{ij}] \cdot [\mu_i]^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3/10 & 3/8 \\ 1/3 & 1 & 1/10 & 1/8 \\ 10/3 & 10 & 1 & 10/8 \\ 8/3 & 8 & 8/10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} .3 \\ .1 \\ 1 \\ .8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ .4 \\ 4 \\ 3.2 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} .3 \\ .1 \\ 1 \\ .8 \end{bmatrix}$$

Una matriz como la $[f_{ij}]$ tiene también otra propiedad importante: todas sus filas (respectivamente también sus columnas) son proporcionales a la primera fila (respectivamente a la primera columna) es decir: toda fila (respectivamente toda columna) es igual a cualquier otra fila (respectivamente otra columna) multiplicada por un coeficiente. En efecto:

Tomemos una fila i y una columna k de (16.8). Se puede escribir:

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}:$$

$$16.16 \quad \frac{f_{ij}}{f_{kj}} = \frac{\mu_i / \mu_j}{\mu_k / \mu_j} = \frac{\mu_i}{\mu_k}$$

$$16.17 \quad \frac{f_{ij'}}{f_{kj'}} = \frac{\mu_i / \mu_{j'}}{\mu_k / \mu_{j'}} = \frac{\mu_i}{\mu_k}$$

y, por tanto:

$$16.18 \quad \frac{f_{ij}}{f_{kj}} = \frac{f_{ij'}}{f_{kj'}} \quad \forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

La misma demostración es válida para las columnas. Así, en el ejemplo (16.14), para las filas:

$$16.19 \quad [1/3 \quad 1 \quad 1/10 \quad 1/8] = 1/3 [1 \quad 3 \quad 3/10 \quad 3/8]$$

$$16.20 \quad [10/3 \quad 10 \quad 1 \quad 10/8] = 10/3 [1 \quad 3 \quad 3/10 \quad 3/8]$$

$$16.21 \quad [8/3 \quad 8 \quad 8/10 \quad 1] = 8/3 [1 \quad 3 \quad 3/10 \quad 3/8]$$

y para las columnas:

$$16.22 \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3/10 \\ 1/10 \end{bmatrix} = 3/10 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 10/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} = 3/8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

$$16.23 \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 10/3 \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 8/10 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10/8 \\ 1 \end{bmatrix} = 10/8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

$$16.24 \quad \begin{bmatrix} 8 \\ 8/3 \end{bmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8/10 \\ 1 \end{bmatrix} = 8/10 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8/3 \\ 1 \end{bmatrix} = 8/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

CORRESPONDENCIA ENTRE UN SUBCONJUNTO BORROSO Y UNA MATRIZ

En el cálculo matricial se demuestra que una matriz como la (16.8) es decir, recíproca y coherente es de rango 1, ya que posee un único valor propio que es igual a n ; los $n-1$ valores propios restantes son iguales a 0. Expresado de otra manera:

$$16.25 \quad [f_{ij}] \cdot [\mu_i]^T = n [\mu_i]^T$$

como ha sido señalado anteriormente. Cuando se obtienen los demás valores propios, resultan iguales a 0. Dada la ecuación:

$$16.26 \quad |([f_{ij}] - \lambda [1]) \cdot [\mu_i]^T| = 0 \quad (1)$$

se puede observar que sólo posee una única solución en λ que es $\lambda = n$. Se sabe, además por un conocido teorema del cálculo matricial que, si los valores propios de una matriz $[a_{ij}]$ se designan por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (sean o no distintos) se tiene:

$$16.27 \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}[a_{ij}]$$

en donde $\text{tr}[a_{ij}]$ es la traza de $[a_{ij}]$, es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal. Y, ya que aquí, por construcción $\text{tr}[a_{ij}] = n$, si un valor es igual a n , los otros son iguales a 0.

De esta manera, a todo subconjunto borroso $\tilde{W}$, se le puede hacer corresponder una y sólo una matriz recíproca y coherente y recíprocamente. Resulta sencillo construir una matriz recíproca, sin embargo no será forzosamente coherente y una primera constatación consistirá en calcular la desviación de su valor propio dominante con n .

Si una matriz es recíproca y coherente, para obtener el subconjunto correspondiente, basta con aplicar la fórmula:

$$16.28 \quad \mu_i = \frac{f_{ij}}{\text{MAX}_i f_{ij}}$$

Así, considerando (16.14) para obtener (16.13):

$$\begin{aligned}
 \mu_{\tilde{w}}(A_1) &= \frac{1}{10/3} = \frac{3}{10} = \frac{3/10}{1} = \frac{3/8}{10/8} = 0.3 \\
 \mu_{\tilde{w}}(A_2) &= \frac{1/3}{10/3} = \frac{1}{10} = \frac{1/10}{1} = \frac{1/8}{10/8} = 0.1 \\
 16.29 \quad \mu_{\tilde{w}}(A_3) &= \frac{10/3}{10/3} = \frac{10}{10} = \frac{1}{1} = \frac{10/8}{10/8} = 1 \\
 \mu_{\tilde{w}}(A_4) &= \frac{8/3}{10/3} = \frac{8}{10} = \frac{8/10}{1} = \frac{1}{10/8} = 0.8
 \end{aligned}$$

(1) Las dos barras verticales indican que se trata de un determinante.

Vamos a examinar ahora el caso de matrices recíprocas coherentes o no coherentes y ver cómo se utilizan en los problemas de selección.

Recordemos primero algunas propiedades de las matrices llamadas "positivas" es decir, aquellas matrices para las que todos los elementos, sin excepción, son positivos, es decir, que pertenecen a R_0^+ :

- 1) Una matriz cuadrada positiva posee un valor propio real positivo cuyo módulo es mayor que el módulo de todos los otros que pueden ser reales o complejos. Este valor propio λ_1 real positivo dominante es único (Teorema de Perron-Frobenius) y $\lambda_1 \geq n$ en donde n es el orden de la matriz cuadrada.
- 2) El vector propio que corresponde a este valor propio dominante λ_1 se halla formado también por términos positivos y cuando está normalizado, es único.

Sea pues una matriz cuadrada positiva recíproca de orden n y λ_1 su valor propio positivo dominante. Si λ_1 está próximo a n , se puede admitir que la matriz es casi coherente, si λ_1 está muy alejada de n , se deberán reajustar los elementos de la matriz. Así, la diferencia $\lambda_1 - n$ y aún mejor la relación $\frac{\lambda_1 - n}{n}$ es un indicador de coherencia.

Si la matriz recíproca es coherente, se tiene:

$$16.30 \quad [f_{ij}] \cdot [\mu_i]^T = n [\mu_i]^T$$

en donde $[\mu_i]^T$ proporciona un subconjunto borroso que dará lugar a su vez a $[f_{ij}]$ como se ha señalado anteriormente.

Si la matriz recíproca no es coherente, se tendrá:

$$16.31 \quad [f_{ij}] \cdot [\mu'_i]^T = \lambda_1 [\mu'_i]^T$$

y se aceptará $[\mu'_i]$ como subconjunto borroso que corresponde a $[f_{ij}]$ si $\frac{\lambda_1 - n}{n}$ es suficientemente pequeño. Se normalizará $[\mu'_i]$ en el sentido que se da a esta palabra en la teoría de los subconjuntos borrosos.

$$16.32 \quad \mu''_i = \frac{\mu'_i}{\max_i \mu'_i}$$

o bien, si se prefiere obtener una ponderación, se normalizará como se hace en el cálculo de probabilidades:

$$16.33 \quad \mu_i''' = \frac{\mu_i'}{\sum_{i=1}^n \mu_i'}$$

OBTENCION DEL VALOR PROPIO DOMINANTE Y VECTOR PROPIO CORRESPONDIENTE

Para obtener el valor propio dominante y el vector propio correspondiente $[\mu_i']$, se pueden utilizar una gran variedad de procedimientos pero uno de los más simples y conocidos es el que presentamos con un ejemplo y que es válido para toda matriz positiva.

$$16.34 \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es recíproca pero no coherente. En efecto:

$$16.35 \quad 8 \times 0.25 = 2 \neq 0.5$$

Vamos a calcular seguidamente el valor propio y el vector propio correspondiente de $[A]$. Se comienza por multiplicar $[A]$ por el vector formado de 1.

$$16.36 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$16.37 \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 \\ 1.375 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= 9.5 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.144736 \\ 0.736842 \end{bmatrix}$$

Se ha normalizado el segundo miembro y se continúa con el vector del segundo miembro.

$$16.38 \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.144736 \\ 0.736842 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.526309 \\ 0.453946 \\ 3.315786 \end{bmatrix}$$

$$= 3.315786 \times \begin{bmatrix} 0.761903 \\ 0.136904 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16.39 \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.761903 \\ 0.136904 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.357135 \\ 0.482141 \\ 3.071422 \end{bmatrix}$$

$$= 3.071422 \times \begin{bmatrix} 0.767440 \\ 0.156976 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16.40 \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.767440 \\ 0.156976 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.523248 \\ 0.502906 \\ 3.162784 \end{bmatrix}$$

$$= 3.162784 \times \begin{bmatrix} 0.797793 \\ 0.159007 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16.41 \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.797793 \\ 0.159007 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.569849 \\ 0.508731 \\ 3.231614 \end{bmatrix}$$

$$= 3.231614 \times \begin{bmatrix} 0.795221 \\ 0.157423 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16.42 \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.795221 \\ 0.157423 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.554605 \\ 0.506825 \\ 3.220134 \end{bmatrix}$$

$$= 3.220134 \times \begin{bmatrix} 0.793322 \\ 0.157392 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16.43 \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.793322 \\ 0.157392 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.552458 \\ 0.506557 \\ 3.216212 \end{bmatrix}$$

$$= 3.216212 \times \begin{bmatrix} 0.793622 \\ 0.157501 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16.44 \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0.5 \\ 0.125 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.793622 \\ 0.157501 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.553630 \\ 0.506703 \\ 3.217248 \end{bmatrix}$$

$$= 3.217248 \times \begin{bmatrix} 0.793731 \\ 0.157495 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nos detenemos aquí y se toma:

$$16.45 \quad \lambda_1 = 3.217 \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0.793 \\ 0.157 \\ 1 \end{bmatrix}$$

16.46

De donde se obtiene el subconjunto borroso:

$$16.47 \quad \underline{A} = \begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 0.793 & 0.157 & 1 \end{array}$$

Con la ponderación:

$$16.48 \quad k = \begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 0.406 & 0.080 & 0.512 \end{array}$$

La relación:

$$16.49 \quad \frac{\lambda_1 - n}{n} = \frac{3.217 - 3}{3} = 0.072$$

es suficientemente pequeña por lo que se puede aceptar (16.47) y (16.48).

De esta manera:

$$16.50 \quad A_3 \supseteq A_1 \supseteq A_2$$

Veamos otro ejemplo, cuyos cálculos se han realizado siguiendo el mismo procedimiento.

$$16.51 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 2.5 & 1.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Tiene como valor propio dominante y por vector propio correspondiente:

$$16.52 \quad \lambda_1 = 3.618 \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0.861 \\ 0.371 \\ 1 \end{bmatrix}$$

16.53

lo que proporciona:

$$16.54 \quad \frac{\lambda_1 - n}{n} = \frac{3.618 - 3}{3} = 0.206$$

la desviación parece demasiado grande para dejar de revisar las relaciones introducidas en la matriz (16.51). Es posible, por ejemplo, establecer un umbral del 10 % a partir del cual es aconsejable revisar las relaciones para conseguir una mayor consistencia. Así, una revisión de (16.51) consistente en sustituir 5 por 3 y 0.2 por 0.3333, es decir:

$$16.55 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0.4 \\ 0.3333 & 1 & 0.8 \\ 2.5 & 1.25 & 1 \end{bmatrix}$$

proporciona:

$$16.56 \quad \lambda_1 = 3.367 \quad y \quad \begin{bmatrix} 0.726 \\ 0.440 \\ 1 \end{bmatrix}$$

16.57

de donde:

$$16.58 \quad \frac{\lambda_1 - n}{n} = \frac{3.367 - 3}{3} = 0.122$$

este tipo parece aceptable ya que resulta próximo al 0.10 establecido.

Hay que señalar que se puede reducir este tipo intentando disminuir las desviaciones parciales de no coherencia, pero reduciendo una desviación se puede aumentar otra (como puede observarse en (16.39)). Si la matriz es de orden elevado, se impone la utilización de un ordenador. Un método consiste en disminuir una desviación de coherencia y verificar que con ello no hace aumentar las otras; en este caso, se puede disminuir la relación

$$\frac{\lambda_1 - n}{n}$$

Pero aquel o aquellos que construyan la matriz razonando para cada comparación estimando que A_i vale k veces A_j (de ahí que k para A_i y $1/k$ para A_j) dominan la situación. Es posible que no se consiga dominar la coherencia. El hecho de que A_i valga k_1 veces A_j y A_j valga k_2 veces A_k , no siempre implica que A_i valga $k_1 \cdot k_2$ veces A_k . Esta especie de transitividad se halla frecuentemente ausente de las estimaciones lo que no resulta extraño ya que los juicios, en muchos casos, no son más transitivos que los que surgen en una relación de semejanza.

Cuando se ha obtenido el vector propio correspondiente a λ_1 , resulta interesante buscar la matriz recíproca y coherente que le corresponde, aunque sólo sea para comparar la matriz dada con ésta. Así, obtengamos la matriz recíproca y coherente a partir de (16.53). Resulta, utilizando (16.7):

$$16.59 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2.320 & 0.861 \\ 0.430 & 1 & 0.371 \\ 1.161 & 2.695 & 1 \end{bmatrix}$$

y para (16.57):

$$16.60 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1.650 & 0.726 \\ 0.606 & 1 & 0.440 \\ 1.377 & 2.272 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que demuestra que, aun en el supuesto de tipos $\frac{\lambda_1 - n}{n}$ relativamente bajos, las matrices dadas en (16.53) y en (16.57) se hallan lejos de estas matrices respectivas (16.59) y (16.60) las cuales son coherentes.

Sin embargo, en muchos casos es más fácil afirmar que A_i se prefiere k veces a A_j que dar los niveles correspondientes y a priori al subconjunto considerado; todo depende de la naturaleza del problema.

EL SUPUESTO DE LA SELECCION DE UNA ESCUELA PARA EL INGRESO EN LA UNIVERSIDAD

Vamos a presentar un ejemplo proporcionado por SAATY que pone de manifiesto la utilidad de este método.

Se trata de la selección de una escuela preparatoria para el ingreso en la Universidad. Se consideran 6 criterios:

- 1) Calidad de los estudios.
- 2) Sentido de la amistad.
- 3) Calidad de vida en la escuela.
- 4) Impulso a las vocaciones.
- 5) Preparación para la Universidad.
- 6) Calidad de las clases de música.

En su artículo SAATY establece primero una matriz recíproca para estos 6 criterios: (1) vale 4 veces (2), (1) vale 3 veces (3), (1) es equivalente a (4), (1) vale 3 veces (5), (1) vale 4 veces (6), etc., como se indica en la matriz siguiente:

16.61

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	1	4	3	1	3	4
(2)	$\frac{1}{4}$	1	7	3	$\frac{1}{5}$	1
(3)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(4)	1	$\frac{1}{3}$	5	1	1	3
(5)	$\frac{1}{3}$	5	6	1	1	3
(6)	$\frac{1}{4}$	1	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Esta matriz tiene como valor propio dominante y vector propio correspondiente (normalizado en suma igual a 1):

16.62

16.63

$\lambda_1 = 7.49$	y	(1)	.32
		(2)	.14
		(3)	.03
		(4)	.13
		(5)	.24
		(6)	.14

por lo que:

$$16.64 \quad \frac{\lambda_1 - 6}{6} = \frac{7.49 - 6}{6} = 0.248 \quad (1)$$

Se supone ahora que existen 3 escuelas A, B, C para realizar la comparación y que, para cada criterio, se ha establecido una matriz recíproca y sus dos características: el valor propio λ_1 y el vector propio.

16.65

	A	B	C
A	1	1/3	1/2
B	3	1	3
C	2	1/3	1

CRITERIO (1) $\rightarrow \lambda_1 = 3.05$

A	.16
B	.59
C	.25

16.68

	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	1	1	1

CRITERIO (2) $\rightarrow \lambda_1 = 3$

A	.33
B	.33
C	.33

16.71

	A	B	C
A	1	5	1
B	1/5	1	1/5
C	1	5	1

CRITERIO (3) $\rightarrow \lambda_1 = 3$

A	.45
B	.09
C	.45

16.74

	A	B	C
A	1	9	7
B	1/9	1	1/5
C	1/7	5	1

CRITERIO (4) $\rightarrow \lambda_1 = 3.21$

A	.77
B	.05
C	.17

16.77

	A	B	C
A	1	1/2	1
B	2	1	2
C	1	1/2	1

CRITERIO (5) $\rightarrow \lambda_1 = 3$

A	.25
B	.50
C	.25

(1) Se ha aceptado este tipo pero se indica que sería conveniente su revisión (16.61).

16.80

16.81

16.82

		A	B	C				
A		1	6	4	CRITERIO (6) →	$\lambda_1 = 3.05$	A	.69
B		1/6	1	1/3			B	.09
C		1/4	3	1			C	.22

Reagrupando los 6 vectores propios (16.67, 70, 73, 76, 79 y 82) y multiplicando a la derecha por (16.58) considerado como una ponderación, resulta:

16.83

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
A	.16	.33	.45	.77	.25	.69
B	.59	.33	.09	.05	.50	.09
C	.25	.33	.45	.17	.25	.22

•

(1)	.32
(2)	.14
(3)	.03
(4)	.13
(5)	.24
(6)	.14

=

A	.37
B	.38
C	.25

Se puede observar que A y B son quasi-equivalentes y dominan a C. El resultado obtenido puede ser expresado como un subconjunto borroso normal:

	A	B	C
16.84	.97	1	.65

Este método puede ser utilizado en muchos problemas de selección: trabajo, vivienda, estética, elección política, busca de empleo, etc.

Método de clanes y subconjuntos aleatorios borrosos

CLANES, FAMILIAS Y ATOMOS

El método de los clanes surge en los inicios de los años 70 para el tratamiento formal de ficheros ligados a problemas económicos y sociales (1). En primer lugar, vamos a recordar algunos elementos fundamentales de estos esquemas señalando su importancia en el tratamiento formal, para después realizar una extensión basada en los subconjuntos aleatorios borrosos.

Se define un clan de la manera siguiente. En el supuesto de que K sea un conjunto finito, será un clan si y solamente si:

$$17.1 \quad 1) E \in K$$

$$17.2 \quad 2) (A \in K) \Rightarrow (\bar{A} \in K)$$

$$17.3 \quad 3) (A_1, A_2, \dots, A_m \in K) \Rightarrow (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \in K$$

A partir de estas tres propiedades, se deduce fácilmente que:

$$17.4 \quad 4) \phi \in K$$

$$17.5 \quad 5) (A_1, A_2, \dots, A_m \in K) \Rightarrow (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) \in K$$

- (1) COURTILLOT, M.: "Structure canonique des fichiers". A.I.E.R. - A.F.C.E.T. Vol. 7. Enero 1973. pág. 2-15.
WANG, E. y CHANG, T.C.: "Canonical structures in attribute based on file organization", C.A.C.M., Septiembre 1981.

De esta manera puede decirse que un clan es un álgebra de Boole sobre partes de E ; es decir que la configuración de un clan es la de un retículo de Boole.

La figura 17.1 pone de manifiesto un clan en el retículo de Boole $E = \{a, b, c, d\}$ y la figura 17.2 pone en evidencia que este clan es un subretículo de Boole de E . Todo subretículo de Boole que comprende E y $\emptyset$ es un clan.

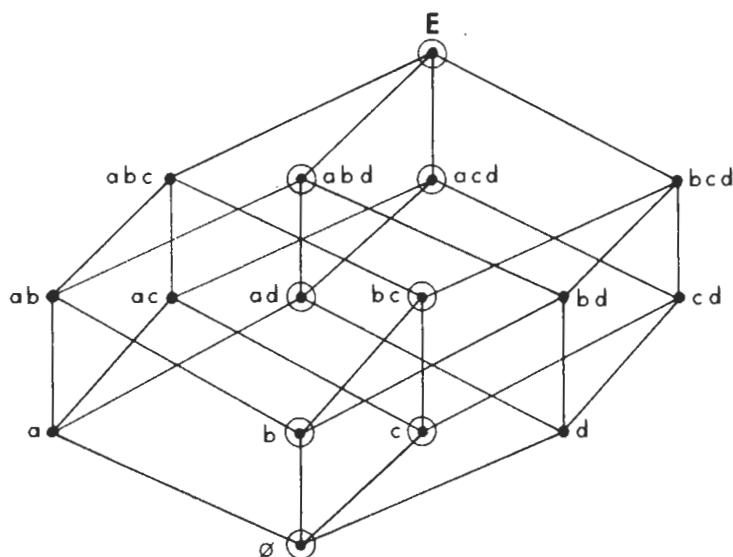


FIGURA 17.1

Se puede engendrar un clan a través de una familia:

$$17.6 \quad F = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$$

en donde:

$$17.7 \quad A_i \in P(E) \quad , \quad A_i \neq \emptyset \quad , \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Se engendra un clan a partir de F tomando para todas las A_i de F los minitérminos:

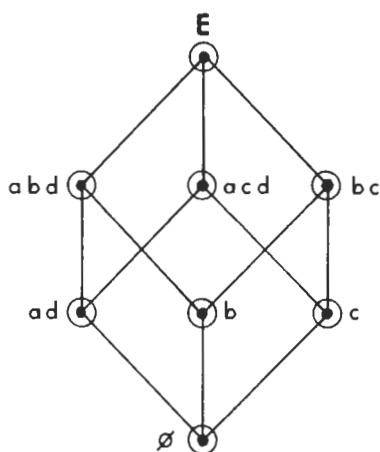


FIGURA 17.2

17.8 $A_1^* \cap A_2^* \cap \dots \cap A_r^*$ en donde $A_i^* = A_i$ o bien $\bar{A}_i$

Se dirá entonces que el clan ha sido engendrado por la familia F . Estos minitérminos se llaman “átomos”. Se toman estos átomos y sus uniones de todas las maneras posibles, se les añade $\emptyset$ y se obtiene así el clan engendrado por F .

Veamos un ejemplo:

17.9 $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

17.10 $F = \{\{a, c, d, e, f\}, \{b, c, d, g\}\}$

Se obtiene haciendo:

17.11 $A_1 = \{a, c, d, e, f\}$

17.12 $A_2 = \{b, c, d, g\}$

17.13 $A_1 \cap A_2 = \{c, d\}$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \{a, e, f\}$

$$, \bar{A}_1 \cap A_2 = \{b, g\}, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$$

Estos son los minitérminos obtenidos a partir de F. El clan engendrado por F es, pues:

$$17.14 \quad K(F) = \left\{ \emptyset, \{c, d\}, \{a, e, f\}, \{b, g\}, \{a, c, d, e, f\}, \right. \\ \left. \{b, c, d, g\}, \{a, b, e, f, g\}, E \right\}$$

El clan engendrado queda representado en la figura 17.3. Los minitérminos no vacíos se han señalado con $\square$.

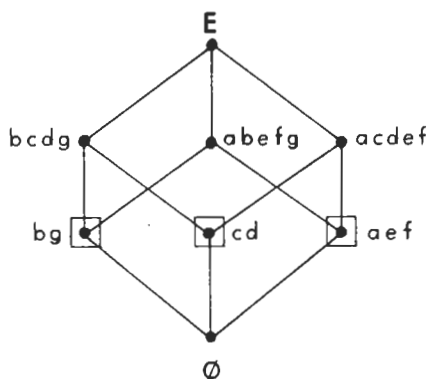


FIGURA 17.3

Otro ejemplo viene dado por las figuras 17.1 y 17.2. Tomemos la familia:

$$17.15 \quad F = \left\{ \begin{array}{cc} \{a, b, d\} & \{a, c, d\} \\ A_1 & A_2 \end{array} \right\}$$

$$17.16 \quad A_1 \cap A_2 = \{a, d\}, A_1 \cap \bar{A}_2 = \{b\}, \bar{A}_1 \cap A_2 = \{c\} \\ , \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$$

Las uniones posibles proporcionan también $\{b, c\}$ y el clan K será:

$$17.17 \quad K = \{ \emptyset, \{a, d\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}, E \}$$

Veamos un tercer ejemplo

$$17.18 \quad E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$$

$$17.19 \quad F = \{A_1, A_2, A_3\}$$

con:

$$A_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, l\}$$

$$17.20 \quad A_2 = \{c, d, e, f, g, h, l\}$$

$$A_3 = \{c, d, i, j, k, l\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{c, d, l\}, \quad A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 = \{e, f, g\}$$

$$17.21 \quad A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 = \emptyset, \quad A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \{a, b\}$$

$$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset, \quad \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 = \{h\}$$

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 = \{i, j, k\}, \quad \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \emptyset$$

Los minitérminos no vacíos proporcionan los átomos engendrados por (17.21).

TRATAMIENTO DE DATOS MEDIANTE EL METODO DE CLANES

El concepto de clan resulta muy útil para los métodos de tratamiento de datos en forma de ficheros. Un fichero es un conjunto finito de E de registros, documentos, fórmulas, programas, dossiers, informaciones, de diversa índole que intervienen en la vida social, profesional, económica y en la actualidad también familiar (microinformática y teleinformática en los hogares).

Se denomina "clave" a una propiedad P_i susceptible de ser poseída por un registro del fichero E, por lo menos. Un fichero puede estar abastecido por un conjunto de claves:

$$17.22 \quad C = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

tal que todo registro posee por lo menos una propiedad P_i .

Se designa por (E, C) el par formado por un fichero E y el conjunto de claves C .

Se designará también por:

$$17.23 \quad A_i = f(P_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a la parte

$$17.24 \quad A_i \in P(E) \text{ que posee } P_i \quad (1)$$

Señalaremos por:

$$17.25 \quad F = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\} \\ = \{f(P_{i_1}), f(P_{i_2}), \dots, f(P_{i_n})\}$$

la familia de las partes no vacías de E que poseen la propiedad P_{i_1} , la propiedad P_{i_2} , etc.

Un fichero (E, C) abastecido por el conjunto de claves C puede también ser descrito por el par (E, F) .

A partir de F , tal como se ha señalado, se puede engendrar un clan que se designará por $K(E, F)$.

Resulta evidente que existe un isomorfismo f entre:

$$17.26 \quad K((E, F), \cap, \cup, -) \text{ y } K(C, \Delta, \nabla, -)$$

en donde $\cap, \cup, -$ son operaciones booleanas en E y $\nabla, \Delta, -$ operaciones correspondientes a las propiedades P_i . Resulta pues indiferente operar sobre los conjuntos o sobre las propiedades.

Veamos un ejemplo:

$$17.27 \quad E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$$

y el conjunto de claves:

- (1) La letra P designa el conjunto de las partes, mientras que la letra indiciada P_i una propiedad. Es importante evitar cualquier confusión.

$$17.28 \quad C = \{P_1, P_2, P_3\}$$

en donde:

$$A_1 = f(P_1) = \{a, c, e, f, g, h, k, l\}$$

$$17.29 \quad A_2 = f(P_2) = \{b, c, d, e, f, l\}$$

$$A_3 = f(P_3) = \{d, h, i, j, l\}$$

De donde se deduce:

$$\bar{A}_1 = f(\bar{P}_1) = \{b, d, i, j\}$$

$$17.30 \quad \bar{A}_2 = f(\bar{P}_2) = \{a, g, h, i, j, k\}$$

$$\bar{A}_3 = f(\bar{P}_3) = \{a, b, c, e, f, g, k\}$$

y, por lo tanto:

$$f(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{l\}$$

$$f(P_1 \Delta P_2 \Delta \bar{P}_3) = A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 = \{c, e, f\}$$

$$f(P_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta P_3) = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 = \{h\}$$

$$17.31 \quad f(P_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta \bar{P}_3) = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \{a, g, k\}$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta P_2 \Delta P_3) = \bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{d\}$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta P_2 \Delta \bar{P}_3) = \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 = \{b\}$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta P_3) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 = \{i, j\}$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta \bar{P}_3) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \phi$$

Estos son los 7 átomos del fichero (17.27) que forman un conjunto C de átomos del clan

$$17.32 \quad C(F) = \{\{l\}, \{c, e, f\}, \{h\}, \{a, g, k\}, \{d\}, \{b\}, \{i, j\}\}$$

Veamos otro ejemplo:

$$17.33 \quad E = \{a, b, c, d, e\}$$

$$17.34 \quad C = \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$A_1 = f(P_1) = \{a, b\}$$

$$A_2 = f(P_2) = \{a, b, c\}$$

$$A_3 = f(P_3) = \{d, e\}$$

$$17.35 \quad \bar{A}_1 = f(\bar{P}_1) = \{c, d, e\}$$

$$\bar{A}_2 = f(\bar{P}_2) = \{d, e\}$$

$$\bar{A}_3 = f(\bar{P}_3) = \{a, b, c\}$$

de donde:

$$f(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3) = \phi$$

$$f(P_1 \Delta P_2 \Delta \bar{P}_3) = \{a, b\}$$

$$f(P_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta P_3) = \phi$$

$$17.36 \quad f(P_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta \bar{P}_3) = \phi$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta P_2 \Delta P_3) = \phi$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta P_2 \Delta \bar{P}_3) = \{c\}$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta P_3) = \{d, e\}$$

$$f(\bar{P}_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta \bar{P}_3) = \phi$$

El problema se puede plantear de una manera diferente: se parte de una clave y se halla el átomo que le corresponde.

Dada una clave:

$$17.37 \quad P = (P_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta P_3) \vee \overline{(P_1 \Delta \bar{P}_2)}$$

se puede transformar ésta en una expresión con variables booleanas:

$$17.38 \quad \begin{aligned} x &= x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \overline{x_1 \cdot \bar{x}_2} \\ &= x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 + x_2 \end{aligned}$$

La descomposición en minitérminos proporciona:

$$17.39 \quad x = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \\ + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

es decir:

$$17.40 \quad P = \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_2 P_3 \vee \bar{P}_1 P_2 \bar{P}_3 \vee \bar{P}_1 P_2 P_3 \\ \vee P_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee P_1 \bar{P}_2 P_3 \vee P_1 P_2 \bar{P}_3 \vee P_1 P_2 P_3$$

en donde se han suprimido los símbolos Δ para simplificar la escritura.

Supongamos que se tiene el fichero (17.27) y el conjunto de claves (17.28); se puede observar que corresponde a (17.38):

$$17.41 \quad A = \phi \cup \{ij\} \cup \{l\} \cup \{d\} \cup \{h\} \cup \{c, e, f\} \cup \{b\} \\ = \{b, c, d, e, f, h, i, j, l\}$$

Este ejemplo pone de manifiesto que, si se dispone 1) de un fichero descompuesto en átomos y 2) de un procedimiento que permita explicitar los átomos a partir de P, se puede obtener cualquier clave. Cuando el cardinal de F resulta elevado, será necesario utilizar el ordenador.

Antes de pasar a la generalización a través de conceptos borrosos y a la todavía más general de conceptos aleatorios borrosos, veamos un ejemplo menos abstracto.

Supongamos un fichero de 7 personas:

$$17.42 \quad E = \{ \text{Pedro, Pablo, Jaime, Juan, Roberto, Ricardo, Luis} \} \\ \quad \quad \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 3 \quad \quad 4 \quad \quad 5 \quad \quad 6 \quad \quad 7$$

y las cuatro propiedades siguientes:

$$17.43 \quad P_1 = \text{ser de nacionalidad española} \\ P_2 = \text{habitar en el barrio de Sants de Barcelona} \\ P_3 = \text{pagar impuestos} \\ P_4 = \text{ser propietario del piso en que vive}$$

Supongamos que se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(P_1) &= \{ \text{Pedro, Pablo, Roberto} \} \\
 &\quad \quad \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 5 \\
 f(P_2) &= \{ \text{Pedro, Juan, Roberto, Luis} \} \\
 &\quad \quad \quad 1 \quad \quad 4 \quad \quad 5 \quad \quad 7, \\
 17.44 \quad f(P_3) &= \{ \text{Pablo, Jaime, Ricardo, Luis} \} \\
 &\quad \quad \quad 2 \quad \quad 3 \quad \quad 6 \quad \quad 7 \\
 f(P_4) &= \{ \text{Ricardo, Luis} \} \\
 &\quad \quad \quad 6 \quad \quad 7
 \end{aligned}$$

Si simplificamos la escritura se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(P_1) &= \{1, 2, 5\} \quad , \quad f(\bar{P}_1) = \{3, 4, 6, 7\} \\
 17.45 \quad f(P_2) &= \{1, 4, 5, 7\} \quad , \quad f(\bar{P}_2) = \{2, 3, 6\} \\
 f(P_3) &= \{2, 3, 6, 7\} \quad , \quad f(\bar{P}_3) = \{1, 4, 5\} \\
 f(P_4) &= \{6, 7\} \quad , \quad f(\bar{P}_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f(1, 2, 3, 4) &= \phi \quad , \quad f(1, 2, 3, \bar{4}) = \phi \quad , \quad f(1, 2, \bar{3}, 4) = \phi \\
 f(1, 2, \bar{3}, \bar{4}) &= \{1, 5\} \quad , \quad f(1, \bar{2}, 3, 4) = \phi \quad , \quad f(1, \bar{2}, 3, \bar{4}) = \{2\} \\
 17.46 \quad f(1, \bar{2}, \bar{3}, 4) &= \phi \quad , \quad f(1, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}) = \phi \quad , \quad f(\bar{1}, 2, 3, 4) = \{7\} \\
 f(\bar{1}, 2, 3, \bar{4}) &= \phi \quad , \quad f(\bar{1}, 2, \bar{3}, 4) = \phi \quad , \quad f(\bar{1}, 2, \bar{3}, \bar{4}) = \{4\} \\
 f(\bar{1}, \bar{2}, 3, 4) &= \{6\} \quad , \quad f(\bar{1}, \bar{2}, 3, \bar{4}) = \{3\} \quad , \quad f(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 4) = \phi \\
 f(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}) &= \phi
 \end{aligned}$$

Si buscamos, por ejemplo, las personas que no son de nacionalidad española y que habitan en Sants (Barcelona) y/o no son propietarias de su piso, corresponderán a las siguientes especificaciones:

$$17.47 \quad (\bar{P}_1 \Delta P_2) \nabla \bar{P}_4$$

Se puede pasar por los átomos de (17.46) y escribir:

$$17.48 \quad f((\bar{P}_1 \Delta P_2) \nabla \bar{P}_4) = (\{3, 4, 6, 7\} \cap \{1, 4, 5, 7\}) \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ = \{4, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

Veamos, con los mismos datos cuáles son las personas 1) que no son de nacionalidad española, 2) que habitan en Sants y/o 3) que no pagan impuestos, pero que son propietarios de su piso. Se tendrá:

$$17.49 \quad (\bar{P}_1 \cap P_2) \cup (\bar{P}_3 \cap P_4)$$

Se obtiene:

$$17.50 \quad f((\bar{P}_1 \cap P_2) \cup (\bar{P}_3 \cap P_4)) = (\{3, 4, 6, 7\} \cap \{1, 4, 5, 7\}) \\ \cup (\{1, 4, 5\} \cap \{6, 7\}) \\ = \{4, 7\} \cup \emptyset = \{4, 7\}$$

Estamos ahora en disposición de pasar al ambiente borroso.

EL METODO EN AMBIENTE BORROSO

Los conceptos formales de fichero y de clave, definidos anteriormente se van a mantener a partir de ahora, pero los subconjuntos $\tilde{A}^{(i)}$ que vamos a considerar serán subconjuntos borrosos del referencial E.

Vamos a considerar un subconjunto ordinario F de subconjuntos borrosos $\tilde{A}^{(i)} \in L^E$, en donde $L = [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, r$. Dicho de otra manera, F es un subconjunto ordinario del conjunto de partes borrosas de E es decir $\tilde{P}(E)$. Se definirán estos $\tilde{A}^{(i)}$ como sigue.

Sea $x \in E$. Si x posee la propiedad P_i con el nivel μ , se escribirá:

$$17.51 \quad \mu_{\tilde{A}^{(i)}}(x) = \mu, \quad \mu \in [0, 1]$$

es decir:

$$17.52 \quad \tilde{A}^{(i)} = \tilde{f}(P_i)$$

Veamos un ejemplo simple

$$17.53 \quad E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$17.54 \quad C = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \tilde{f}(P_1) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline .3 & 1 & .5 & 0 & .8 & .2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \tilde{f}(P_2) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline .6 & 0 & .9 & 0 & .1 & .4 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$17.55$$

$$\tilde{A}^{(3)} = \tilde{f}(P_3) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline .3 & .7 & .2 & .1 & .8 & .9 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{A}^{(4)} = \tilde{f}(P_4) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline .3 & 1 & 0 & 1 & .6 & .4 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Seguidamente se define un subconjunto borroso $\tilde{P}^* \subset C$ llamado "subconjunto de umbrales".

$$17.56 \quad \mu_{\tilde{P}^*}(P_i) = \lambda_i, \quad \lambda_i \in [0, 1]$$

Vamos a concretar (17.56) a través de un nuevo ejemplo.

$$17.57 \quad E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$17.58 \quad C = \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \tilde{f}^{(1)}(P_1) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline .3 & 1 & .8 & 0 & .2 & 0 & .4 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$17.59 \quad \tilde{A}^{(2)} = \tilde{f}^{(2)}(P_2) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline .7 & 0 & .7 & .2 & .1 & .8 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{A}^{(3)} = \tilde{f}^{(3)}(P_3) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & .8 & .7 & .7 & .3 & .9 & .2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$17.60 \quad \tilde{P}^{(*)} = \begin{array}{c} P_1 \quad P_2 \quad P_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline .6 & .3 & .8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Se obtiene, para cada uno de los tres niveles 0.6, 0.3, 0.8:

$$A_{0.6}^{(1)} = f_{0.6}^{(1)}(P_1) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} = \{b, c\}$$

$$17.61 \quad A_{0.3}^{(2)} = f_{0.3}^{(2)}(P_2) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \\ \hline 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} = \{a, c, f, g\}$$

$$A_{0.8}^{(3)} = f_{0.8}^{(3)}(P_3) = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} = \{a, b, f\}$$

Supongamos que se establece la siguiente clave:

$$17.62 \quad P = (P_1 \Delta P_2) \nabla (\bar{P}_1 \Delta \bar{P}_3)$$

le corresponderá:

$$\begin{aligned} 17.63 \quad f(P) &= f((P_1 \Delta P_2) \nabla (\bar{P}_1 \Delta \bar{P}_3)) \\ &= (A_{0.6}^{(1)} \cap A_{0.3}^{(2)}) \cup (\bar{A}_{0.6}^{(1)} \cap \bar{A}_{0.8}^{(3)}) \\ &= (\{b, c\} \cap \{a, c, f, g\}) \cup (\{a, d, e, f, g\} \cap \{c, d, e, g\}) \\ &= \{c\} \cup \{d, e, g\} = \{c, d, e, g\} \end{aligned}$$

Resulta ahora interesante enunciar un teorema.

Si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mu_{A_{\lambda_i}}^{(i)}(x)$ permanece invariable cuando se pasa de $\underline{P}_k$ a $\underline{P}_l$, $\underline{P}_k, \underline{P}_l \in C$, entonces x no cambia de átomo.

La demostración es sencilla. La pertenencia de un elemento a un minitérmino depende de $\mu_{A_{\lambda_i}}^{(i)}(x)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y de estos n valores solamente. Si el paso de $\underline{P}_k$ a $\underline{P}_l$ no provoca variación en estos valores, x se volverá a encontrar en el minitérmino en el que se hallaba.

Tomemos el ejemplo (17.57) y (17.58). Para $\underline{P}^*$ dado por (17.60) se puede escribir:

17.64

	a	b	c	d	e	f	g
P ₁	0	1	1	0	0	0	0
P ₂	1	0	1	0	0	1	1
P ₃	1	1	0	0	0	1	0

y tomemos una $\tilde{P}^*$ distinta a la (17.60), tal como:

17.65

$$\tilde{P}^{*'} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline .3 & .2 & .3 \\ \hline \end{array}$$

Si calculamos un nuevo cuadro obtenido de la misma manera que el (17.64) utilizando ahora (17.65) se obtiene, para $\tilde{P}^{*}$:

17.66

	a	b	c	d	e	f	g	
P ₁	1	1	1	0	0	0	1	= {a,b,c,g}
P ₂	1	0	1	1	0	1	1	= {a,c,d,f,g}
P ₃	1	1	1	1	1	1	0	= {a,b,c,d,e,f}

Vamos a establecer, ahora, un cuadro en el que aparezcan los minitérminos relativos a $\tilde{P}^*$ y a $\tilde{P}^{*}$:

17.67

	123	12 $\bar{3}$	1 $\bar{2}$ 3	1 $\bar{2}\bar{3}$	$\bar{1}$ 23	$\bar{1}$ 2 $\bar{3}$	$\bar{1}\bar{2}$ 3	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$
$\tilde{P}^*$	$\emptyset$	{c}	{b}	$\emptyset$	{a,f}	{g}	$\emptyset$	{d,e}
$\tilde{P}^{*}$	{a,c}	{g}	{b}	$\emptyset$	{d,f}	$\emptyset$	{e}	$\emptyset$

Se puede observar, examinando (17.64) y (17.66) que las columnas de b y de f no varían y para los elementos b y f se vuelven a encontrar los mismos minitérminos, respectivamente $1\bar{2}3$ y $\bar{1}23$, como puede observarse en (17.67).

Los cuadros o matrices tales como los expuestos en (17.64) y (17.66) resultan muy cómodos para el razonamiento a partir de minitérminos, al poner de manifiesto cómo se forman para un $\tilde{P}^*$ dado, como puede observarse en (17.68).

Si se toma (17.59) y (17.60), se tiene:

17.68

	a	b	c	d	e	f	g	$\tilde{p}^*$
P_1	.3	1	.8	0	.2	0	.4	.6
P_2	.7	0	.7	.2	.1	.8	1	.3
P_3	1	.8	.7	.7	.3	.9	.2	.8

Para los 8 minitérminos se va a obtener:

	a	b	c	d	e	f	g
P_1		1	1				
P_2	1		1			1	1
P_3	1	1				1	

	a	b	c	d	e	f	g
P_1		1	1				
P_2	1		1			1	1
$\bar{P}_3$			1	1	1		1

	a	b	c	d	e	f	g
P_1		1	1				
$\bar{P}_2$		1		1	1		
P_3	1	1				1	

	a	b	c	d	e	f	g
P_1		1	1				
$\bar{P}_2$		1		1	1		
$\bar{P}_3$			1	1	1		1

17.69

	a	b	c	d	e	f	g
$\bar{P}_1$	1			1	1	1	1
P_2	1		1			1	1
P_3	1	1				1	

	a	b	c	d	e	f	g
$\bar{P}_1$	1			1	1	1	1
P_2	1		1			1	1
$\bar{P}_3$			1	1	1		1

	a	b	c	d	e	f	g
$\bar{P}_1$	1			1	1	1	1
$\bar{P}_2$		1		1	1		
P_3	1	1				1	

	a	b	c	d	e	f	g
$\bar{P}_1$	1			1	1	1	1
$\bar{P}_2$		1		1	1		
$\bar{P}_3$			1	1	1		1

Las relaciones borrosas tales como (17.68) se llamarán “matrices de emergencia” y las relaciones ordinarias tales como (17.69) se denominan “matrices de clanes” para los niveles de $\tilde{p}^*$. En estas matrices, las columnas idénticas proporcionan elementos que pertenecen a un mismo clan.

DIAGNOSTICO DE GESTION MEDIANTE OPINION DE EXPERTOS

Para dar un ejemplo, vamos a recordar que realizar un diagnóstico de gestión sobre una empresa, o hacer un diagnóstico de patología en medicina, significa recurrir, por procedimientos distintos, a métodos del pensamiento parecidos. Existen enfermedades en las empresas y aparecen signos más o menos visibles de estas enfermedades.

Supongamos, a título de ejemplo, el caso de 8 patologías clasificadas por expertos de la gestión $M_1, M_2, \dots, M_8$ y 4 signos S_1, S_2, S_3, S_4 . Para cada par (S_i, M_j) , $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, \dots, 8$, se define un subconjunto ordinario de pertenencia que puede tomar sus valores en referenciales diferentes; así, un segmento $[0, 1]$ para S_1 y S_3 , $\{a, b, c, d\}$ para S_2 , un subconjunto de $\{\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, 6\alpha / \alpha > 0\}$ para S_4 .

17.70

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
S_1	$[.5, .8]$	$[.9, 1]$	$[0, .3]$	$[0, .8]$	$[.1, .6]$	.9	$[.9, 1]$	.3
S_2	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{b, c, d\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{c, d\}$	$\{b, c\}$
S_3	0	.4	$[.8, 1]$	$[0, .9]$	1	0	$[.4, .8]$	$[0, 1]$
S_4	α	$\geq 2\alpha$	α	5α	$\geq 3\alpha$	$\alpha \leq \mu \leq 3\alpha$	α	6α

Supongamos ahora una empresa u organización de la que se han extraído los signos siguientes:

17.71

S_1	.4
S_2	b
S_3	.6
S_4	2α

Se construirá entonces una matriz de clanes de la manera siguiente. Si λ_{S_i} es el nivel observado en la organización y $m(S_i, M_j)$ es el subconjunto que corresponde al par (S_i, M_j) , se tomará:

$$17.72 \quad \mu_{\Omega}(S_i, M_j) = 0 \quad \text{si } \lambda_{S_i} \notin m(S_i, M_j)$$

$$= 1 \quad \text{si } \lambda_{S_i} \in m(S_i, M_j)$$

en donde se designa por Ω la matriz de clanes. En este ejemplo, se ha obtenido:

17.73

$\Omega =$		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
S_1					1	1			
S_2			1		1				1
S_3					1			1	1
S_4			1				1		

No existe patología alguna M_j que corresponda a los 4 signos, una corresponde a 3, que es M_4 , dos corresponden a 2 signos, M_2 y M_8 , etc.

Este tipo de resultados puede también ser representado tomando una intersección de conjuntos entre cada columna de (17.70) y la columna (17.71) lo que proporciona:

17.74

$\Omega =$		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
S_1					.4	.4			
S_2			b		b				b
S_3					.6			.6	.6
S_4			2α				2α		

En (17.73) los recuadros en blanco corresponden a ceros y en (17.74) a ϕ .

Al presentar así un problema de diagnóstico de una empresa en relación a una normalidad aceptada por uno o varios expertos, se reduce el problema a un reconocimiento de forma.

EL ESTUDIO A TRAVES DE RELACIONES ALEATORIAS BORROSAS

Vamos a pasar, ahora, a un estudio a través de relaciones aleatorias borrosas. Para ello volveremos a tomar los datos (17.33) y (17.34) pero esta

vez los subconjuntos A_i definidos en (17.35) serán subconjuntos aleatorios borrosos obtenidos a partir de la opinión de 10 expertos (tomamos precisamente 10 expertos a efectos de simplificación). Cada experto dará su opinión bajo la forma de un subconjunto borroso de tal manera que, en cada casilla de la matriz, esta opinión se traducirá por un número $\mu \in [0, 1]$.

17.75

		a	b	c	d	e
EXPERTO 1:	$A_1^{(1)}$	.8	0	.3	1	1
	$A_2^{(1)}$	.5	.2	.7	.4	.5
	$A_3^{(1)}$	.5	1	0	0	.6

		a	b	c	d	e
EXPERTO 2:	$A_1^{(2)}$	.9	.3	.2	.9	1
	$A_2^{(2)}$	.5	.4	.9	.3	.2
	$A_3^{(2)}$	.7	0	.3	0	.6

		a	b	c	d	e
EXPERTO 3:	$A_1^{(3)}$	.8	.4	.5	1	1
	$A_2^{(3)}$	.3	0	.6	.3	.4
	$A_3^{(3)}$	.6	.9	.4	0	.7

		a	b	c	d	e
EXPERTO 4:	$A_1^{(4)}$	.8	.1	.3	1	1
	$A_2^{(4)}$	.4	.2	.6	.3	.5
	$A_3^{(4)}$	.4	1	0	0	.7

		a	b	c	d	e
EXPERTO 5:	$A_1^{(5)}$	.8	.3	.2	1	1
	$A_2^{(5)}$	.5	.5	1	0	0
	$A_3^{(5)}$	.5	0	.4	0	.6

		a	b	c	d	e
EXPERTO 6:	$A_1^{(6)}$	1	.3	.5	1	1
	$A_2^{(6)}$	.5	.2	.5	.4	.5
	$A_3^{(6)}$	.5	0	.3	0	.6

		a	b	c	d	e
EXPERTO 7:	$A_1^{(7)}$	.9	.4	0	1	1
	$A_2^{(7)}$	.6	.5	1	0	0
	$A_3^{(7)}$	.3	0	.3	0	.4

		a	b	c	d	e
EXPERTO 8:	$A_1^{(8)}$	1	.4	.5	1	1
	$A_2^{(8)}$	.5	.2	.5	.6	.7
	$A_3^{(8)}$	1	.2	.3	0	.5

		a	b	c	d	e
EXPERTO 9:	$A_1^{(9)}$	1	.3	0	1	1
	$A_2^{(9)}$	.6	.5	1	0	0
	$A_3^{(9)}$	.4	.2	0	0	.6

		a	b	c	d	e
EXPERTO 10:	$A_1^{(10)}$	.3	1	0	.5	1
	$A_2^{(10)}$	1	.3	.6	.6	1
	$A_3^{(10)}$	1	0	.4	0	.5

La agregación de la opinión de los 10 expertos proporciona:

17.76

(1)					
	a	b	c	d	e
0		.1	.3		
.1		.2			
.2			.2		
.3	.1	.4	.2		
.4		.3			
.5			.3	.1	
.6					
.7					
.8	.4				
.9	.2			.1	
1	.3			.8	1

17.77

(2)					
	a	b	c	d	e
0		.1		.3	.3
.1					
.2		.4			.1
.3	.1	.1		.3	
.4	.1	.1		.2	.1
.5	.5	.3	.2		.3
.6	.2		.3	.2	
.7			.1		.1
.8					
.9			.1		
1	.1		.3		.1

17.78

(3)					
	a	b	c	d	e
0		.5	.3	1	
.1					
.2		.2			
.3	.1		.4		
.4	.2		.3		.1
.5	.3				.2
.6	.1				.5
.7	.1				.2
.8					
.9		.1			
1	.2	.2			

A partir de (17.76, 77 y 78) se calculan $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, $\bar{\hat{A}}_1$, $\bar{\hat{A}}_2$, $\bar{\hat{A}}_3$, lo que da lugar a:

17.79

$\hat{A}_1$					
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	.9	.7	1	1
.2	1	.7	.7	1	1
.3	1	.7	.5	1	1
.4	.9	.3	.3	1	1
.5	.9		.3	1	1
.6	.9			.9	1
.7	.9			.9	1
.8	.9			.9	1
.9	.5			.9	1
1	.3			.8	1

17.80

$\hat{A}_2$					
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	.9	1	.7	.7
.2	1	.9	1	.7	.7
.3	1	.5	1	.7	.6
.4	.9	.4	1	.4	.6
.5	.8	.3	1	.2	.5
.6	.3		.8	.2	.2
.7	.1		.5		.2
.8	.1		.4		.1
.9	.1		.4		.1
1	.1		.3		.1

17.81

$\hat{A}_3$					
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	.5	.7		1
.2	1	.5	.7		1
.3	1	.3	.7		1
.4	.9	.3	.3		1
.5	.7	.3			.9
.6	.4	.3			.7
.7	.3	.3			.2
.8	.2	.3			
.9	.2	.3			
1	.2	.2			

17.82						17.83						17.84					
$\bar{A}_1$						$\bar{A}_2$						$\bar{A}_3$					
	a	b	c	d	e		a	b	c	d	e		a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
.1	.7	1	1	.2		.1	.9	1	.7	1	.9	.1	.8	.8	1	1	1
.2	.5	1	1	.1		.2	.9	1	.6	1	.9	.2	.8	.7	1	1	1
.3	.1	1	1	.1		.3	.9	1	.6	1	.9	.3	.8	.7	1	1	1
.4	.1	1	1	.1		.4	.9	1	.5	1	.8	.4	.7	.7	1	1	.8
.5	.1	1	1	.1		.5	.7	1	.2	.8	.8	.5	.6	.7	1	1	.3
.6	.1	1	.7			.6	.2	.7		.8	.5	.6	.3	.7	1	1	.1
.7	.1	.7	.7			.7	.1	.6		.6	.4	.7	.1	.7	.7	1	
.8		.3	.5			.8		.5		.3	.4	.8		.7	.3	1	
.9		.3	.3			.9		.1		.3	.3	.9		.5	.3	1	
1		.1	.3			1		.1		.3	.3	1		.5	.3	1	

Como es conocido (1) una función de variables borrosas, y "a fortiori" una función de variables aleatorias borrosas, no puede descomponerse en minitérminos (respectivamente maxitérminos) sino en formas polinomiales. Sin embargo, los α -cortes que son subconjuntos ordinarios pueden engendrar funciones de variables booleanas descompuestas en minitérminos (respectivamente maxitérminos), que es lo que hemos hecho a partir de (17.59). No obstante resulta interesante conocer los minitérminos (respectivamente maxitérminos) en el supuesto borroso y en el aleatorio borroso. Si las $\bar{A}_i$ (17.79, 80 y 81) representan las propiedades, los minitérminos representarán las intersecciones de estas propiedades si se les incorporan los complementos (17.82, 83 y 84).

No se puede, de manera rigurosa, llamar clan al conjunto de minitérminos con ϕ y E y todas las uniones posibles realizadas con estos minitérminos. Sin embargo por analogía con lo que sucede en el álgebra booleana, vamos a llamarles "semiclan".

(1) KAUFMANN, A.: Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos. Tomo I, Ed. CECSA, 1982, epígrafe 33.

17.85

$$\emptyset$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1					
.2					
.3					
.4					
.5					
.6					
.7					
.8					
.9					
1					

17.86

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	.5	.7		.7
.2	1	.5	.7		.7
.3	1	.3	.5		.6
.4	.9	.3	.3		.6
.5	.7				.5
.6	.3				.2
.7	.1				.2
.8	.1				
.9	.1				
1	.1				

17.87

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.8	.8	.7	.7	.7
.2	.8	.7	.7	.7	.7
.3	.8	.5	.5	.7	.6
.4	.7	.3	.3	.4	.6
.5	.6		.3	.2	.3
.6	.3			.2	.1
.7	.1				
.8					
.9					
1					

17.88

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.9	.5	.7		.9
.2	.9	.5	.6		.9
.3	.9	.3	.5		.9
.4	.9	.3	.3		.8
.5	.7				.8
.6	.2				.5
.7	.1				.2
.8					
.9					
1					

17.89

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.8	.8	.7	1	.9
.2	.8	.7	.6	1	.9
.3	.8	.7	.5	1	.9
.4	.7	.3	.3	1	.8
.5	.6		.2	.8	.3
.6	.2			.8	.1
.7	.1			.6	
.8				.3	
.9				.3	
1				.3	

17.90

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.7	.5	.7		
.2	.5	.5	.7		
.3	.1	.3	.7		
.4	.1	.3	.3		
.5	.1	.3			
.6	.1				
.7	.1				
.8					
.9					
1					

17.91

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.7	.8	1	.2	
.2	.5	.7	1	.1	
.3	.1	.5	1	.1	
.4	.1	.4	1	.1	
.5	.1	.3	1	.1	
.6	.1		.7		
.7	.1		.5		
.8			.3		
.9			.3		
1			.3		

17.92

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.7	.5	.7		
.2	.5	.5	.6		
.3	.1	.3	.6		
.4	.1	.3	.3		
.5	.1	.3			
.6	.1	.3			
.7	.1	.3			
.8		.3			
.9		.1			
1		.1			

17.93

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.7	.8	.7	.2	
.2	.5	.7	.6	.1	
.3	.1	.7	.6	.1	
.4	.1	.7	.5	.1	
.5	.1	.7	.2	.1	
.6	.1	.7			
.7	.1	.6			
.8		.3			
.9		.1			
1		.1			

17.94

$$E$$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1	1	1	1
.2	1	1	1	1	1
.3	1	1	1	1	1
.4	1	1	1	1	1
.5	1	1	1	1	1
.6	1	1	1	1	1
.7	1	1	1	1	1
.8	1	1	1	1	1
.9	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Por analogía con el álgebra booleana, llamaremos “claves aleatorias borrosas” a los subconjuntos aleatorios borrosos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$; los mini-términos (17.86) a (17.93) se denominarán “átomos aleatorios borrosos” y la construcción indicada anteriormente con los átomos, todas sus reuniones junto con ϕ y E “semiclan”.

Supongamos ahora que las cinco organizaciones a, b, c, d, e sean comparadas en relación a un criterio $P_1 \Delta \bar{P}_2 \Delta P_3$, se procederá a la comparación de las columnas a, b, c, d, e entre sí en (17.88). Para ello se tomará la distancia de Hamming entre columnas. Así, para $\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2 \cap \hat{A}_3$:

$$17.95 \quad \delta(a, b) = \frac{1}{11} (|.9-.5| + |.9-.5| + |.9-.3| + |.9-.3| + \\ + |.7-0| + |.2-0| + |.1-0|) = 0.27$$

$$\delta(a, c) = 0.22, \quad \delta(a, d) = 0.41, \quad \delta(a, e) = 0.05$$

$$\delta(b, c) = 0.04, \quad \delta(b, d) = 0.14, \quad \delta(b, e) = 0.30$$

$$\delta(c, d) = 0.19, \quad \delta(c, e) = 0.26, \quad \delta(d, e) = 0.45$$

Hay que señalar que habríamos podido dividir por 10 en lugar de 11 ya que para $\alpha = 0$ se obtiene siempre 1. Con las distancias calculadas en (17.95) es posible reagrupar entre sí las organizaciones y eventualmente reagruparlas en subrelaciones máximas de similitud. Según este criterio se hallan muy cercanas a y e así como b y c.

Otro planteamiento consistiría en comparar, según el criterio elegido, la estimación realizada por los 10 expertos con la correspondiente a un verdadero minitérmino. Así, se podría comparar $\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2 \cap \hat{A}_3$ con $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$ (los expertos deben ponerse de acuerdo para dar únicamente *ceros* o bien *unos* a las propiedades de cada a y b). Dicho de otra manera, comparar la elección en todo o nada por consenso con la elección matizada con la estadística que proporcionan los subconjuntos aleatorios borrosos.

17.96

	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$				
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1			
.2	1	1			
.3	1	1			
.4	1	1			
.5	1	1			
.6	1				
.7	1				
.8					
.9					
1					

La distancia entre (17.90) y (17.96) es:

$$\begin{aligned}
 17.97 \quad \delta(\bar{\hat{A}}_1 \cap \hat{A}_2 \cap \hat{A}_3, \bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{55} (|0.7-1| + |0.5-1| \\
 &+ |0.1-1| + |0.1-1| + |0.1-1| + |0.1-1| + |0.1-1| + |0.5-1| \\
 &+ |0.5-1| + |0.3-1| + |0.3-1| + |0.3-1| + |0.7-0| + |0.7-0| \\
 &+ |0.7-0| + |0.3-0|) = 0.19
 \end{aligned}$$

También se puede comparar, con un común consenso, con datos borrosos.

17.98

$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$					
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1	1		
.2	1	1	1		
.3	1	1	1		
.4	1		1		
.5					
.6					
.7					
.8					
.9					
1					

.4	.3	.4	0	0
----	----	----	---	---

En este caso se obtiene:

$$\begin{aligned}
 17.99 \quad \delta(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3, \bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{55} (|.7-1| + |.5-1| \\
 &+ |.1-1| + |.1-1| + |.1-0| + |.1-0| + |.1-0| + |.5-1| \\
 &+ |.5-1| + |.3-1| + |.3-0| + |.3-0| + |.7-1| + |.7-1| + |.7-1| \\
 &+ |.3-1|) = 0.12
 \end{aligned}$$

Pueden ser establecidas toda clase de informaciones que permitan conocer mejor la empresa en sus aspectos económico, social o cualquier otro que pudiera interesar. Evidentemente, para que resultara factible, debe realizarse a través de un sistema informatizado. Los procedimientos considerados son muy fáciles de programar con los lenguajes más usuales.

Veamos, ahora, otra utilización. Supongamos que se recurre a un onceavo experto para que introduzca en el banco de datos su estimación a través de un subconjunto borroso de E para cada A_i :

17.100

EXPERTO 11

	a	b	c	d	e
$A_1^{(11)}$	.9	.7	.4	1	.3
$A_2^{(11)}$	0	.2	.6	1	.4
$A_3^{(11)}$	.3	.9	.5	.2	1

Este 11^{avo.} experto desea conocer cómo se halla colocada su estimación en relación a la de los otros 10. Entonces recurriendo a (17.79, 80 y 81) se calculará la distancia para cada $\hat{A}_i$. Se puede escribir (17.100) bajo la forma:

17.101

$\hat{A}_1^{(11)}$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1	1	1	1
.2	1	1	1	1	1
.3	1	1	1	1	1
.4	1	1	1	1	
.5	1	1		1	
.6	1	1		1	
.7	1	1		1	
.8	1			1	
.9	1			1	
1				1	

.9	.7	.4	1	.3
----	----	----	---	----

17.102

$\hat{A}_2^{(11)}$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1		1	1	1	1
.2		1	1	1	1
.3			1	1	1
.4			1	1	1
.5			1	1	
.6			1	1	
.7				1	
.8				1	
.9				1	
1				1	

0	.2	.6	1	.4
---	----	----	---	----

17.103

$\hat{A}_3^{(11)}$

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1	1	1	1
.2	1	1	1	1	1
.3	1	1	1		1
.4		1	1		1
.5		1	1		1
.6		1			1
.7		1			1
.8		1			1
.9		1			1
1					1

.3	.9	.5	.2	1
----	----	----	----	---

y se puede ya proceder al cálculo de las distancias de Hamming como se ha realizado anteriormente.

Lo que acabamos de exponer, con la ayuda de ejemplos que hemos querido sean muy simples, puede extenderse a toda clase de problemas de peritación subjetiva u objetiva, relativa a diversos ámbitos desde las ciencias humanas y de la comunicación hasta la información y la formación.

Señalemos finalmente algunos aspectos interesantes. Si se ha construido un banco de datos de expertos utilizando subconjuntos aleatorios borrosos, se puede suponer que interviene un $n + 1$ experto en el sistema introduciendo su opinión. El banco va a enriquecerse con esta nueva opinión y se formará un nuevo conjunto de claves. Hay que señalar y recordar que hemos tomado, en nuestros ejemplos, un número de expertos igual a 10 lo que proporcionaba probabilidades o pesos en décimas, pero que es posible tomar cualquier número fraccionario. Sin embargo, en lo

que se refiere a los niveles de corte recomendamos los 11 niveles, que corresponden a nuestra costumbre de hacer notaciones sobre 10.

Unicamente a título de ejemplo sencillo, veamos cómo la presencia del 11^{avo.} experto (17.100), va a modificar las $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ dadas en (17.79, 80 y 81).

17.104

(1)

	a	b	c	d	e
0		.090	.272		
.1		.181			
.2	.090		.181		
.3		.363	.181		.090
.4		.272	.090		
.5			.272	.090	
.6					
.7		.090			
.8	.363				
.9	.272			.090	
1	.272			.818	.909

17.105

(2)

	a	b	c	d	e
0	.090	.090		.272	.272
.1					
.2		.454			.090
.3	.090	.090		.272	
.4	.090	.090		.181	.181
.5	.454	.272	.181		.272
.6	.181		.363	.181	
.7			.090		.090
.8					
.9			.090		
1	.090		.272	.090	.090

(3)

	a	b	c	d	e
0		.454	.272	.905	
.1					
.2		.181		.090	
.3	.181		.363		
.4	.181		.272		.090
.5	.272		.090		.181
.6	.090				.454
.7	.090				.181
.8					
.9		.181			
1	.181	.181			.090

17.106

 A'_1

	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	.906	.724	1	1
.2	1	.725	.724	1	1
.3	.907	.725	.543	1	1
.4	.907	.362	.362	1	.909
.5	.907	.090	.272	1	.909
.6	.907	.090		.908	.909
.7	.907	.090		.908	.909
.8	.907			.908	.909
.9	.544			.908	.909
1	.272			.818	.909

17.107

17.108

	$\tilde{A}'_2$				
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	.905	.906	1	.724	.723
.2	.905	.906	1	.724	.723
.3	.905	.452	1	.724	.633
.4	.815	.362	1	.452	.633
.5	.725	.272	1	.271	.452
.6	.271		.815	.271	.180
.7	.090		.452	.090	.180
.8	.090		.362	.090	.090
.9	.090		.362	.090	.090
1	.090		.272	.090	.090

17.109

	$\tilde{A}'_3$				
	a	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	.543	.725	.090	1
.2	1	.543	.725	.090	1
.3	1	.362	.725		1
.4	.814	.362	.362		1
.5	.633	.362	.090		.906
.6	.361	.362			.725
.7	.271	.362			.271
.8	.181	.362			.090
.9	.181	.362			.090
1	.181	.181			.090

Los errores cometidos por redondeo han sido absorbidos en el acumulado al dar el valor 1. Evidentemente es posible reducirlos tomando en consideración un número de cifras significativo mayor. El total de los errores cometidos por redondeo no sobrepasará 10^{-n+1} en donde n es el número de cifras significativas. Hay que señalar, no obstante, que no debemos ser demasiado exigentes en cuanto a la precisión de los cálculos con los subconjuntos borrosos y subconjuntos aleatorios borrosos, exceptuando determinados casos concretos. Lo que interesa es la precisión de los procesos más que la precisión en los cálculos cuando se trata de datos subjetivos.

En este apartado nos hemos limitado, para proporcionar el principio de utilización, a la construcción de diversos sistemas expertos utilizando la noción de clan y de semiclan. Un sistema experto debe ser adaptativo y debe permitir la matización. Es un instrumento para el entendimiento hombre-máquina.

Programas lineales multicriterios con limitaciones borrosas

INTRODUCCION AL METODO DE ZIMMERMANN (1)

Las bases de la teoría de la programación lineal clásica se deben a G. DANTZIG y a partir de su "método del simplex" se han elaborado una gran cantidad de variantes (2), adaptables actualmente al cálculo mediante ordenadores.

Vamos a presentar un ejemplo como introducción. Se trata de un programa lineal que posee dos criterios, es decir, dos funciones económicas.

$$18.1 \quad \text{MAX. } z_1 = 2 x_1 + 5 x_2$$

$$18.2 \quad \text{MAX. } z_2 = 4 x_1 - 2 x_2$$

$$18.3 \quad -4 x_1 + 3 x_2 \leq 30 \quad (1)$$

$$18.4 \quad x_1 + 10 x_2 \leq 143 \quad (2)$$

$$18.5 \quad -x_1 \leq 13 \quad (3)$$

- (1) ZIMMERMANN, H.J.: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Syst. Vol. 1 n.º 2 1978, Pág. 45-55.
 (2) Recomendamos como libros de consulta: KAUFMANN, A.: Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones, Tomos I y II: y KAUFMANN, A. y HENRY LABORDERE, A.: Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones, Tomo III, Ed. CECSA.

$$18.6 \quad 5x_1 - 8x_2 \leq 25 \quad (4)$$

$$18.7 \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Para el criterio z_1 , el máximo se obtiene para:

$$18.8 \quad x_1 = 13, \quad x_2 = 13, \quad z_1 = 91 \quad (\text{Figura 18.1})$$

Para el criterio z_2 , el máximo se obtiene para:

$$18.9 \quad x_1 = 13, \quad x_2 = 5, \quad z_2 = 42 \quad (\text{Figura 18.1})$$

Se puede observar que sustituyendo se tiene:

$$18.10 \quad z_1(13, 13) = 91, \quad z_2(13, 13) = 26$$

18.11

$$18.12 \quad z_1(13, 5) = 51, \quad z_2(13, 5) = 42$$

18.13

Existe en la literatura matemática especializada una gran cantidad de trabajos sobre la agregación matemática de criterios en la programación económica (1). En este trabajo vamos a dedicarnos especialmente a la utilización de la teoría de los subconjuntos borrosos para esta agregación. Vamos a volver al ejemplo anterior representado en la figura 18.1 para poner de manifiesto primero en un caso muy simple las ideas básicas del método de ZIMMERMANN.

Tomemos de nuevo la figura 18.1 y las limitaciones (18.3) a (18.7) y vamos a introducir una agregación borrosa de los criterios (18.1) y (18.2).

Consideremos en primer lugar, el criterio z_1 y determinemos la ecuación de la perpendicular a la recta que le corresponde. Esta recta pasa por el punto óptimo (13, 13) y tiene por ecuación:

$$18.14 \quad 5x_1 - 2x_2 = k$$

(1) Como ejemplo, entre otros muchos artículos, se puede consultar: GEOFFRION, A.M.; DYER, J.S. y FEINBERG, A.: An interactive approach for multi-criterion optimization with an application to the operations of an academic department. *Manag. Sc.* (Vol. 17) Pág. 357-368 (1972-73).
 KUHN, H.W., TUCKER, A.W. y GEOFFRION, A.M.: A parametric programming solution of the vector maximum problem. *Techn. Rep. n.º 11*, Stanford Univ. Cal. 1965.

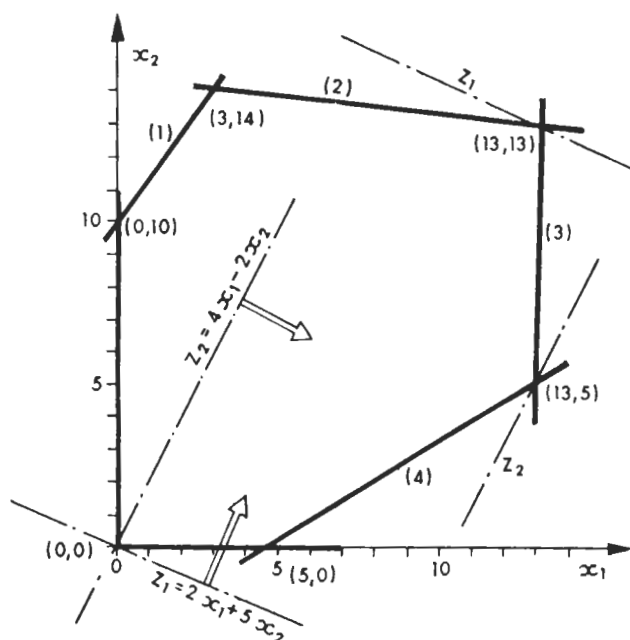


FIGURA 18.1

el valor de k se obtiene de manera inmediata haciendo: $x_1 = 13$ y $x_2 = 13$, de lo que resulta $k = 39$. Se tiene, pues:

$$18.15 \quad 5x_1 - 2x_2 = 39$$

Sigamos el mismo proceso para el criterio z_2 , para el que la perpendicular tiene por ecuación:

$$18.16 \quad x_1 + 2x_2 = k'$$

El valor de k' se obtiene de manera inmediata haciendo $x_1 = 13$ y $x_2 = 5$, de lo que resulta $k' = 23$. Se tiene así:

$$18.17 \quad x_1 + 2x_2 = 23$$

Como puede observarse en la figura 18.2 la intersección de (18.15) y (18.17) se obtiene para:

$$18.18 \quad x_1 = \frac{31}{3}, \quad x_2 = \frac{19}{3}$$

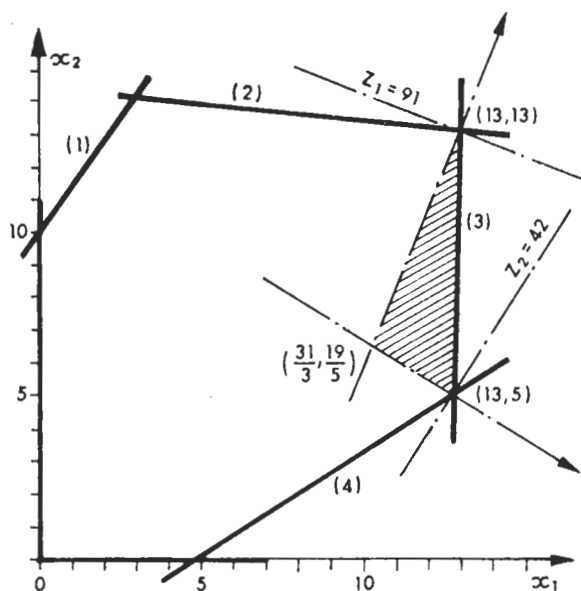
De ahí se obtiene:

$$18.19 \quad z_1 \left(\frac{31}{3}, \frac{19}{3} \right) = \frac{157}{3} = 52 \frac{1}{3}$$

$$18.20 \quad z_2 \left(\frac{31}{3}, \frac{19}{3} \right) = \frac{86}{3} = 28 \frac{2}{3}$$

Afectemos ahora al criterio z_1 la función de pertenencia:

FIGURA 18.2



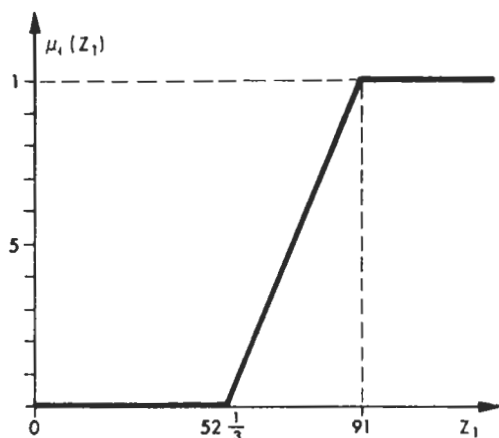


FIGURA 18.3

$$18.21 \quad \mu_1(z_1) = 0 \quad , \quad z_1 \leq 52 \frac{1}{3}$$

$$= \frac{z_1(x_1, x_2) - 52 \frac{1}{3}}{91 - 52 \frac{1}{3}} \quad , \quad 52 \frac{1}{3} \leq z_1 \leq 91$$

$$= 1 \quad , \quad 91 \leq z_1$$

lo que representamos en la figura 18.3.

y, para z_2 :

$$18.22 \quad \mu_2(z_2) = 0 \quad , \quad z_2 \leq 28 \frac{2}{3}$$

$$= \frac{z_2(x_1, x_2) - 28 \frac{2}{3}}{42 - 28 \frac{2}{3}} \quad , \quad 28 \frac{2}{3} \leq z_2 \leq 42$$

$$= 1 \quad , \quad 42 \leq z_2$$

lo que se representa en la figura 18.4

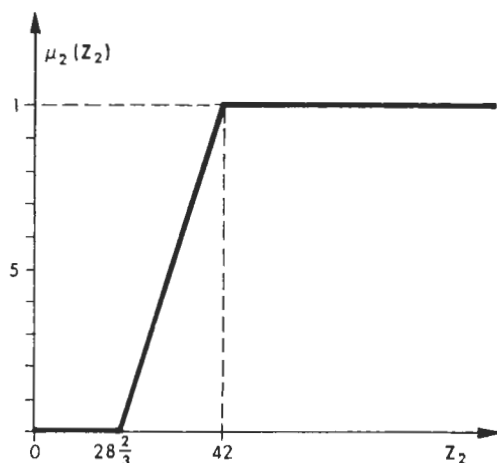


FIGURA 18.4

Esto representa que establecemos una función de pertenencia para el criterio z_1 tal que su valor es nulo en las situaciones anteriores al punto $(31/3, 19/3)$ pues en este punto el decrecimiento de z_1 no puede ser compensado (1) por un crecimiento de z_2 .

Por otra parte esta función de pertenencia es tal que su valor es 1 más allá del punto (13.13) y se admite que su valor varía de manera monótona creciente y lineal de $(31/3, 19/3)$ a (13.13) . Se ha elegido de manera similar la función de pertenencia de z_2 (figuras 18.3 y 18.4).

Sustituyamos ahora (18.1) en (18.21) y (18.2) en (18.22) con lo que se llega, después de los correspondientes cálculos:

$$18.23 \quad \mu_1(z_1) = 0.0517 x_1 + 0.1293 x_2 - 1.3534$$

$$52 \frac{1}{3} \leq z_1 \leq 91$$

$$18.24 \quad \mu_2(z_2) = 0.3000 x_1 - 0.1500 x_2 - 2.1500$$

$$28 \frac{2}{3} \leq z_2 \leq 42$$

(1) Más adelante veremos que se puede elegir arbitrariamente los puntos en que las funciones de pertenencia dejan de ser nulas. Aquí, con dos criterios, podemos operar de esta manera.

Esto nos lleva a resolver el programa lineal siguiente:

MAX λ

$$18.25 \quad \lambda \leq 0.0517 x_1 + 0.1293 x_2 - 1.3534$$

$$\lambda \leq 0.3000 x_1 - 0.1500 x_2 - 2.1500$$

$$30 \geq -4 x_1 + 3 x_2$$

$$143 \geq x_1 + 10 x_2$$

$$13 \geq x_1$$

$$25 \geq 5 x_1 - 8 x_2$$

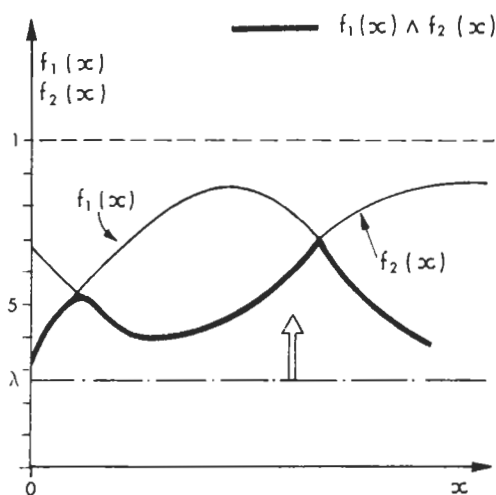
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Esta transformación del problema se justifica de la siguiente manera. Si se utiliza la intersección $\wedge$ (min) para representar la conjunción "y" se tiene la equivalencia siguiente para $f_1(x) \in [0,1]$ y $f_2(x) \in [0,1]$:

$$18.26 \quad \underset{x}{\text{MAX}} (f_1(x) \wedge f_2(x)) \Leftrightarrow (\underset{x}{\text{MAX}} \lambda, \lambda \leq f_1(x), \lambda \leq f_2(x))$$

Puede observarse esta propiedad en la figura 18.5

FIGURA 18.5



Para simplificar la escritura en (18.25) se cambiará el sentido de varias inecuaciones y se hará $u_3 = \lambda$; se obtiene entonces:

$$\text{MAX } u_3$$

$$\begin{array}{ll} (1) & -0.0517 x_1 - 0.1293 x_2 + u_3 \leq -1.3534 \\ (2) & -0.3000 x_1 + 0.1500 x_2 + u_3 \leq -2.1500 \\ 18.27 \quad (3) & -4 x_1 + 3 x_2 \leq 30 \\ (4) & x_1 + 10 x_2 \leq 143 \\ (5) & x_1 \leq 13 \\ (6) & 5 x_1 - 8 x_2 \leq 25 \\ & x_1, x_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

Los segundos miembros de (18.27) contienen algunas cantidades negativas. Con objeto de utilizar el método del simplex de Dantzig, vamos a modificar (18.27) de manera que sean todas positivas.

Para ello hagamos:

$$18.28 \quad u_3 = x_3 - 3$$

Vamos a permitirnos un corrimiento ya que sólo afecta a las inecuaciones (1) y (2) de (18.27), en las otras no interviene u_3 y un decalaje de 3 cambiará el signo de los segundos miembros de (1) y (2). Evidentemente, se puede aceptar todo decalaje superior a 2.1500. El programa (18.27) se convierte entonces en:

$$\text{MAX } x_3$$

$$\begin{array}{ll} (1) & -0.0517 x_1 - 0.1293 x_2 + x_3 \leq 1.6466 \\ (2) & -0.3000 x_1 + 0.1500 x_2 + x_3 \leq 0.8500 \\ 18.29 \quad (3) & -4 x_1 + 3 x_2 \leq 30 \\ (4) & x_1 + 10 x_2 \leq 143 \\ (5) & x_1 \leq 13 \\ (6) & 5 x_1 - 8 x_2 \leq 25 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Resolvamos ahora (18.29) por el método del simplex con la ayuda de

los cuadros representados en las figuras 18.6, 7, 8, 9, 10 y 11. El resultado ha sido obtenido en 6 pasos después de introducir las variables de holgura x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 y x_9 .

fila	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	0.0517	0.1293	1	1	1					1.6466	$1.6466 / 1 = 1.6466$
(2)	0.3000	0.1500	1		1					0.8500	$0.8500 / 1 = 0.8500$
(3)	4	3	0			1				30	$30 / 0 \rightarrow \infty$
(4)	1	10	0				1	1		143	$143 / 0 \rightarrow \infty$
(5)	1	0	0					1		13	$13 / 0 \rightarrow \infty$
(6)	5	8	0						1	25	$25 / 0 \rightarrow \infty$
función econ.			1							z	

↑

FIGURA 18.6

FIGURA 18.7

fila	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	0.2483	-0.2793		1	-1					0.7966	$\frac{0.7966}{0.2483} = 3.2082$
(2)	-0.3000	0.1500	1		1					0.8500	$\frac{0.8500}{-0.3000} = -2.8333$
(3)	-4	3			0	1				30	$\frac{30}{-4} = -7.5$
(4)	1	10			0		1			143	$\frac{143}{1} = 143$
(5)	1	0			0			1		13	$\frac{13}{1} = 13$
(6)	5	-8			0				1	25	$\frac{25}{5} = 5$
función econ.	-0.3000	0.1500			1					$-z + 0.8500$	

↑

fila	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	1	-1.1248		4.0273	-4.0273					3.2082	negativo
(2)		-0.1874	1	1.2081	-0.2081					1.8124	negativo
(3)		-1.4992		16.1092	-16.1092	1				42.8328	negativo
(4)		11.1248		-4.0273	4.0273		1			139.7919	$\frac{139.7919}{4.0273} = 34.7110$
(5)		1.1248		-4.0273	4.0273			1		9.7918	$\frac{9.7918}{4.0273} = 2.4313$
(6)		-2.3764		-20.1365	20.1365				1	8.9591	$\frac{8.9591}{20.1365} = 0.4449$
función econ.		-0.1874		1.2081	-0.2081					-z + 1.8124	

↑

FIGURA 18.8

FIGURA 18.9

fila	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	1	-1.5996		0					0.1997	5	negativo
(2)		-0.2119	1	1					0.0193	1.9050	negativo
(3)		-3.3984		0		1			0.7990	50	negativo
(4)		1.5996		0			1		-0.1997	138	$\frac{138}{1.5996} = 86.2715$
(5)		1.5996		0				1	-0.1997	8	$\frac{8}{1.5996} = 5$
(6)		-0.1179		-1	1				0.0496	0.4449	negativo
función econ.		-0.2119		1					0.0103	-z + 1.9050	

↑

fila	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	1			0				1	0	13	$\frac{13}{0} \rightarrow \infty$
(2)			1	1				0.1324	-0.0616	2.9645	negativo
(3)				0		1		2.1243	0.3749	66.9920	$\frac{66.9920}{0.3743} = 178.6929$
(4)				0			1	1	0	130	$\frac{130}{0} \rightarrow \infty$
(5)		1		0				0.6251	-0.1248	5	negativo
(6)				1	1			0.0736	0.0349	1.0344	$\frac{1.0344}{0.0349} = 29.6389$
fun- ción econ.				1				0.1324	-0.0161	-z + 2.9647	

↑

FIGURA 18.10

FIGURA 18.11

fila	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	1			0	0			1		13	
(2)			1	2.7650	1.7650			0.0024		3.4416	
(3)				-10.7420	-10.7420	1		1.3338		55.8804	
(4)				0	0		1	-1		130	
(5)		1		3.5759	3.5759			0.3619		8.6989	
(6)				28.6532	28.6532			2.1088	1	23.6384	
fun- ción econ.				1.4613	0.4613			0.1663		-z + 3.4418	
				positivo	positivo			positivo		FIN	

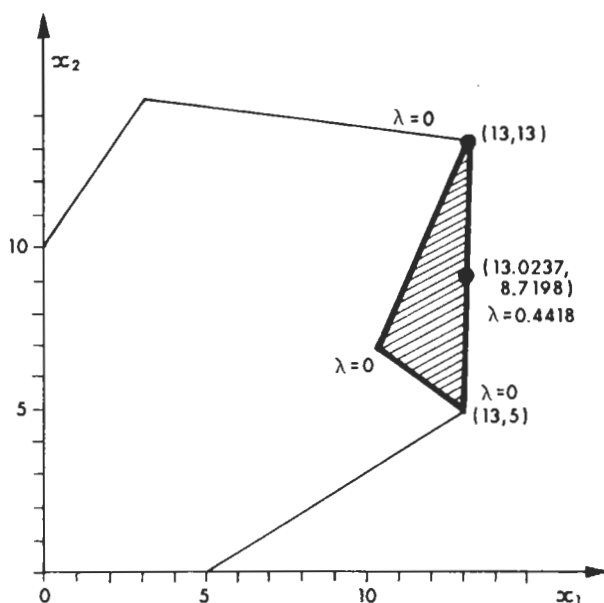


FIGURA 18.12

La solución óptima es:

$$18.30 \quad x_3 = 3.4418$$

de donde resulta:

$$18.31 \quad \lambda = u_3 = x_3 - 3 = 0.4418$$

tomando:

$$18.32 \quad \mu_1(z_1) = \mu_2(z_2) = \lambda = 0.4418$$

y sustituyendo este valor en (18.23) y (18.24) se tiene:

$$18.33 \quad 0.0517 x_1 + 0.1293 x_2 = 1.7952$$

$$0.3000 x_1 - 0.1500 x_2 = 2.5918$$

La resolución de estas dos ecuaciones permite obtener:

$$18.34 \quad x_1 = 13.0237 \quad , \quad x_2 = 8.7198 \quad (1)$$

Los valores correspondientes de z_1 y z_2 serán:

$$18.35 \quad \begin{aligned} z_1 &= 2x_1 + 5x_2 = 2 \times 13.0237 + 5 \times 8.7198 = 69.6464 \\ z_2 &= 4x_1 - 2x_2 = 4 \times 13.0237 - 2 \times 8.7198 = 34.6552 \end{aligned}$$

Se han colocado los resultados en la figura 18.12:

NOCIONES TEORICAS BASICAS

Antes de pasar a un estudio general de la programación lineal borrosa por el método Zimmermann, vamos a recordar ciertas nociones básicas que van a ser utilizadas.

Supongamos que:

$$18.36 \quad \begin{aligned} P: \quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \\ & x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & b > 0 \end{aligned}$$

es un plano de R^n . La distancia euclídea de este plano al origen de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ viene dada por:

$$18.37 \quad \Delta = \frac{b}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

en las coordenadas ortogonales.

Consideremos ahora otro plano paralelo a P:

$$18.38 \quad \begin{aligned} P': \quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b' \\ & x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & b' \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Se han cometido los errores por el redondeo a cinco cifras significativas. Un cálculo más apurado proporcionaría $x_1 = 13$ y $x_2 = 8.7$.

Se establece la hipótesis de que las a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son tales que estos planos tienen por lo menos un punto en R^+ . La distancia entre los dos planos paralelos será, en coordenadas ortogonales (1).

$$18.39 \quad \delta = \frac{|b - b'|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

La figura 18.13 representa esta distancia en R^+

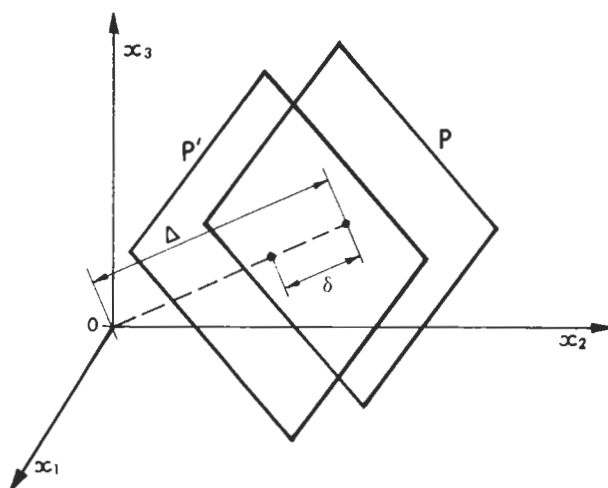


FIGURA 18.13

Vamos a considerar ahora el subconjunto de planos en R^{+n} que son paralelos a P dado en (18.36) y vamos a dotar a este subconjunto de una función de pertenencia. Designemos por Π un plano cualquiera paralelo a P y por d la distancia generalizada de Π hasta el origen de coordenadas (en cualesquiera coordenadas)

- (1) La distancia de dos planos paralelos de R^n se presenta con una fórmula más complicada que (18.39) cuando las coordenadas no son ortogonales. A nuestros efectos, sin embargo, vamos a continuar con esta restricción ya que permanecen válidas las propiedades que vamos a utilizar.

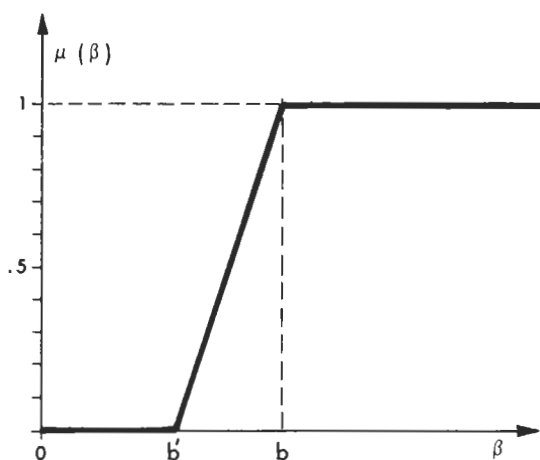
$$\begin{aligned}
 18.40 \quad \mu(\Pi) &= 0, & 0 \leq d \leq \Delta - \delta, & \Delta \geq \delta \\
 &= 1 - \frac{\Delta - d}{\delta}, & \Delta - \delta \leq d \leq \Delta \\
 &= 1, & \Delta \leq d
 \end{aligned}$$

Se puede también designar por d la variable de la función de pertenencia:

$$\begin{aligned}
 18.41 \quad \mu(d) &= 0, & 0 \leq d \leq \Delta, & \Delta \geq \delta \\
 &= 1 - \frac{\Delta - d}{\delta}, & \Delta - \delta \leq d \leq \Delta \\
 &= 1, & \Delta \leq d
 \end{aligned}$$

Si se designa por β un segundo miembro cualquiera de (18.36), se tendrá:

FIGURA 18.14



$$\begin{aligned}
 18.42 \quad \mu(\beta) &= 0, & 0 \leq \beta \leq b' \\
 &= 1 - \frac{b - \beta}{b - b'}, & b' \leq \beta \leq b \\
 &= 1, & b \leq \beta
 \end{aligned}$$

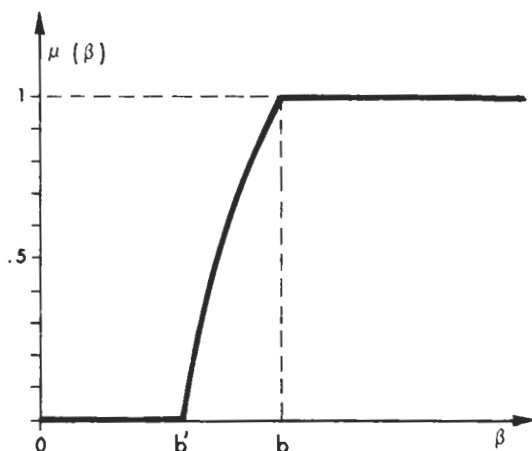
La manera de afectar una función al subconjunto de los planos Π consiste en una aplicación funcional lineal que se ha representado en la figura 18.14:

Sin embargo también podría tomarse cualquier otra aplicación funcional (con introducción de una no linealidad para el programa económico), por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 18.43 \quad \mu(\beta) &= 0, & 0 \leq \beta \leq b' \\
 &= 1 - \left(\frac{b - \beta}{b - b'} \right)^k, & b' \leq \beta \leq b & \quad k > 0 \\
 &= 1, & b \leq \beta
 \end{aligned}$$

que se representa en la figura 18.15

FIGURA 18.15



En ciertos casos se puede expresar la posición del plano Π entre P y P' por un porcentaje p , $p \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 18.44 \quad \mu(p) &= 0 & , \quad p \leq 0 \\
 &= 1 - p & , \quad 0 \leq p \leq 1 \\
 &= 1 & , \quad p \geq 1 \quad , \quad p = \frac{b - \beta}{b - b'}
 \end{aligned}$$

AFFECTACION DE UNA FUNCIÓN DE PERTENENCIA A UNA CONDICION

Veamos ahora cómo se pueden utilizar estos resultados para afectar una función de pertenencia a una condición de un programa lineal.

Supongamos que, en un programa lineal, las condiciones sean las siguientes después de introducir convenientemente variables de holgura y/o artificiales.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

18.45

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$b_i > 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$m \leq n$$

Tomemos arbitrariamente la condición cuyo segundo miembro es b_i . Transformemos esta condición no borrosa en una condición borrosa tomando $b'_i \leq b_i$:

$$\begin{aligned}
 18.46 \quad \mu_i(\beta_i) &= 0 & , \quad 0 \leq \beta_i \leq b'_i \\
 &= 1 - \frac{b_i - \beta_i}{b_i - b'_i} & , \quad b'_i \leq \beta_i \leq b_i
 \end{aligned}$$

$$= 1, \quad b_i \leq \beta_i$$

Pero:

$$18.47 \quad \beta_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

que se sustituirá en 18.46, lo que da lugar a:

$$18.48 \quad \mu_i(a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n) = 0, \quad$$

$$0 \leq a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b'_i$$

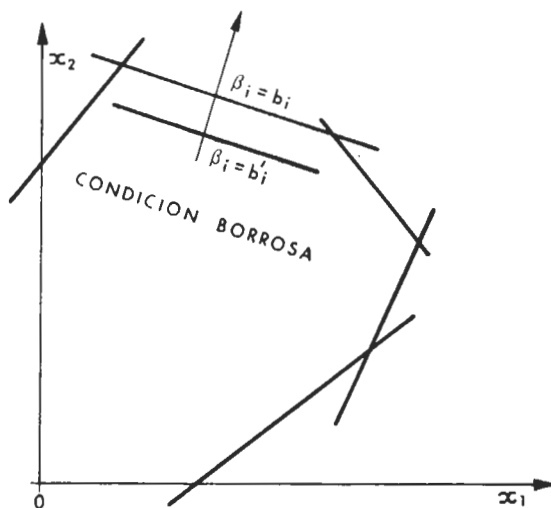
$$= 1 - \frac{b_i - (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n)}{b_i - b'_i}$$

$$b'_i \leq a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

$$= 1, \quad b_i \leq a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

La figura 18.16 representa una condición borrosa de este tipo en R^{+2} .

FIGURA 18.16



Escribiremos (18.48) de la siguiente manera:

$$18.49 \quad \mu_i(\beta_i) = \frac{1}{b_i - b'_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \frac{b'_i}{b_i - b'_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

cuando $b'_i \leq a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$. Utilizaremos más adelante la fórmula (18.49).

En un programa lineal se puede suponer siempre que todas las condiciones son borrosas de la manera como hemos señalado, sin perjuicio de hacer $b'_i = b_i$ para las que no lo sean. En estas condiciones, la función de pertenencia que corresponde a las m condiciones será:

$$18.50 \quad \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \text{MAX}_{\beta_i, i=1,2,\dots,m} (\mu_1(\beta_1) \wedge \mu_2(\beta_2) \wedge \dots \wedge \mu_m(\beta_m))$$

Hay que señalar que una interesante generalización consistiría en tomar para la conjunción "y" un operador distinto del $\wedge$ por ejemplo el operador $(.)$ (8.30) o el operador parametrizable $(\dot{\gamma})$ (8.33). En este caso el programa se convertiría en no lineal. Si nos remitimos a (18.26), la fórmula (18.50) puede ser sustituida, utilizando (18.49), por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{1}{b_1 - b'_1} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j - \frac{b'_1}{b_1 - b'_1} \\ 18.51 \quad \lambda &\leq \frac{1}{b_2 - b'_2} \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j - \frac{b'_2}{b_2 - b'_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda &\leq \frac{1}{b_m - b'_m} \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j - \frac{b'_m}{b_m - b'_m} \end{aligned}$$

que se incluirán junto con las m ecuaciones (18.45) del programa lineal.

En la fórmula (18.46) se ha tomado $b'_i \leq b_i$; veamos ahora el caso en

que el plano Π_i'' que corresponde a b_i'' es tal que $b_i'' \geq b_i$. La fórmula (18.46) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 18.52 \quad \mu_i(\beta_i) &= 1 & , 0 \leq \beta_i \leq b_i \\
 &= 1 - \frac{\beta_i - b_i}{b_i'' - b_i} & , b_i \leq \beta_i \leq b_i'' \\
 &= 0 & , b_i'' \leq \beta_i \quad \dots, i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

Esta situación ha sido representada en la figura 18.17 en el supuesto de R^{+2}

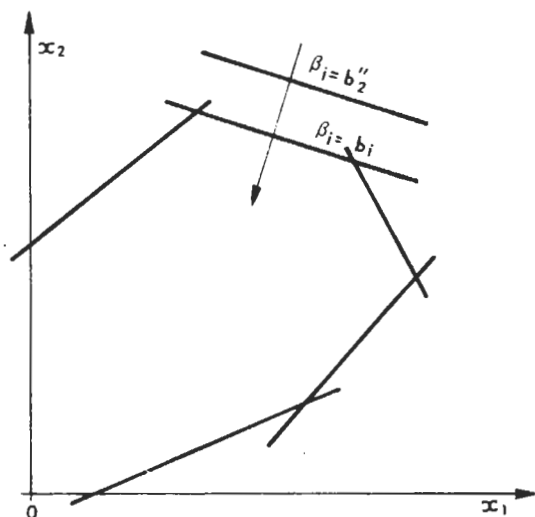


FIGURA 18.17

La fórmula (18.49) se convierte en:

$$18.53 \quad \mu_i(\beta_i) = \frac{b_i''}{b_i'' - b_i} - \frac{b_i''}{b_i'' - b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

La fórmula (18.50) no varía. Las fórmulas (18.51) se transforman en:

$$\begin{aligned}
 \lambda &\leq \frac{b_1''}{b_1'' - b_1} - \frac{b_1''}{b_1'' - b_1} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\
 18.54 \quad \lambda &\leq \frac{b_2''}{b_2'' - b_2} - \frac{b_2''}{b_2'' - b_2} \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\
 &\dots\dots\dots \\
 \lambda &\leq \frac{b_m''}{b_m'' - b_m} - \frac{b_m''}{b_m'' - b_m} \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \\
 &\lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

Se puede considerar una función de pertenencia del tipo indicado en la figura (18.19) que conjuga los dos casos examinados, pero en este caso puede surgir la no linealidad. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 18.55 \quad \mu_1(\beta_i) &= 0, & 0 \leq \beta_i \leq b_i' \\
 &= 1 - \frac{b_i - \beta_i}{b_i - b_i'}, & b_i' \leq \beta_i \leq b_i \\
 &= 1 - \frac{\beta_i - b_i}{b_i'' - b_i}, & b_i \leq \beta_i \leq b_i'' \\
 &= 0, & b_i'' \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

que se representa en la figura 18.19.

Si se utiliza este tipo de función de pertenencia, se asociarán las inequaciones (18.55) a las m ecuaciones (18.45).

Antes de continuar vamos a señalar que ciertos autores han criticado que en el método de Zimmermann aparece la función de pertenencia de manera muy artificiosa y que con ello no tiene lugar un tratamiento del modelo en un ambiente borroso. No participamos de esta opinión. La introducción aquí de una función de pertenencia está de acuerdo con el tratamiento de la incertidumbre a través de la teoría de los subconjuntos

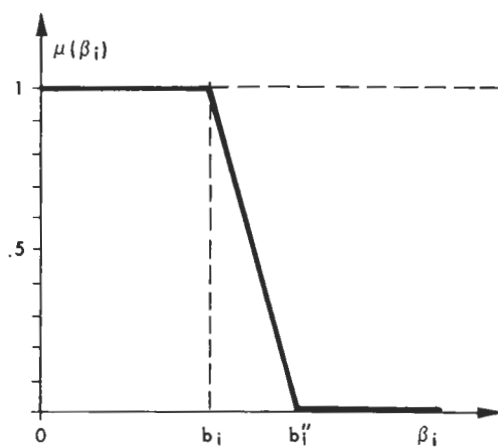
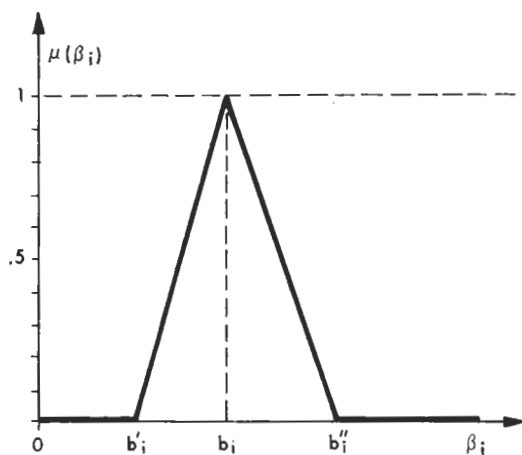


FIGURA 18.18

FIGURA 18.19



$$18.58 \quad z_r^* = \text{MAX } z_r, \quad r = 1, 2, \dots, p$$

entonces por cada z_r^* se establece una ω_r :

$$18.59 \quad \omega_r \leq z_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, p$$

que corresponderá al hiperplano Π_r a partir del cual la función de pertenencia empezará a no ser nula. La elección de estas ω_r es arbitraria pero puede ser justificada, en determinados casos, por la naturaleza del problema. Es el límite del sacrificio que se acepta, por anticipado, para desviarse del óptimo en relación con este criterio; lo cual es muy habitual y cuantificable en el pensamiento de un ejecutivo. Hay que señalar que estas ω_r pueden venir dadas a través de un porcentaje ω_r/z_r^* o bien $(z_r^* - \omega_r)/z_r^*$.

La función de pertenencia de cada criterio será entonces:

$$\begin{aligned} 18.60 \quad \mu_r(\beta_r) &= 0, & \beta_r &\leq \omega_r \\ &= 1 - \frac{z_r^* - \beta_r}{z_r^* - \omega_r}, & \omega_r &\leq \beta_r \leq z_r^* \\ &= 1, & z_r^* &\leq \beta_r \end{aligned}$$

También se puede hacer, sustituyendo:

$$18.61 \quad \beta_r = c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n, \quad r = 1, 2, \dots, p$$

en (18.60):

$$\begin{aligned} 18.62 \quad \mu_r(c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n) &= 0, \\ c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n &\leq \omega_r \\ &= 1 - \frac{z_r^* - (c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n)}{z_r^* - \omega_r}, \\ \omega_r &\leq c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n \leq z_r^* \end{aligned}$$

$$= 0, \quad z_r^* \leq c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n$$

$$r = 1, 2, \dots, p$$

Se puede también escribir (18.62) para la parte no constante:

$$18.63 \quad \mu_r(\beta_r) = \frac{1}{z_r^* - \omega_r} \sum_{j=1}^n c_{rj} x_j - \frac{\omega_r}{z_r^* - \omega_r}$$

$$r = 1, 2, \dots, p$$

Establezcamos la hipótesis de que los criterios deben ser satisfechos según una conjunción "y" representada por el operador $\wedge$ (min) (eventualmente por otro operador que represente a "y" lo que podría hacer desaparecer la linealidad); se deberá considerar entonces:

$$18.64 \quad \mu^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$$

$$= \max_{\beta_r} (\mu_1(\beta_1) \wedge \mu_2(\beta_2) \wedge \dots \wedge \mu_p(\beta_p))$$

Como se trata de buscar un máximo para el programa lineal (18.56-57) se puede escribir:

$$\text{MAX } \lambda$$

$$\lambda \leq \frac{1}{z_1^* - \omega_1} \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j - \frac{\omega_1}{z_1^* - \omega_1}$$

$$\lambda \leq \frac{1}{z_2^* - \omega_2} \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j - \frac{\omega_2}{z_2^* - \omega_2}$$

18.65

$$\lambda \leq \frac{1}{z_p^* - \omega_p} \sum_{j=1}^n c_{pj} x_j - \frac{\omega_p}{z_p^* - \omega_p}$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

18.66

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$\lambda \geq 0, x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Vamos a exponer un nuevo ejemplo, esta vez con tres criterios. Se consideran los tres criterios o funciones económicas:

$$z_1 = x_1 + 5 x_2$$

18.67
$$z_2 = -x_1 + 5 x_2$$

$$z_3 = 8 x_1 - 3 x_2$$

y las cuatro condiciones:

$$(1) \quad -3 x_1 + 4 x_2 \leq 40$$

18.68
$$(2) \quad 5 x_1 + 6 x_2 \leq 98$$

$$(3) \quad 4 x_1 - 3 x_2 \leq 16$$

$$(4) \quad x_1 + 2 x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Los criterios z_1 , z_2 y z_3 han sido establecidos para la obtención de un máximo.

Un rápido examen de la figura 18.20 pone de manifiesto que los óptimos parciales son:

$$z_1^* = z_1(4, 13) = 69$$

18.69
$$z_2^* = z_2(4, 13) = 61$$

$$z_3^* = z_3(10, 8) = 56$$

Se establecen arbitrariamente las desviaciones admisibles siguientes:

$$\text{de } \Pi_1^* \text{ a } \Pi_1' : d = 34$$

18.70
$$\text{de } \Pi_2^* \text{ a } \Pi_2' : d = 16$$

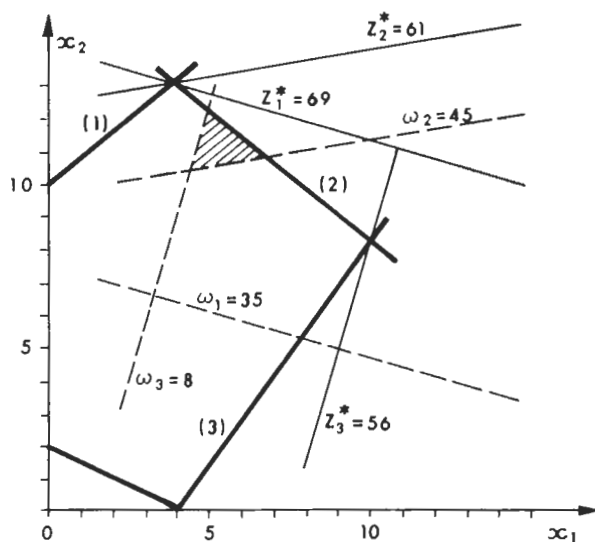


FIGURA 18.20

$$\text{de } \Pi_3^* \text{ a } \Pi_3' : d = 48$$

en donde las Π_r' son las rectas paralelas a las Π_r^* desplazadas, que representan los límites inferiores admisibles en lo borroso. Se tiene pues, con las notaciones utilizadas en (18.60) y expresiones posteriores:

$$\omega_1 = 69 - 34 = 35$$

$$18.71 \quad \omega_2 = 61 - 16 = 45$$

$$\omega_3 = 56 - 48 = 8$$

La zona sombreada de la figura 18.20 indica el subconjunto de puntos en donde puede encontrarse el óptimo global.

Para cada uno de los criterios z_1, z_2, z_3 , se obtienen sucesivamente:

$$18.72 \quad \mu_1(x_1 + 5x_2) = 0, \quad 0 \leq x_1 + 5x_2 \leq 35$$

$$= 1 - \frac{69 - x_1 - 5x_2}{34}, \quad 35 \leq x_1 + 5x_2 \leq 69$$

$$= 1, \quad 69 \leq x_1 + 5x_2$$

$$18.73 \quad \mu_2(-x_1 + 5x_2) = 0, \quad 0 \leq -x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$= 1 - \frac{61 + x_1 - 5x_2}{16}, \quad 45 \leq -x_1 + 5x_2 \leq 61$$

$$= 1, \quad 61 \leq -x_1 + 5x_2$$

$$18.74 \quad \mu_3(8x_1 - 3x_2) = 0, \quad 0 \leq 8x_1 - 3x_2 \leq 8$$

$$= 1 - \frac{56 - 8x_1 + 3x_2}{48}, \quad 8 \leq 8x_1 - 3x_2 \leq 56$$

$$= 1, \quad 56 \leq 8x_1 - 3x_2$$

La solución óptima corresponderá a:

$$18.75 \quad \mu^*(x_1, x_2) = \underset{x_1, x_2}{\text{MAX}} (\mu_1(x_1 + 5x_2) \wedge \mu_2(-x_1 + 5x_2) \\ \wedge \mu_3(8x_1 - 3x_2))$$

Las funciones de pertenencia (18.72, 73 y 74) se pueden escribir también de la siguiente manera:

$$18.76 \quad \mu_1(x_1 + 5x_2) = \frac{1}{34} (x_1 + 5x_2 - 35)$$

$$18.77 \quad \mu_2(-x_1 + 5x_2) = \frac{1}{16} (-x_1 + 5x_2 - 45)$$

$$18.78 \quad \mu_3(8x_1 - 3x_2) = \frac{1}{48} (8x_1 - 3x_2 - 8)$$

El programa lineal multicriterio se escribirá entonces:

$$\text{MAX } \lambda$$

$$\lambda \leq \frac{x_1}{34} + \frac{5x_2}{34} - \frac{35}{34}$$

$$18.79 \quad \lambda \leq -\frac{x_1}{16} + \frac{5x_2}{16} - \frac{45}{16}$$

$$\lambda \leq \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{16} - \frac{1}{6}$$

$$18.80 \quad \begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 98 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 16 \\ \lambda &\geq 0, x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

en donde, de manera expresa hemos separado la condición $x_1 + 2x_2 \leq 4$ la cual se observa de manera visible, en la figura 18.20, que no interviene. Por otra parte, dado que toda solución debe estar situada en la zona rayada, sólo se conservará en (18.68) la condición $5x_1 + 6x_2 \leq 98$. Finalmente el programa lineal quedará limitado, después de la reducción de denominadores y haciendo:

$$18.81 \quad \lambda = u - 3$$

al siguiente:

$$\text{MAX } u$$

$$18.82 \quad \begin{aligned} 34u - x_1 - 5x_2 &\leq 67 \\ 16u + x_1 - 5x_2 &\leq 3 \\ 48u - 8x_1 + 3x_2 &\leq 136 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 98 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hay que señalar que la condición $\lambda \geq 0$ de (18.80) está contenida en las condiciones relativas a λ . Asimismo la condición $u \geq 3$ de (18.81) se halla contenida en las condiciones (18.82) relativas a u .

Las figuras desde 18.21 hasta 18.24 presentan los cálculos en los que, como se hace de manera tradicional, se han incluido 4 variables de holgura x_3, x_4, x_5 y x_6 no negativas. Se tiene finalmente el programa lineal:

$$\text{MAX } u$$

$$34 u - x_1 - 5 x_2 + x_3 = 67$$

18.84

$$16 u + x_1 - 5 x_2 + x_4 = 3$$

$$48 u - 8 x_1 + 3 x_2 + x_5 = 136$$

$$5 x_1 + 6 x_2 + x_6 = 98$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u \geq 0$$

Se ha obtenido

18.85

$$\text{MAX } u = 3.217$$

en donde:

18.86

$$\text{MAX } \lambda = 0.217$$

La figura 18.25 pone de manifiesto los resultados obtenidos:

FIGURA 18.21

fila	u	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)	34	-1	-5	1				67	$67/34 = 1.97$
(2)	16	1	-5		1			3	$3/16 = 0.18$
(3)	48	-8	3			1		136	$136/48 = 2.83$
(4)	0	5	6				1	98	$98/0 \rightarrow \infty$
	-1							-u	

↑

←

fila	u	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)		-3.125	5.625	1	-2.125			60.625	$60.625/5.625 = 10.77$
(2)	1	0.0625	-0.3125		0.0625			0.1875	negativo
(3)		-11	(18)		-3	1		127	$127/18 = 7.05$
(4)		5	6		0		1	98	$98/6 = 16.33$
		0.0625	-0.3125		0.0625			-u + 0.1875	

FIGURA 18.22

fila	u	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)		0.3124		1	-1.1879	-0.3121		20.9379	$20.9379/0.3124 = 67.02$
(2)	1	-0.1284			0.0105	0.0173		2.3923	negativo
(3)		-0.6111	1		-0.1666	0.0555		7.0550	negativo
(4)		8.6666			1	-0.3333	1	55.6666	$55.6666/8.6666 = 6.72$
		-0.1284			0.0103	0.0173		+ 2.3923	

FIGURA 18.23

FIGURA 18.24

fila	u	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	segundo miembro	relación que proporciona la elección de la fila
(1)				1	-1.2233	-0.3005	-0.0366	18.9307	
(2)	1				0.0253	0.0124	0.0148	3.217	
(3)			1		0.0962	0.0321	0.0704	10.9801	
(4)		1			0.1153	-0.0384	0.1153	6.4231	
					0.0253	0.0127	0.0148	+ 3.217	

FIN

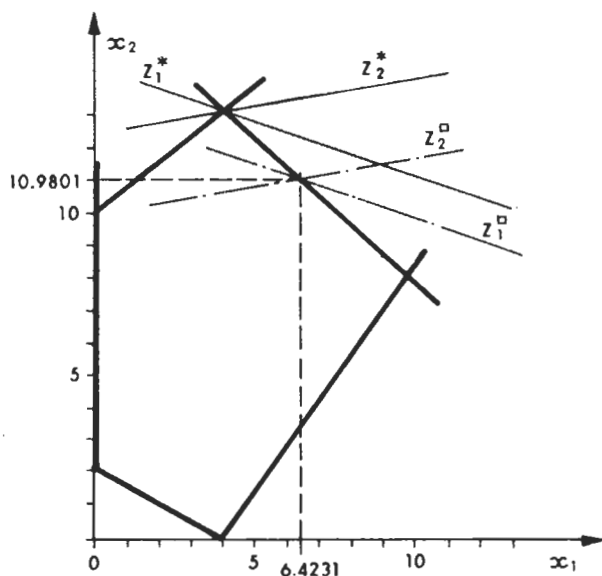


FIGURA 18.25

Al valor óptimo de λ le corresponde el punto:

$$18.87 \quad (x_1^\square, x_2^\square) = (6.4231, 10.9801)$$

y los criterios z_1, z_2, z_3 toman valores:

$$\begin{aligned} 18.88 \quad z_1^\square(6.4231, 10.9801) &= x_1^\square + 5 x_2^\square \\ &= 6.4231 + 5 \times 10.9801 \\ &= 61.3236 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.89 \quad z_2^\square(6.4231, 10.9801) &= -x_1^\square + 5 x_2^\square \\ &= -6.4231 + 5 \times 10.9801 \\ &= 48.4774 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18.90 \quad z_3^{\square} (6.4231, 10.9801) &= 8 x_1^{\square} - 3 x_2^{\square} \\
 &= 8 \times 6.4231 - 3 \times 10.9801 \\
 &= 18.4445
 \end{aligned}$$

Las holguras de esta solución son:

$$\begin{aligned}
 z_1^* - z_1^{\square} &= 69 - 61.3236 = 7.6764 \\
 18.91 \quad z_2^* - z_2^{\square} &= 61 - 48.4774 = 12.5226 \\
 z_3^* - z_3^{\square} &= 56 - 18.4445 = 37.5555
 \end{aligned}$$

o también con relación a $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ obtenidos en (18.71)

$$\begin{aligned}
 z_1^{\square} - \omega_1 &= 61.3236 - 35 = 26.3236 \\
 18.92 \quad z_2^{\square} - \omega_2 &= 48.4774 - 45 = 3.4774 \\
 z_3^{\square} - \omega_3 &= 18.4445 - 8 = 10.4445
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1^{\square} - \omega_1}{z_1^* - \omega_1} &= \frac{26.3236}{34} = 0.774 \\
 18.93 \quad \frac{z_2^{\square} - \omega_2}{z_2^* - \omega_2} &= \frac{3.4774}{16} = 0.217 \\
 \frac{z_3^{\square} - \omega_3}{z_3^* - \omega_3} &= \frac{10.4445}{48} = 0.217
 \end{aligned}$$

Los valores de las funciones de pertenencia (18.76), (18.77) y (18.78) para la solución obtenida vienen dados por (18.93). Se obtienen también sustituyendo (18.87) en (18.76), (18.77) y (18.78).

En efecto:

$$\mu_1 (x_1^{\square} + 5 x_2^{\square}) = \frac{x_1^{\square} + 5 x_2^{\square} - 35}{34}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6.4231 + 5 \times 10.9801 - 35}{34} \\
 &= 0.774 \\
 18.94 \quad \mu_2 (-x_1^{\square} + 5 x_2^{\square}) &= \frac{-x_1^{\square} + 5 x_2^{\square} - 45}{16} \\
 &= \frac{-6.4231 + 5 \times 10.9801 - 45}{16} \\
 &= 0.217 \\
 \mu_3 (8 x_1^{\square} - 3 x_2^{\square}) &= \frac{8 x_1^{\square} - 3 x_2^{\square} - 8}{48} \\
 &= \frac{8 \times 6.4231 - 3 \times 10.9801 - 8}{48} \\
 &= 0.217 \\
 18.95 \quad \mu(x_1^{\square}, x_2^{\square}) &= \mu_1 (x_1^{\square} + 5 x_2^{\square}) \wedge \mu_2 (-x_1^{\square} + 5 x_2^{\square}) \\
 &\quad \wedge \mu_3 (8 x_1^{\square} - 3 x_2^{\square}) = \\
 &= 0.774 \wedge 0.217 \wedge 0.217 = 0.217
 \end{aligned}$$

Finalmente se observa que, en este problema, la solución $(x_1^{\square}, x_2^{\square}) = (6.4231, 10.9801)$ corresponde a un punto situado en la recta que pasa por (4,13) y (10,8) y que se halla en el límite de la condición $5 x_1 + 6 x_2 \leq 98$. En efecto:

$$18.96 \quad 5 x_1^{\square} + 6 x_2^{\square} = 5 \times 6.4231 + 6 \times 10.9801 = 98$$

MINIMIZACION DE UN PROGRAMA LINEAL CON VARIOS CRITERIOS

Veamos ahora el supuesto de obtención de un mínimo en el caso de un programa lineal con varios criterios.

Se parte de un programa lineal con varias funciones económicas:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \dots + c_{1n} x_n \\ z_2 &= c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \dots + c_{2n} x_n \\ &\dots \dots \dots \\ z_p &= c_{p1} x_1 + c_{p2} x_2 + \dots + c_{pn} x_n \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \\ x_i &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Se supone que, para el conjunto de las condiciones, existe por lo menos una solución.

Demos por resueltos los p programas lineales correspondientes a cada uno de los criterios o funciones económicas y que se hayan obtenido los valores mínimos correspondientes:

$$18.99 \quad z_r^* = \text{MIN } z_r \quad , \quad r = 1, 2, \dots, p$$

Entonces, para cada z_r , se establecerá una ω_r :

$$18.100 \quad \omega_r \geq z_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, p$$

que corresponderá a un hiperplano Π_r a partir del cual la función de pertenencia empezará a no ser nula. La elección de estas ω_r es arbitraria, pero puede quedar justificada por la naturaleza del problema. Subrayamos de nuevo que las ω_r pueden ser expresadas en porcentajes z_r^*/ω_r o bien $(\omega_r - z_r^*)/\omega_r$.

La función de pertenencia de cada criterio es:

$$\begin{aligned} 18.101 \quad \mu_r(\beta_r) &= 1 & , \beta_r \leq z_r^* \\ &= 1 - \frac{\beta_r - z_r^*}{\omega_r - z_r^*} & , z_r^* \leq \beta_r \leq \omega_r \\ &= 0 & , \beta_r \geq \omega_r \end{aligned}$$

También se obtiene sustituyendo:

$$18.102 \quad \beta_r = c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n \quad r = 1, 2, \dots, p$$

en (18.101):

$$\begin{aligned} 18.103 \quad \mu_r (c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n) &= 1, \\ c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n &\leq z_r^* \\ &= 1 - \frac{c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n - z_r^*}{\omega_r - z_r^*}, \\ z_r^* &\leq c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n \leq \omega_r \\ &= 0, \quad c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n \geq \omega_r \end{aligned}$$

La fórmula (18.101) puede escribirse, en lo que se refiere a la segunda línea, de la siguiente manera:

$$18.104 \quad \mu_r (\beta_r) = \frac{\omega_r}{\omega_r - z_r^*} - \frac{1}{\omega_r - z_r^*} \sum_{j=1}^n c_{rj} x_j$$

$$r = 1, 2, \dots, p$$

Si se establece la misma hipótesis que para (18.64), se tomará en consideración el programa lineal siguiente:

MAX λ

$$\lambda \leq \frac{\omega_1}{\omega_1 - z_1^*} - \frac{1}{\omega_1 - z_1^*} \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j$$

$$18.105 \quad \lambda \leq \frac{\omega_2}{\omega_2 - z_2^*} - \frac{1}{\omega_2 - z_2^*} \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j$$

.....

$$\lambda \leq \frac{\omega_p}{\omega_p - z_p^*} - \frac{1}{\omega_p - z_p^*} \sum_{j=1}^n c_{pj} x_j$$

$$\begin{aligned}
 & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\
 & \lambda \geq 0 \quad , \quad x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Este programa lineal se resolverá por uno de los métodos tradicionales derivados del método del simplex con la inclusión de variables de holgura y en caso necesario de variables artificiales. Veamos un ejemplo numérico.

Se considera el ámbito definido por las condiciones:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 5 x_1 - 3 x_2 \geq -11 \\
 (2) \quad & 2 x_1 + x_2 \geq 11 \\
 (3) \quad & 2 x_1 + 5 x_2 \geq 34 \\
 (4) \quad & x_1 + 3 x_2 \geq 14
 \end{aligned}$$

y los dos criterios

$$18.108 \quad z_1 = 8 x_1 + x_2$$

$$18.109 \quad z_2 = x_1 + 4 x_2$$

Un rápido cálculo o el estudio de la figura 18.26, permite obtener:

$$\begin{aligned}
 18.110 \quad & z_1^* = \text{MIN} (8 x_1 + x_2) = 23 \\
 & \text{para } x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18.111 \quad & z_2^* = \text{MIN} (x_1 + 4 x_2) = 16 \\
 & \text{para } x_1 = 8 \text{ y } x_2 = 2
 \end{aligned}$$

Si se establecen como valores límite admisibles:

$$18.112 \quad \omega_1 = 48 \quad , \quad \omega_2 = 31$$

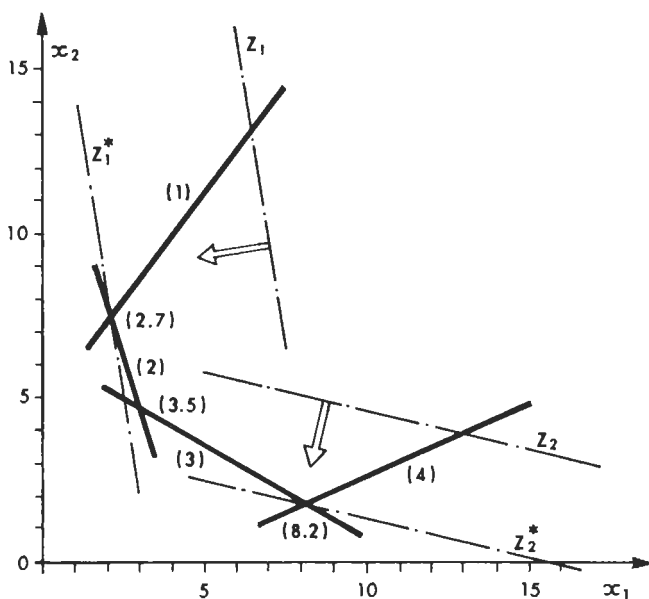


FIGURA 18.26

Se obtienen las funciones de pertenencia:

$$\begin{aligned}
 18.113 \quad \mu_1(\beta_1) &= 1, & \beta_1 &\leq 23 \\
 &= 1 - \frac{\beta_1 - 23}{48 - 23}, & 23 &\leq \beta_1 \leq 48 \\
 &= 0, & \beta_1 &\geq 48 \\
 18.114 \quad \mu_2(\beta_2) &= 1, & \beta_2 &\leq 16 \\
 &= 1 - \frac{\beta_2 - 16}{31 - 16}, & 16 &\leq \beta_2 \leq 31 \\
 &= 0, & \beta_2 &\geq 31
 \end{aligned}$$

Se resolverá entonces el programa lineal siguiente:

$$18.116 \quad \text{MAX } \lambda$$

$$\lambda \leq \frac{48}{25} - \frac{8}{25} x_1 - \frac{1}{25} x_2$$

$$18.117$$

$$\lambda \leq \frac{31}{15} - \frac{1}{15} x_1 - \frac{4}{15} x_2$$

$$5 x_1 - 3 x_2 \geq -11$$

$$2 x_1 + x_2 \geq 11$$

$$18.118$$

$$3 x_1 + 5 x_2 \geq 34$$

$$x_1 + 3 x_2 \geq 14$$

$$\lambda \geq 0, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Un cálculo a través de una tabla del simplex proporciona:

$$18.119 \quad \text{MAX } \lambda = 0.5876$$

con:

$$18.120 \quad x_1^{\square} = 3.58219$$

$$x_2^{\square} = 4.65068$$

y:

$$18.121 \quad z_1^{\square} = 33.3082$$

$$z_2^{\square} = 22.1849$$

La figura 18.27 presenta la posición de $z_1^{\square}$ y $z_2^{\square}$ que se cortan sobre la recta $3 x_1 + 5 x_2 = 34$.

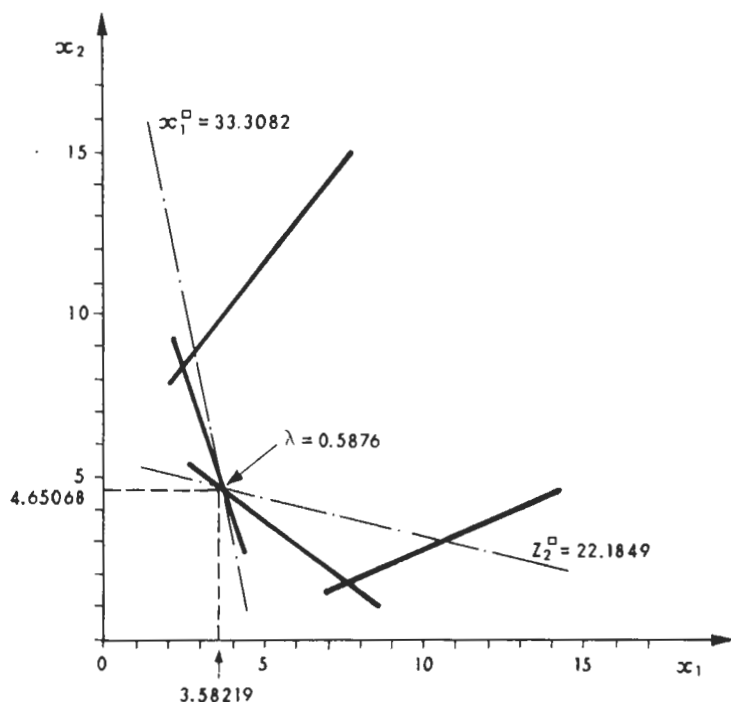


FIGURA 18.27

ASOCIACION DE CRITERIOS CON AYUDA DE OPERADORES DIVERSOS

Vamos a examinar ahora el caso en que pueden asociarse los criterios con ayuda de operadores diferentes al $\wedge$.

Si los criterios se proponen con la conjunción. $\wedge$ (min) debe escribirse:

$$18.122 \quad \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \mu_1(\beta_1) \wedge \mu_2(\beta_2) \wedge \dots \wedge \mu_p(\beta_p)$$

Resulta posible también que se propongan criterios con la conjunción "y/o" representados por $\vee$ (max), se escribirá entonces:

$$18.123 \quad \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \mu_1(\beta_1) \vee \mu_2(\beta_2) \vee \dots \vee \mu_p(\beta_p)$$

Podemos utilizar el teorema de De Morgan de la siguiente manera:

$$18.124 \quad 1 - \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = (1 - \mu_1(\beta_1)) \wedge (1 - \mu_2(\beta_2)) \wedge \dots \wedge (1 - \mu_p(\beta_p))$$

En este caso las inecuaciones (18.65) se convertirán en:

$$18.125 \quad 1 - \lambda \leq \frac{1}{z_r^* - \omega_r} \sum_{j=1}^n c_{rj} x_j - \frac{\omega_r}{z_r^* - \omega_r} \quad , \quad r = 1, 2, \dots, p$$

con

$$18.126 \quad \bar{\mu}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \text{MAX}(1 - \lambda)$$

de donde:

$$18.127 \quad \mu^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = 1 - \text{MAX}(1 - \lambda) = \text{MIN } \lambda$$

En lo que respecta a la conjunción "y", se puede también utilizar el producto (.), de lo que resulta:

$$18.128 \quad \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \mu_1(\beta_1) \cdot \mu_2(\beta_2) \cdot \dots \cdot \mu_p(\beta_p)$$

En el supuesto de obtención de un mínimo deberá utilizarse (18.103) en lugar de (18.62) en el segundo miembro de (18.128).

Finalmente, el programa económico multicriterio en el que se emplea (18.128) será:

$$18.129 \quad \text{MAX} \left[\prod_{r=1}^p \left(1 - \frac{z_r - (c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \dots + c_{rn} x_n)}{z_r^* - \omega_r} \right) \right]$$

$$18.130 \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$18.131 \quad x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Este tipo de programas ya no son programas lineales dado que la fun-

ción económica al constituir el producto de los criterios (18.129) es una función de grado p por lo menos para una de las variables x_j y las condiciones continúan siendo lineales. En los momentos actuales estos programas pueden resolverse perfectamente con la ayuda de los ordenadores.

Como se ha señalado anteriormente es posible utilizar (entre otras) en lugar del producto $(.)$ una de sus generalizaciones, por ejemplo el operador $\dot{\gamma}$ de Hamacher:

$$18.132 \quad a \dot{\gamma} b = \frac{a \cdot b}{\gamma + (1 - \gamma)(a \hat{+} b)}, \quad a, b \in [0, 1] \\ \gamma \in [0, \infty)$$

que proporciona:

$$18.133 \quad \gamma = 1 \quad ; \quad a \dot{\gamma} b = a \cdot b$$

$$18.134 \quad \gamma = 2 \quad ; \quad a \dot{\gamma} b = \frac{a \cdot b}{1 + a \cdot b}$$

Todo ello con objeto de parametrizar el producto. Se escribirá entonces:

$$18.135 \quad \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \mu_1(\beta_1) \dot{\gamma} \mu_2(\beta_2) \dot{\gamma} \dots \dot{\gamma} \mu_p(\beta_p)$$

Evidentemente la construcción del algoritmo para pasar a un programa de informática resulta sensiblemente más difícil de preparar.

Son muchas las posibilidades de generalización. Veamos un ejemplo en donde se utiliza el operador $(.)$, producto simple (1).

(1) Este ejemplo ha sido tomado del artículo de H. J. ZIMMERMANN citado anteriormente, pág. 188.

Se parte de un programa lineal cuyas condiciones son:

$$\begin{aligned}
 & -x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
 18.136 \quad & 4x_1 + x_2 \leq 45 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 30 \qquad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

y los dos criterios:

$$18.137 \qquad z_1 = -x_1 + 2x_2$$

$$18.138 \qquad z_2 = 2x_1 + x_2$$

Un rápido cálculo proporciona los respectivos máximos:

$$\begin{aligned}
 18.139 \quad & z_1^* = 14 \quad \text{con } x_1 = 0 \quad x_2 = 7 \\
 & z_2^* = 21 \quad \text{con } x_1 = 9 \quad x_2 = 3
 \end{aligned}$$

se toma:

$$18.140 \qquad \omega_1 = -3, \quad \omega_2 = 7$$

Las fórmulas dan:

$$\begin{aligned}
 18.141 \quad & \mu(-x_1 + 2x_2) = 0 \qquad , -x_1 + 2x_2 \leq -3 \\
 & = \frac{-x_1 + 2x_2 + 3}{17} \qquad , -3 \leq -x_1 + 2x_2 \leq 14 \\
 & = 1 \qquad , 14 \leq -x_1 + 2x_2 \\
 18.142 \quad & \mu(2x_1 + x_2) = 0 \qquad , 2x_1 + x_2 \leq 7 \\
 & = \frac{2x_1 + x_2 - 7}{14} \qquad , 7 \leq 2x_1 + x_2 \leq 21 \\
 & = 1 \qquad , 21 \leq 2x_1 + x_2
 \end{aligned}$$

La utilización del operador ($\wedge$) para los dos criterios nos lleva al siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX } \lambda \\
 & \lambda \leq -0.05882 x_1 + 0.117 x_2 + 0.1764 \\
 18.143 \quad & \lambda \leq 0.1429 x_1 + 0.0174 x_2 - 0.5 \\
 & -x_1 + 3 x_2 \leq 21 \\
 & x_1 + 3 x_2 \leq 27 \\
 18.144 \quad & 4 x_1 + 3 x_2 \leq 45 \\
 & 3 x_1 + x_2 \leq 30 \qquad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

del que se obtiene:

$$\begin{aligned}
 18.145 \quad & \max \lambda = 0.774 \quad \text{con} \quad x_1^{\square} = 5.03 \quad , \quad x_2^{\square} = 7.32 \\
 & z_1^{\square} = 9.61 \quad , \quad z_2^{\square} = 17.38
 \end{aligned}$$

Si se considera ahora el programa no lineal que corresponde al operador ($\cdot$) en lugar de ($\wedge$) para representar "y", se tiene:

$$18.146 \quad \text{MAX} \left(\frac{-x_1 + 2 x_2 + 3}{17} \right) \cdot \left(\frac{2 x_1 + x_2 - 7}{14} \right)$$

lo que dará, al adjuntar las condiciones:

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX } \eta \\
 18.147 \quad & \eta = \frac{1}{238} (-2 x_1^2 + 3 x_1 x_2 + 2 x_2^2 + 13 x_1 - 11 x_2 - 21) \\
 & -x_1 + 3 x_2 \leq 21 \\
 & x_1 + 3 x_2 \leq 27 \\
 & 4 x_1 + 3 x_2 \leq 45
 \end{aligned}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Este programa cuadrático da lugar a:

$$18.148 \quad \text{MAX } \eta = 0.56 \quad \text{con } x_1^{\square} = 5.7, \quad x_2^{\square} = 7.1 \\ z_1^{\square} = 8.5, \quad z_2^{\square} = 18.5$$

En su artículo, H. J. Zimmermann demuestra varios teoremas relativos a este tema, a los que se puede recurrir en caso necesario.

Se pueden desarrollar ahora, a través de un ejemplo, una categoría de problemas con evidente conexión con lo expuesto:

$$\text{MAX } z_1 = 15x_1 + 17x_2$$

$$18.149 \quad \text{a) } (1) \quad x_1 \leq 7$$

$$(2) \quad 3x_1 + 7x_2 \leq 84 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{MAX } z_2 = 5x_1 + x_2$$

$$18.150 \quad \text{b) } (1) \quad 10x_1 + 9x_2 \leq 120$$

$$(2) \quad x_2 \leq 10 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

La solución del programa (18.149) representado en la figura 18.28 es:

$$18.151 \quad x_1^* = 7, \quad x_2^* = 9, \quad z_1^* = 258$$

La solución del programa (18.150) representado en la figura 18.29 es:

$$18.152 \quad x_1^* = 12, \quad x_2^* = 0, \quad z_2^* = 60$$

Busquemos ahora el programa lineal con dos criterios z_1 y z_2 que satisfice todas las condiciones de los dos programas.

Resulta suficiente entonces, si D_1 es el dominio de todas las soluciones del programa (18.149) y si D_2 es el de todas las soluciones del programa (18.150), considerar la intersección $D_1 \cap D_2$ con lo que hemos hallado un programa lineal único con dos criterios:

$$\text{MAX } z_1 = 15x_1 + 17x_2$$

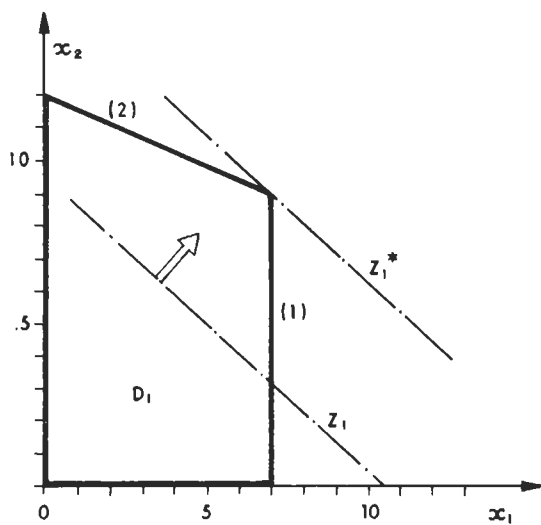
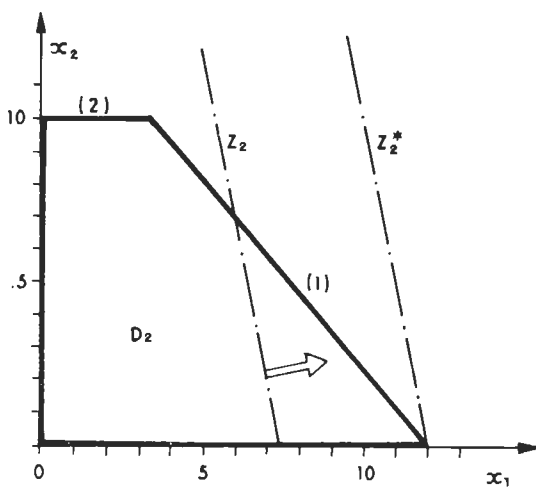


FIGURA 18.28

FIGURA 18.29



$$\text{MAX } z_2 = 5x_1 + x_2$$

$$18.153 \quad x_1 \leq 7$$

$$3x_1 + 7x_2 \leq 84$$

$$10x_1 + 9x_2 \leq 120$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

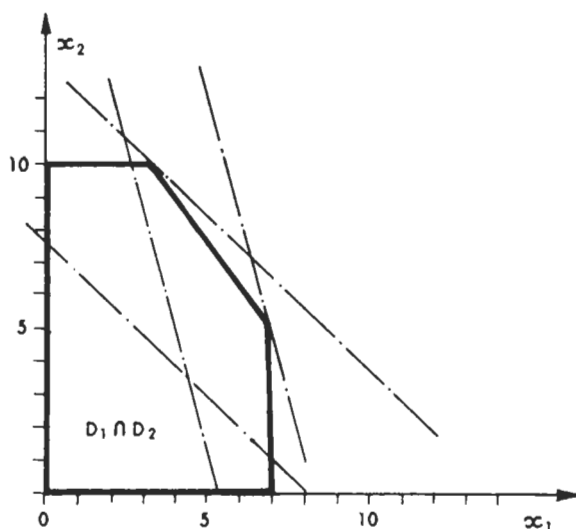


FIGURA 18.30

Se observará que las soluciones óptimas separadas han cambiado (figuras 18.28, 29 y 30). La solución del primer criterio que corresponde a (18.149) es ahora:

$$18.154 \quad x_1^* = 3, \quad x_2^* = 10, \quad z_1^* = 215 \neq 258$$

y la del segundo que corresponde a (18.150) se ha convertido en:

$$18.155 \quad x_1^* = 7, \quad x_2^* = 5.555, \quad z_2 = 40.555 \neq 60$$

Para obtener la solución borrosa a estos dos programas, se puede recurrir al método descrito anteriormente.

Volvamos al caso general. Dados s programas lineales $P_1, P_2, \dots, P_s$ en donde las funciones económicas son respectivamente $z_1, z_2, \dots, z_s$ y los dominios de las condiciones $D_1, D_2, \dots, D_s$, se tiene el programa lineal multicriterio siguiente:

18.156 funciones económicas: $z_1, z_2, \dots, z_s$

18.157 dominio del conjunto de condiciones: $D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_s$

Nos detenemos en este punto, en lo referente a las aplicaciones de la programación lineal al campo borroso. Quedan otros muchos aspectos para la investigación, algunos de los cuales han desembocado, entre otros, en la programación borrosa no lineal, programación borrosa en enteros o mixtos, programación en donde las variables y/o los coeficientes son borrosos, programación borrosa paramétrica... La puerta se halla abierta y el horizonte se halla en el infinito.

Juegos rectangulares con ganancias inciertas y multicriterios

PLANTEAMIENTO DE LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA CON DATOS INCIERTOS

La teoría de los subconjuntos borrosos se ha ramificado también hasta la teoría de los juegos de estrategia según la concepción de VON NEUMANN y MORGENTHAU. Si un juego de estrategia no es o es poco repetitivo, suele tratarse en base a las operaciones MAX y MIN para colocarse en las condiciones de la más perfecta prudencia, dadas las informaciones que se poseen sobre el comportamiento del adversario. Si el juego es repetitivo y suficientemente repetitivo se utilizará la teoría de probabilidades para colocarse estadísticamente en posición de prudencia óptima. Una estrategia simple se trata de la misma manera que con los subconjuntos borrosos, una estrategia mixta como se hace con las leyes de probabilidad.

Y la teoría de juegos puede también enriquecerse incluyendo modelos con datos (ganancias) inciertos y criterios suplementarios que ya no son únicos (como el de las ganancias). Y, de hecho, la teoría de juegos, que constituye el fundamento de muchos modelos económicos, puede realizar extensiones en una infinidad de direcciones en las que pueden tenerse en cuenta lo incierto y lo subjetivo. Vamos a describir solamente algunos ejemplos representativos susceptibles de generalización.

Podemos iniciar este tema con el estudio de juegos rectangulares con ganancia borrosa (1).

(1) Para más información sobre los elementos necesarios de la teoría de juegos puede consultarse: KAUFMANN, A.: *Métodos y modelos de la investigación de operaciones*. Ed. CECSA, Tomo II.

Supongamos que la ganancia de un juego rectangular sea un subconjunto borroso $\underline{G}_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Partamos de un ejemplo en el que $m = 2$ y $n = 2$, en donde las $\underline{G}_{ij}$ toman sus valuaciones en $[0, 1]$ y son subconjuntos borrosos de $E = \{a, b, c\}$. Se designa por M_{ij} la matriz construida con las ganancias $\underline{G}_{ij}$. Se llamará A al jugador que elige las filas y B al que elige las columnas de M_{ij} . Por hipótesis, se va a suponer que las ganancias (positivas o negativas) son pagos de B a A.

Sea pues un referencial:

$$19.1 \quad E = \{a, b, c\}$$

y el juego rectangular siguiente en el que, sean cuales sean las elecciones de A y de B, B es el jugador que transferirá a A y jamás A va a transferir a B (más adelante veremos cómo puede abandonarse esta regla injusta).

19.2

A

		(1)			(2)		
		a	b	c	a	b	c
(1)		.4	1	.2	.3	.4	1
(2)		.7	0	.4	.8	.5	.5

De esta manera, si A elige la fila (2) y B la columna (1), entonces se afectará a B y A el subconjunto borroso siguiente:

$$19.3 \quad \underline{G}_{21} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline .7 & 0 & .4 \\ \hline \end{array}$$

Cabe preguntarse si una generalización de este tipo puede conducirnos a los conceptos de estrategia pura y de estrategia mixta fundamentales en la teoría de juegos de estrategia. Recordemos primero que una estrategia pura es la elección de una y de una sola fila por A y de una y una sola columna por B; mientras que una estrategia mixta consiste en la elección por A de una ponderación convexa de filas y para B de una ponderación convexa de columnas. En último término, una estrategia pura es un caso particular de estrategia mixta.

En primer lugar, se plantea cómo concebir un comportamiento racional de A y de B si las ganancias (transferencias) no se hallan constituidas por elementos de un conjunto totalmente ordenado sino por subconjun-

tos borrosos en los que su estructura es la de un retículo distributivo. Se puede, por ejemplo, suponer el razonamiento siguiente. Supongamos que A puede realizar la comparación de dos subconjuntos borrosos $\underline{G}$ y $\underline{G}'$ del mismo referencial y consideremos dos casos:

- 1) $\underline{G}$ domina estrictamente $\underline{G}'$, es decir $\underline{G} \supset \supset \underline{G}'$, entonces A prefiere $\underline{G}$ a $\underline{G}'$.
- 2) $\underline{G}$ y $\underline{G}'$ no son comparables, entonces A establece subjetivamente su preferencia o utiliza un criterio (o varios) para que $\underline{G}$ y $\underline{G}'$ sean comparables. Y B hará lo mismo con su sistema personal de preferencia. Hay que señalar que, si $\underline{G} = \underline{G}'$, son equivalentes a priori.

Si A elige una fila utilizando implícita o explícitamente su procedimiento de preferencia subjetiva, en un juego tal como (19.2), se le considera como un jugador "maximizante" y recíprocamente, si B elige una columna utilizando su procedimiento preferente, que no coincide forzosamente con el de A, será considerado como un jugador "minimizante". Esta distinción es arbitraria pero habitual. Las mismas consideraciones se realizan cuando se trata de estrategias mixtas.

Un procedimiento, entre otros muchos, para transformar un retículo distributivo en un orden total consiste en calcular la posibilidad en relación con una ley de posibilidad que cada uno determina; cada jugador puede tener la suya propia o la misma que el otro.

Una interpretación de este enfoque es que cada jugador tendría una función de posibilidad ideal y calcularía con ella la posibilidad de cada transferencia.

Supongamos por ejemplo, que en el juego (19.2) A se impone como ley de posibilidad ideal:

$$19.4 \quad f_A(x) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b & c \\ \hline & 1 & .3 & .7 \\ \hline \end{array}$$

En este caso utilizará (19.4) para calcular las cuatro posibilidades relativas a las transferencias:

$$19.5 \quad v_A(\underline{G}_{ij}) = \bigvee_x (\mu_{\underline{G}_{ij}}(x) \wedge \mu_{f_A}(x))_{x \in \{a,b,c\}}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 v_A(\underline{G}_{11}) &= (.4 \wedge 1) \vee (1 \wedge .3) \vee (.2 \wedge .7) = .4 \\
 v_A(\underline{G}_{12}) &= (.3 \wedge 1) \vee (.4 \wedge .3) \vee (1 \wedge .7) = .7 \\
 v_A(\underline{G}_{21}) &= (.7 \wedge 1) \vee (0 \wedge .3) \vee (.4 \wedge .7) = .7 \\
 v_A(\underline{G}_{22}) &= (.8 \wedge 1) \vee (.5 \wedge .3) \vee (.5 \wedge .7) = .8
 \end{aligned}$$

En cuyo caso se ha llegado a un juego rectangular en el que las ganancias son números que pertenecen ahora a $[0, 1]$:

$$\begin{array}{c}
 \text{B} \\
 (1) \quad (2) \\
 \begin{array}{c} \text{A} \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline .4 & .7 \\ \hline .7 & .8 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

No existe razón alguna para que B elija la misma ley que A. Por ejemplo, si B elige la siguiente ley:

$$f_B(x) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline .1 & 1 & .4 \\ \hline \end{array}$$

se obtendrá:

$$\begin{aligned}
 v_B(\underline{G}_{11}) &= (.4 \wedge .1) \vee (1 \wedge 1) \vee (.2 \wedge .4) = 1 \\
 v_B(\underline{G}_{12}) &= (.3 \wedge .1) \vee (.4 \wedge 1) \vee (1 \wedge .4) = .4 \\
 v_B(\underline{G}_{21}) &= (.7 \wedge .1) \vee (0 \wedge 1) \vee (.4 \wedge .4) = .4 \\
 v_B(\underline{G}_{22}) &= (.8 \wedge .1) \vee (.5 \wedge 1) \vee (.5 \wedge .4) = .5
 \end{aligned}$$

en donde el juego rectangular es:

$$\begin{array}{c}
 \text{B} \\
 (1) \quad (2) \\
 \begin{array}{c} \text{A} \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & .4 \\ \hline .4 & .5 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Si A elige en su juego (19.7):

$$\text{MAX}_i [\text{MIN}_j v_A(i, j)]$$

tendrá la seguridad de recibir por lo menos una valuación de 0.7 con la fila (2) como consecuencia de su estimación en relación con su ley de posibilidad ideal (19.4).

Por su parte, si B elige en su juego (19.10):

$$19.12 \quad \min_j [\max_i v_B(i, j)]$$

se asegurará de que no entrega más de 0.5 con la columna (2) como consecuencia de su estimación en relación con su ley de posibilidad (19.8).

Se observa que el juego rectangular no es el mismo para A y para B; se trata de un juego rectangular con suma no nula.

Resulta posible plantear otro procedimiento de estimación distinto de la ley de posibilidad definida por (19.5). Por ejemplo, se puede considerar la distancia existente entre el pago ideal y el subconjunto borroso que se puede recibir. La distancia elegida puede ser la distancia relativa de Hamming:

$$19.13 \quad \delta(f_A(x), G_{ij}(x)) = \frac{1}{n} \sum_x |f_A(x) - G_{ij}(x)|$$

$$n = \text{card } E$$

$$x \in E$$

Y lo mismo para B sustituyendo A por B. Resulta así, tomando (19.4) para A y (19.8) para B.

19.14

$$\delta \left(\begin{bmatrix} 1 & .3 & .7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .4 & 1 & .2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} (|1 - .4| + |.3 - 1| + |.7 - .2|)$$

$$= \frac{1}{3} (.6 + .7 + .5) = 0.6$$

$$\delta \left(\begin{bmatrix} 1 & .3 & .7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .3 & .4 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} (|1 - .3| + |.3 - .4| + |.7 - 1|)$$

$$= \frac{1}{3} (.7 + .1 + .3) = 0.366$$

$$\delta (\begin{bmatrix} 1 & .3 & .7 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} .7 & 0 & .4 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} (|1 - .7| + |.3 - 0| + |.7 - .4|) \\ = \frac{1}{3} (.3 + .3 + .3) = 0.3$$

$$\delta (\begin{bmatrix} 1 & .3 & .7 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} .8 & .5 & .5 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} (|1 - .8| + |.3 - .5| + |.7 - .5|) \\ = \frac{1}{3} (.2 + .2 + .2) = 0.2$$

El juego de A será pues:

19.15

		A	
		(1)	(2)
B	(1)	.6	.366
	(2)	.3	.2

Pero habida cuenta de que A intenta obtener un mínimo (hallarse lo más cerca posible de su función), adoptará el criterio minmax. Elegirá así la fila (2) que domina a la fila (1) según este criterio.

Pasemos a B considerando (19.8) y (19.2). Se obtiene:

$$\delta (\begin{bmatrix} .1 & 1 & .4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} .4 & 1 & .2 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} (.3 + 0 + .2) = .166$$

$$\delta (\begin{bmatrix} .1 & 1 & .4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} .3 & .4 & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} (.2 + .6 + .6) = .466$$

19.16

$$\delta (\begin{bmatrix} .1 & 1 & .4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} .7 & 0 & .4 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} (.6 + 1 + 0) = .533$$

$$\delta (\begin{bmatrix} .1 & 1 & .4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} .8 & .5 & .5 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} (.7 + .5 + .1) = .433$$

El juego de B será:

19.17

		B	
		(1)	(2)
A	(1)	.166	.466
	(2)	.533	.433

Adoptará el criterio maxmin y elegirá la columna (2).

Al considerar la fila (2), A se asegura de que no se alejará de más de 0.3 de su ideal y tomando la columna (2), B se asegurará de que no se alejará más de 0.466 de su ideal.

En este caso se da la circunstancia de que los dos criterios (la posibilidad de una parte y la distancia de otra) proporcionan las mismas estrategias, lo que constituye un caso particular.

Veamos ahora el supuesto en que las ganancias vienen dadas en intervalos de confianza.

19.18

		B	
		(1)	(2)
A	(1)	[2,7]	[4,6]
	(2)	[3,5]	[1,12]

En este caso, los dos adversarios que son ambos prudentes van a adoptar el comportamiento siguiente: A va a interesarse por los extremos inferiores y B se va a interesar por los extremos superiores, de donde surgen los dos juegos.

19.19

		B	
		(1)	(2)
A	(1)	2	4
	(2)	3	1

2 ← MAXMIN

al elegir la fila (1), A se asegura la ganancia mínima de 2

19.20

		B	
		(1)	(2)
A	(1)	7	6
	(2)	5	12

MINMAX → 7

al elegir la columna (1), B se asegura de que su pérdida no será superior a 7.

Evidentemente, cuando existen casos de dominio de filas (respectivamente de columnas) estos juegos se simplifican.

Cabe ahora preguntarnos si resulta lógico considerar supuestos en que las ganancias sean intervalos de confianza. La respuesta es positiva ya que basta con que estas ganancias se hallen sometidas a fluctuaciones externas, tales como índice de precios, variaciones bursátiles, etc.

Se puede tener en cuenta también el supuesto en que las ganancias sean N.B.T. Para ello tomemos aquellos N.B.T. que concuerden con (19.18) para poder realizar una comparación con el caso anterior.

19.21

		B	
		(1)	(2)
A	(1)	{2,6,7}	{4,4,6}
	(2)	{3,4,5}	{1,7,12}

Una primera aproximación consiste en ocuparse solamente de los extremos inferiores y de los extremos superiores y en este caso de extrema prudencia, se resuelve como en el caso anterior (intervalos de confianza). Al actuar así se abandona una información subjetiva importante: el máximo de presunción. Uno de los medios que existen de tenerlo en cuenta consiste en convertir cada N.B.T. en su real asociado. Si

19.22

19.23 $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces $\bar{a} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}$

en cuyo caso el juego (19.21) se convierte en:

19.24

		B		
		(1)	(2)	
A	(1)	5.25	4.50	4.50 ← MAXMIN
	(2)	4.00	6.75	4
		5.25 ← MINMAX	6.75	

Se ha obtenido en este caso la misma estrategia para A y para B, pero no siempre sucede así. Al utilizar $\bar{a}$ en lugar de $\tilde{a}$ el comportamiento no sería ya el de la máxima prudencia sino el de una prudencia razonable.

Lo que se acaba de señalar para los N.B.T. se extiende a todos los números borrosos pero la fórmula (18.23) es sustituida por integraciones.

Evidentemente, para todo juego que comporte ganancias $G_{ij} \in R$, se pueden definir estrategias mixtas si el juego es repetitivo. Todos los conocidos teoremas de la teoría de los juegos de estrategia se aplican por extensión a ganancias borrosas, con las lógicas reservas de modificar algunas definiciones.

ESTRATEGIA BORROSA

Vamos a estudiar ahora otro concepto, el de "estrategia borrosa". Una vez más, nuestras explicaciones van a ser dadas a partir de un ejemplo.

19.25 A

	$\tilde{Y}_1$	B	$\tilde{Y}_2$																			
$\tilde{X}_1$	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>.4</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	c	.4	1	0	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>.8</td><td>.4</td><td>1</td></tr> </table>	a	b	c	.8	.4	1	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>0</td><td>.5</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	c	0	.5	0	$\tilde{X}_1^*$
a	b	c																				
.4	1	0																				
a	b	c																				
.8	.4	1																				
a	b	c																				
0	.5	0																				
$\tilde{X}_2$	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>.5</td><td>.3</td><td>.6</td></tr> </table>	a	b	c	.5	.3	.6	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>.8</td><td>.6</td><td>.8</td></tr> </table>	a	b	c	.8	.6	.8	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>.6</td></tr> </table>	a	b	c	1	0	.6	$\tilde{X}_2^*$
a	b	c																				
.5	.3	.6																				
a	b	c																				
.8	.6	.8																				
a	b	c																				
1	0	.6																				
$\tilde{X}_3$	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>.2</td><td>.1</td><td>.7</td></tr> </table>	a	b	c	.2	.1	.7	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>.7</td><td>.7</td><td>.4</td></tr> </table>	a	b	c	.7	.7	.4	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>0</td><td>.5</td><td>.4</td></tr> </table>	a	b	c	0	.5	.4	$\tilde{X}_3^*$
a	b	c																				
.2	.1	.7																				
a	b	c																				
.7	.7	.4																				
a	b	c																				
0	.5	.4																				
	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>1</td><td>.25</td><td>.8</td></tr> </table>	a	b	c	1	.25	.8		<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>0</td><td>.75</td><td>.2</td></tr> </table>	a	b	c	0	.75	.2							
a	b	c																				
1	.25	.8																				
a	b	c																				
0	.75	.2																				
	$\tilde{Y}_1^*$		$\tilde{Y}_2^*$																			

19.26

	$\tilde{Y}_1^{(a)}$	$\tilde{Y}_2^{(a)}$	
$X_1^{(a)}$	.4	.8	0
$X_2^{(a)}$	.5	.8	1
$X_3^{(a)}$	.2	.7	0
	1	0	

$W_a = 0.50$

19.27

	$\tilde{Y}_1^{(b)}$	$\tilde{Y}_2^{(b)}$	
$X_1^{(b)}$	1	.4	0.5
$X_2^{(b)}$	.3	.6	0
$X_3^{(b)}$	.1	.7	0.5
	0.25	0.75	

$W_b = 0.55$

19.28

	$\tilde{Y}_1^{(c)}$	$\tilde{Y}_2^{(c)}$	
$X_1^{(c)}$	0	1	0
$X_2^{(c)}$	.6	.8	0.6
$X_3^{(c)}$	.7	.4	0.4
	0.80	0.20	

$W_c = 0.64$

$$19.29 \quad \tilde{W} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b & c \\ \hline & .50 & .55 & .64 \\ \hline \end{array}$$

En este esquema, las ganancias de A son subconjuntos borrosos de $E = \{a, b, c\}$ lo mismo que los pagos de B, como en el supuesto anterior. Se separa el juego rectangular borroso en tres juegos rectangulares ordinarios (19.26), (19.27) y (19.28); el uno relativo a $\underline{a}$, el otro a $\underline{b}$ y el tercero a $\underline{c}$. Para cada uno de los tres juegos, se calculan las estrategias óptimas mixtas o puras y el valor del juego correspondiente w_a , w_b y w_c . Al reagrupar, se obtienen $\tilde{X}_1^*$, $\tilde{X}_2^*$, $\tilde{X}_3^*$, $\tilde{Y}_1^*$, $\tilde{Y}_2^*$ las estrategias borrosas óptimas y el valor del juego $\tilde{W}$ que es también un subconjunto borroso de $E = \{a, b, c\}$.

Si B acepta las estrategias borrosas óptimas, se ha asegurado de que no perderá $\underline{a}$ con un nivel que no será inferior a 0.50, de no perder $\underline{b}$ con un nivel inferior a 0.55 y de no perder $\underline{c}$ con un nivel inferior a 0.64. Se realizará para A un razonamiento dual. El juego deberá jugarse así: a cada partida, se pedirá a A qué fila escoge para $\underline{a}$, qué fila para $\underline{b}$ y qué fila para $\underline{c}$; contestará lo siguiente, para optimizar: para $\underline{a}$ siempre la fila (2), para $\underline{b}$ la fila (1) con una probabilidad de 0.5, para $\underline{c}$ la fila (2) con una probabilidad de 0.6 y la fila (3) con una probabilidad de 0.4. Como es conocido, las extracciones deben realizarse con la ayuda de tablas de números de azar o un dispositivo equivalente y que cada jugador debe ignorar la elección del otro. Como puede observarse un juego de este tipo es perfectamente coherente.

Veamos otro tipo de juego rectangular borroso en donde los pagos son números borrosos.

Se parte de:

$$19.30 \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ A \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \begin{array}{c} B \\ (1) \quad (2) \quad (3) \end{array} \\ \hline (1) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -2 & 2 \\ \hline \end{array} \\ (2) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$19.31 \quad \tilde{-2} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline .5 & 1 & .8 & .5 & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$19.32 \quad \tilde{z}_1 = \begin{array}{c} -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & .5 & 1 & .8 & .5 & & & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$19.33 \quad \tilde{z}_0 = \begin{array}{c} -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & .5 & 1 & .8 & .5 & & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$19.34 \quad \tilde{z}_1 = \begin{array}{c} -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & .5 & 1 & .8 & .5 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$19.35 \quad \tilde{z}_2 = \begin{array}{c} -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & .5 & 1 & .8 & .5 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Señalemos en primer lugar que el juego rectangular no borroso correspondiente proporciona las siguientes estrategias óptimas:

$$19.36 \quad \begin{array}{c} \text{B} \\ (1) \quad (2) \quad (3) \\ \text{A} \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1) & 0 & -2 & 2 \\ \hline (2) & 1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1^* = 3/7 \\ x_2^* = 4/7 \end{array} \quad w^* = 2/7$$

$$y_1^* = 0 \quad y_2^* = \frac{3}{7} \quad y_3^* = \frac{4}{7}$$

Los números borrosos de (19.31) a (19.35) son unimodales, es decir que:

$$19.37 \quad \mu_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad x = n$$

Por otra parte, todos los números tienen la misma función de pertenencia pero con un corrimiento de 1 cuando se aumenta el entero en 1 unidad. Al juego (19.36) le vamos a llamar "juego rectangular modal".

Al nivel de presunción $\alpha = 0.8$, teniendo en cuenta (19.30) y (19.31 a 19.35), se hallan 2 juegos: se vuelve a obtener (19.36) y otro juego corriendo una unidad todas las casillas.

$$19.38 \quad \begin{array}{c} \text{B} \\ (1) \quad (2) \quad (3) \\ \text{A} \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1) & 0 & -2 & 2 \\ \hline (2) & 1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad w_0^* = 2/7$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ (1) \quad (2) \quad (3) \\ \text{A} \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1) & 1 & -1 & 3 \\ \hline (2) & 2 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad w_{\alpha_1}^* = 1 + 2/7$$

Las estrategias óptimas son las mismas para (19.38) que para (19.39) y el valor del juego sufre una traslación de 1 unidad (1).

Para $\alpha = 0.5$, se obtienen 4 juegos de los que sólo recogemos los dos juegos extremos:

19.40

19.41

A

		B		
		(1)	(2)	(3)
A	(1)	-1	-3	1
	(2)	0	1	-2

$W_{-1}^* = -1 + 2/7$

A

		B		
		(1)	(2)	(3)
A	(1)	2	0	4
	(2)	3	4	1

$W_{+2}^* = 2 + 2/7$

Para $\alpha = 0$, se obtienen una infinidad de juegos todos los cuales tienen la misma estrategia.

19.42

A

		B		
		(1)	(2)	(3)
A	(1)	$0+e$	$-2+e$	$2+e$
	(2)	$1+e$	$2+e$	$-1+e$

$e \in \mathbb{N} - \{-1, 0, 1, 2\}$

Aunque en nuestro ejemplo los números borrosos son enteros borrosos, se puede generalizar al supuesto de números borrosos que sean subconjuntos borrosos de $\mathbb{R}$.

Finalmente, el juego rectangular (19.30) puede presentarse también de la siguiente manera:

19.43

<table><tr><td>-2</td><td>-4</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-3</td></tr></table>	-2	-4	0	-1	0	-3	<table><tr><td>-1</td><td>-3</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>-2</td></tr></table>	-1	-3	1	0	1	-2	<table><tr><td>0</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>-1</td></tr></table>	0	-2	2	1	2	-1	<table><tr><td>1</td><td>-1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr></table>	1	-1	3	2	3	0	<table><tr><td>2</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr></table>	2	0	4	3	4	1	<table><tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	3	1	5	4	5	2
-2	-4	0																																							
-1	0	-3																																							
-1	-3	1																																							
0	1	-2																																							
0	-2	2																																							
1	2	-1																																							
1	-1	3																																							
2	3	0																																							
2	0	4																																							
3	4	1																																							
3	1	5																																							
4	5	2																																							

0	0.5	1	0.8	0.5	0																																				

- (1) Recordemos que en el tratamiento de la teoría de juegos rectangulares, y de manera más general para otros tipos de juegos de estrategia, se demuestra que si se añade a todos los valores de los pagos un mismo número $k \in \mathbb{R}$ el valor del juego pasa de w^* a $w^* + k$, mientras que las estrategias óptimas de A y de B no varían.

Las estrategias óptimas de este juego son las del juego modal:

19.44

	$-2+2/7$	$-1+2/7$	$0+2/7$	$1+2/7$	$2+2/7$	$3+2/7$
$W^* =$	0	0.5	1	0.8	0.5	0

19.45 $x_1^* = 3/7$, $x_2^* = 4/7$, $x_3^* = 0$, $y_1^* = 3/7$, $y_2^* = 4/7$

En este ejemplo, los enteros borrosos $\underline{n}$ se generan a partir de $\underline{0}$ es decir $\underline{0} (+) n$. Veamos de nuevo el caso de números borrosos cualesquiera que vamos a tratar a través de sus α -cortes, un método distinto de los que hemos presentado para los juegos con ganancias borrosas.

Supongamos el siguiente juego rectangular con ganancias borrosas:

19.46

A

↙

B

	(1)	(2)	(3)
(1)	1 2 3 .4 1 .6	-1 0 1 .8 1 .2	0 1 2 3 .3 .4 1 .8
(2)	-2 -1 .6 1	1 2 3 .4 1 .7	3 4 5 .2 1 .3

Consideremos ahora los juegos obtenidos para cada α -corte.

Para $\alpha = 0.2$, se tiene:

19.47

		B		
		(1)	(2)	(3)
A	(1)	[1, 3]	[-1, 1]	[0, 3]
	(2)	[-2, -1]	[1, 3]	[3, 5]

, $\alpha = 0.2$

Se establecen, tal como se ha hecho anteriormente, para A un juego maximizante con los extremos inferiores y para B un juego minimizante con los extremos superiores.

19.48

19.49

A

		B			
		(1)	(2)	(3)	
(1)	(2)	1	-1	0	$\alpha = 0.2$
		-2	1	3	

A MAXIMIZANTE

19.49

A

		B			
		(1)	(2)	(3)	
(1)	(2)	3	1	3	$\alpha = 0.2$
		-1	3	5	

B MINIMIZANTE

19.50 $x_{1\alpha=0.2}^* = 3/5$, $x_{2\alpha=0.2}^* = 2/5$, $w_{A\alpha=0.2}^* = -1/5$

19.51 $y_{1\alpha=0.2}^* = 1/3$, $y_{2\alpha=0.2}^* = 2/3$, $y_{3\alpha=0.2}^* = 0$, $w_{B\alpha=0.2}^* = 5/3$

Para $\alpha = 0.3$, se tiene:

19.52 A $\begin{matrix} & \text{B} \\ & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \alpha = 0.3$

19.53 A $\begin{matrix} & \text{B} \\ & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \alpha = 0.3$

19.54 $x_{1\alpha=0.3}^* = 3/5$, $x_{2\alpha=0.3}^* = 2/5$, $w_{A\alpha=0.3}^* = -1/5$

19.55 $y_{1\alpha=0.3}^* = 3/7, y_{2\alpha=0.3}^* = 4/7, y_{3\alpha=0.3}^* = 0, w_{B\alpha=0.3}^* = 9/7$

Para $\alpha = 0.4$, se tiene:

19.56 A $\begin{matrix} & & & B \\ & & & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \alpha = 0.4$

19.57 A $\begin{matrix} & & & B \\ & & & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \alpha = 0.4$

19.58 $x_{1\alpha=0.4}^* = 3/5, x_{2\alpha=0.4}^* = 2/5, w_{A\alpha=0.4}^* = -1/5$

19.59 $y_{1\alpha=0.4}^* = 3/7, y_{2\alpha=0.4}^* = 4/7, y_{3\alpha=0.4}^* = 0, w_{B\alpha=0.4}^* = 9/7$

Para $\alpha = 0.6$, se tiene:

19.60

A

19.61

B

	(1)	(2)	(3)
(1)	2	-1	2
(2)	-2	2	4

$\alpha = 0.6$

B

	(1)	(2)	(3)
(1)	3	0	3
(2)	-1	3	4

$\alpha = 0.6$

$$19.62 \quad x_{1\alpha=0.6}^* = 4/7, x_{2\alpha=0.6}^* = 3/7, w_{A\alpha=0.6}^* = 2/7$$

$$19.63 \quad y_{1\alpha=0.6}^* = 3/7, y_{2\alpha=0.6}^* = 4/7, y_{3\alpha=0.6}^* = 0, w_{B\alpha=0.6}^* = 9/7$$

Para $\alpha = 0.7$, se tiene:

19.64

19.65

A

	(1)	(2)	(3)
(1)	2	-1	2
(2)	-1	2	4

$\alpha = 0.7$

B

(1) (2) (3)

A

	(1)	(2)	(3)
(1)	2	0	3
(2)	-1	3	4

$\alpha = 0.7$

$$19.66 \quad x_{1\alpha=0.7}^* = 1/2, x_{2\alpha=0.7}^* = 1/2, w_{A\alpha=0.7}^* = 1/2$$

$$19.67 \quad y_{1\alpha=0.7}^* = 1/2, y_{2\alpha=0.7}^* = 1/2, y_{3\alpha=0.7}^* = 0, w_{B\alpha=0.7}^* = 1$$

Para $\alpha = 0.8$, se tiene:

19.68

19.69

A

(1)

(2)

B		
(1)	(2)	(3)
2	-1	2
-1	2	4

$\alpha = 0.8$

A

(1)

(2)

B		
(1)	(2)	(3)
2	0	3
-1	2	4

$\alpha = 0.8$

$$19.70 \quad x_{1\alpha=0.8}^* = 1/2, x_{2\alpha=0.8}^* = 1/2, w_{A\alpha=0.8}^* = 1/2$$

$$19.71 \quad y_{1\alpha=0.8}^* = 2/5, y_{2\alpha=0.8}^* = 3/5, y_{3\alpha=0.8}^* = 0, w_{B\alpha=0.8}^* = 4/5$$

Para $\alpha = 1$, se tiene:

JUEGOS DE ESTRATEGIA RECTANGULARES CON VARIOS CRITERIOS DE DECISION

Veamos ahora una situación en la que los subconjuntos borrosos resultan adecuados dentro de los juegos de estrategia rectangulares, aquélla en que intervienen varios criterios de decisión.

Como es bien sabido todo juego rectangular puede ser convertido en un programa lineal (y recíprocamente). Consideremos ahora que el comportamiento de los jugadores A y B puede superponer a los criterios maximin y minmax del otro, otros criterios lineales. En este supuesto es posible utilizar el método de Zimmermann, como puede observarse en el siguiente ejemplo.

Supongamos el juego rectangular:

19.76

		B			
		(1)	(2)	(3)	
A	(1)	5	-1	6	x_1
	(2)	0	4	2	x_2
		y_1	y_2	y_3	

El programa lineal que proporciona la (o las) estrategia óptima de A y el valor del juego w es el siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 \text{MAX} & z_1 = w \\
 (1) & 5x_1 \geq w \\
 19.77 & (2) -x_1 + 4x_2 \geq w \\
 & (3) 6x_1 + 2x_2 \geq w \\
 & (4) x_1 + x_2 \geq w, x_1, x_2 \geq 0 \quad (1)
 \end{array}$$

Supongamos ahora que el jugador A toma un criterio distinto de $z_1 = w$, tal como:

$$19.78 \quad \text{MAX } z_2 = 3x_1 + x_2$$

lo cual implica el programa lineal siguiente, con dos criterios:

(1) Resulta evidente aquí que $w \geq 0$.

$$\text{MAX } z_1 = w$$

$$\text{MAX } z_2 = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned}
 & (1) \quad 5x_1 \geq w \\
 19.79 \quad & (2) \quad -x_1 + 4x_2 \geq w \\
 & (3) \quad 6x_1 + 2x_2 \geq w \\
 & (4) \quad x_1 + x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Hagamos:

$$19.80 \quad x_2 = 1 - x_1$$

Se obtiene:

$$\text{Max } z_1 = w$$

$$\text{Max } z_2 = 2x_1 + 1$$

$$19.81 \quad w - 5x_1 \leq 0$$

$$w + 5x_1 \leq 4$$

$$w - 4x_1 \leq 2$$

$$x_1 \leq 1, \quad w, x_1 \geq 0$$

Habida cuenta que en el programa (19.81) sólo existen dos variables, podemos utilizar el método gráfico (figura 19.1).

1) Para el criterio z_1 :

$$19.82 \quad x_1^* = 0.4, \quad x_2^* = 0.6, \quad z_1^* = w = 2$$

2) Para el criterio z_2 :

$$19.83 \quad x_1^* = 0.8, \quad x_2^* = 0.2, \quad z_2^* = 2.6$$

Utilicemos ahora el método de Zimmermann. Hagamos:

$$19.84 \quad \omega = 1 \text{ para el valor del extremo inferior de } z_1,$$

$$19.85 \quad \omega = 1.6 \text{ para el valor del extremo superior de } z_2$$

Introduzcamos las funciones de pertenencia:

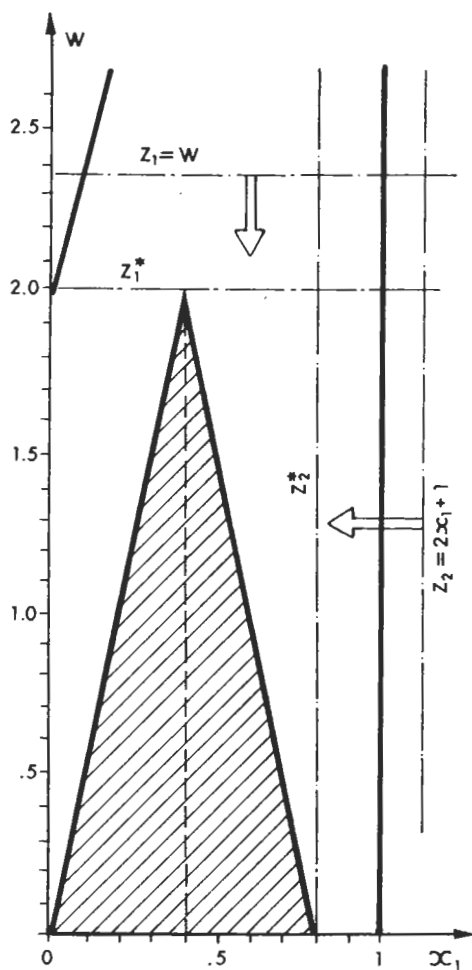
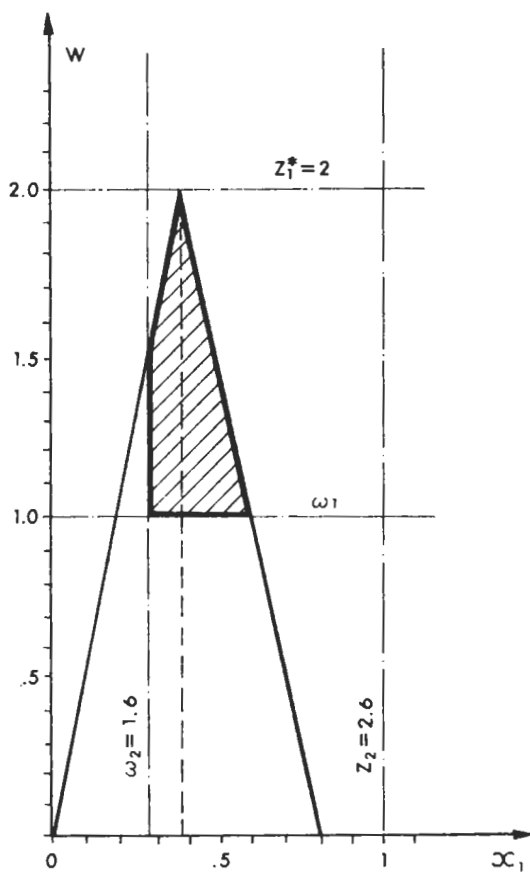


FIGURA 19.1

$$\begin{aligned}
 19.86 \quad \mu_1(z_1) &= 0, & z_1 &\leq 1 \\
 &= \frac{w-1}{2-1} = w-1, & 1 &\leq z_1 \leq 2 \\
 &= 1, & 2 &\leq z_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.87 \quad \mu_2(z_2) &= 0, & z_2 \leq 1.6 \\
 &= \frac{2x_1 + 1 - 1.6}{2.6 - 1.6} \\
 &= 2x_1 - 0.6, & 1.6 \leq z_2 \leq 2.6 \\
 &= 1, & 2.6 \leq z_2
 \end{aligned}$$

FIGURA 19.2



Escribamos también:

$$19.88 \quad \mu_1(z_1) = w - 1$$

$$19.89 \quad \mu_2(z_2) = 2x_1 - 0.6$$

De donde se obtiene el programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{MAX } \lambda \\ & \lambda \leq w - 1 \\ & \lambda \leq 2x_1 - 0.6 \\ 19.90 \quad & w - 5x_1 \leq 0 \\ & w + 5x_1 \leq 4 \quad , \quad \lambda, w, x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Se han suprimido las condiciones $w - 4x_1 \leq 2$ y $x_1 \leq 1$ que ahora resultan inútiles.

Escribamos ahora:

$$\begin{aligned} & \text{MAX } \lambda \\ & \lambda - w \leq -1 \\ & \lambda - 2x_1 \leq -0.6 \\ 19.91 \quad & w - 5x_1 \leq 0 \\ & w + 5x_1 \leq 4 \quad , \quad \lambda, w, x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Con objeto de obtener cantidades no negativas en los segundos miembros de (19,91) se hace:

$$19.92 \quad \lambda = \lambda' - 2$$

y el programa se convierte en el siguiente:

$$\begin{aligned} 19.93 \quad & \text{MAX } \lambda' \\ (1) \quad & \lambda' - w \leq 1 \\ (2) \quad & \lambda' - 2x_1 \leq 1.4 \\ (3) \quad & w - 5x_1 \leq 0 \\ (4) \quad & w + 5x_1 \leq 4 \quad , \quad \lambda', w, x \geq 0 \end{aligned}$$

La condición $\lambda' \geq 2$ resulta aquí inútil.

Veamos la solución rápida de (19.93) mediante una tabla del simplex.

19.94

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	u_4	segundo miembro	Test
(1)	-1	①	0	1				1	←
(2)	0	1	-2		1			1,4	
(3)	1	0	-5			1		0	
(4)	1	0	5				1	4	
		-1						$-\lambda'$	

↑

19.95

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	u_4	segundo miembro	Test
(1)	-1	1	0	0				1	
(2)	①		-2	-1	1			0,4	←
(3)	1		-5	0		1		0	
(4)	1		5	0			1	4	
	-1			1				$-\lambda'$ +1	

↑

19.96

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	u_4	segundo miembro	Test
(1)		1	-2	0	1			1,4	
(2)	1		-2	-1	1			0,4	
(3)			-3	1	-1	1		-0,4	
(4)			⑦	1	-1		1	3,6	←
			-2		1			$-\lambda'$ +1,4	

↑

19.97

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	u_4	segundo miembro	Test
(1)		1		0.2856	0.7144		0.2856	2.4284	
(2)	1			-0.7144	0.7144		0.2856	1.4284	
(3)				1.4284	-1.4284	1	0.4284	1.1426	
(4)			1	0.1428	-0.1428		0.1428	0.5142	
				0.2856	0.7144		0.2856	$-\lambda' + 2.4284$	

FIN

Se obtiene, pues:

$$\begin{aligned}
 x_1^{\square} &= 0.5142 & , & & x_2^{\square} &= 0.4858 & , & & \lambda' = 2.4284 \text{ es decir,} \\
 z_1^{\square} &= 1.4284 & , & & z_2^{\square} &= 2.0284 & , & & \lambda = 0.4284
 \end{aligned}$$

La Figura 19.3 ilustra este resultado.

Resulta evidente que si se calcularan de la misma manera las estrategias óptimas de A y el valor del juego de B cuando éste adopta el único criterio minmax y/o otros criterios, el valor del juego para A y para B es en general distinto. Esto no puede extrañar ya que los criterios maxmin y minmax que proporcionan el punto de equilibrio han sido falseados por otros criterios.

El procedimiento que acabamos de utilizar puede ser generalizado sin dificultad a cualquier juego rectangular convirtiendo en positivo el valor del juego (lo que siempre resulta posible añadiendo un mismo número suficientemente grande en todas las casillas). Tampoco se halla limitado el número de criterios suplementarios.

Un supuesto interesante, que se deriva del que acabamos de tratar como ejemplo, es aquel en que B adopta uno (o varios) criterios suplementarios y busca su estrategia óptima multicriterio mediante la borrosidad; cuando A conoce los criterios de B, tiene en cuenta el nuevo juego obtenido y le adapta su (o sus) criterio complementario además del de maxmin. Todo esto puede realizarse en una sola vez o en varias de manera secuencial, por ejemplo. Por otra parte, podemos realizar el tratamiento de juegos rectangulares con informaciones parciales del comporta-

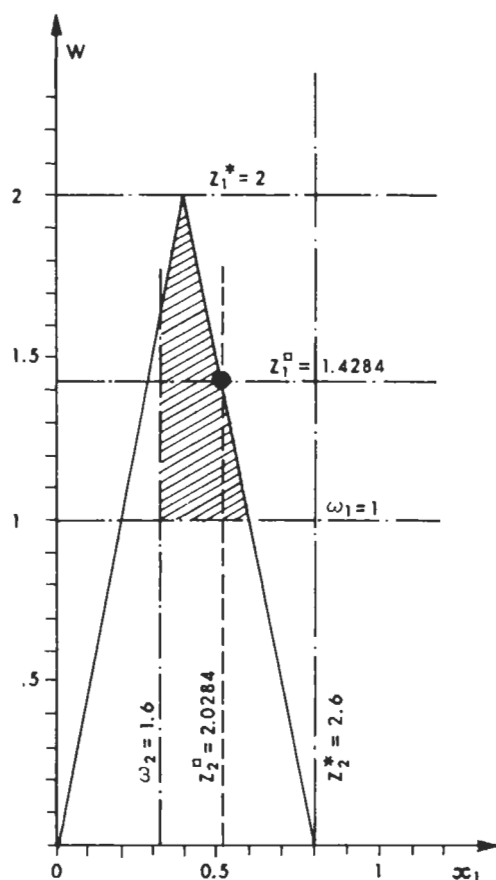


FIGURA 19.3

miento del adversario; pueden imaginarse numerosas reglas en las que se considera la borrosidad.

Acabamos de poner de manifiesto mediante algunos ejemplos cómo se aplican los conceptos borrosos de distinta manera a los juegos rectangulares. Pueden considerarse también otras aplicaciones en las que se introduce el ámbito borroso a juegos con más de dos personas, a juegos con va-

riables continuas, a juegos secuenciales, etc... La actividad investigadora actual es muy intensa. De manera concreta, se pueden citar los trabajos de precursor de BUTNARIU (1).

JUEGO RECTANGULAR CONTRA LA NATURALEZA

Vamos a presentar un ejemplo de juego rectangular contra la naturaleza en donde se consideran varios criterios.

Supongamos un juego rectangular de A contra B en donde B es la naturaleza y A una persona con capacidad de decisión. A elige en las filas $i = 1, 2, \dots, m$ y la naturaleza puede tomar un estado j dado por las columnas $j = 1, 2, \dots, n$. Las casillas del juego rectangular comprenden valores $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Se designa mediante x_i , $i = 1, 2, \dots, m$ una ponderación convexa, es decir:

$$19.99 \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

que A puede elegir libremente. Se designa por w el valor del juego.

Supongamos que A, además del criterio:

$$19.100 \quad \text{MAX } z = w$$

adopta otros, tales como:

$$\text{MAX } z = \sum_{i=1}^m c_{i1} x_i, \quad c_{i1} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{MAX } z = \sum_{i=1}^m c_{i2} x_i, \quad c_{i2} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$19.101 \quad \dots \dots \dots$$

$$\text{MAX } z = \sum_{i=1}^m c_{ir} x_i, \quad c_{ir} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Esto nos conduce al siguiente programa multicriterio:

(1) BUTNARIU, D.: Fuzzy games: a description of the concept, *Fuzzy Sets and Syst.*, Vol. 1, n.º 3 (1978) y la continuación: Two-persons fuzzy games, n-persons fuzzy games, en los números siguientes,

$$19.102 \quad \text{MAX } z = w \quad (1)$$

$$\text{MAX } z_1 = \sum_{i=1}^m c_{i1} x_i$$

$$\text{MAX } z_2 = \sum_{i=1}^m c_{i2} x_i$$

$$19.103 \quad$$

$$\text{MAX } z_r = \sum_{i=1}^m c_{ir} x_i$$

$$19.104 \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq w \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$19.105 \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad , \quad x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

El caso en el que A fuera un jugador que minimizara en lugar de maximizar, daría lugar al programa lineal siguiente:

$$19.106 \quad \text{MIN } z = w$$

$$\text{MIN } z_1 = \sum_{i=1}^m c_{i1} x_i$$

$$\text{MIN } z_2 = \sum_{i=1}^m c_{i2} x_i$$

$$19.107 \quad$$

$$\text{MIN } z_r = \sum_{i=1}^m c_{ir} x_i$$

$$19.108 \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq w \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$19.109 \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad , \quad x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(1) Si w no fuera no negativo, se modificaría el juego para que $w \geq 0$. Para ello bastaría con añadir una misma cantidad en todas las casillas. Las estrategias continúan invariables con esta modificación, como ya ha sido señalado.

Se ha podido observar, anteriormente, cómo se tratan los problemas de este tipo a partir de conceptos borrosos empleando el método de Zimmermann. Vamos a plantearnos la pregunta de si este tipo de problemas existen en la estrategia económica y más generalmente en las ciencias humanas. La respuesta es evidentemente positiva e incluso podemos afirmar que surgen con cierta frecuencia. Se puede imaginar, por ejemplo, un problema de stocks en donde se plantea la optimización del beneficio y también otros criterios como la presentación de una gama concreta de productos, la venta preferencial de otros, etc. El método de Zimmermann adaptado al supuesto de juegos rectangulares permite el tratamiento de casi la totalidad de los modelos, sean o no lineales, a costa, en ciertas ocasiones, de dificultades de cálculo debidas al número de variables, de condiciones y de criterios. Sin embargo, las posibilidades actuales de los medios de tratamiento de la información permiten resolver estos problemas, a pesar de su dimensión.

EL SUPUESTO DE COMERCIALIZACION EN UN NUEVO MERCADO

Una empresa fabrica y comercializa tres tipos de equipos M_1 , M_2 y M_3 para un mercado nuevo. El cuadro (19.110) indica los beneficios unitarios expresados en unidades monetarias del país de la empresa en cuestión. Si esta empresa fabrica M_1 y si los clientes demandan M_2 , habrá que modificar M_1 para transformarlo en M_2 y el beneficio descende a 40, y así sucesivamente. La lectura de este cuadro es sencilla y constituye un ejemplo de juego contra la naturaleza.

Se obtiene finalmente:

		DEMANDA				
		M_1	M_2	M_3		
19.110	FABRICACION	M_1	100	40	80	X_1
		M_2	50	90	60	X_2
		M_3	20	40	70	X_3

El primer criterio de la empresa es el de Wald (maxmin) (1).

A simple vista se puede observar que este juego rectangular no posee un punto de equilibrio (punto de silla). Por otra parte, habida cuenta que la fila (1) domina la fila (3), ésta puede ser eliminada (no se fabricará M_3) y el juego (19.110) se convierte en:

		DEMANDA				
		M_1	M_2	M_3		
19.111	FABRICACION	M_1	100	40	80	X_1
		M_2	50	90	60	X_2

Por otra parte, resulta que M_1 es un producto de promoción y presenta un interés a largo plazo en relación a M_2 , y se desea considerar este aspecto. Así se afectará a M_1 de un peso de 0.8 y a M_2 un peso de 0.2.

Si x_1 y x_2 representan las proporciones en que serán fabricadas M_1 y M_2 , el segundo criterio será expresado por la función $0.8 x_1 + 0.2 x_2$ a maximizar o, lo que es lo mismo, $4 x_1 + x_2$ máximo.

Es posible entonces presentar este problema bajo la forma de un programa lineal. Se intenta obtener la estrategia óptima y el valor del juego:

$$19.112 \quad \text{MAX } z = w$$

$$19.113 \quad \text{MAX } z' = 4x_1 + x_2$$

$$19.114 \quad 100x_1 + 50x_2 \geq w$$

$$19.115 \quad 40x_1 + 90x_2 \geq w$$

$$19.116 \quad 80x_1 + 60x_2 \geq w$$

$$19.117 \quad x_1 + x_2 = 1 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Habida cuenta que este programa sólo contiene 3 variables w , x_1 y x_2

(1) En este problema se intenta conseguir un beneficio que sea al menos igual al valor del juego. Si este primer criterio fuera, por ejemplo, un coste, el criterio de Wald (que se está considerando aquí) consistiría en la obtención de un minmax en lugar de un maxmin.

y que, por otra parte $x_2 = 1 - x_1$, queda reducido a 2 variables w y x_1 ; con lo que se puede utilizar el método gráfico (Figura 19.4). Se escribe primero:

$$19.118 \quad \text{MAX } z = w$$

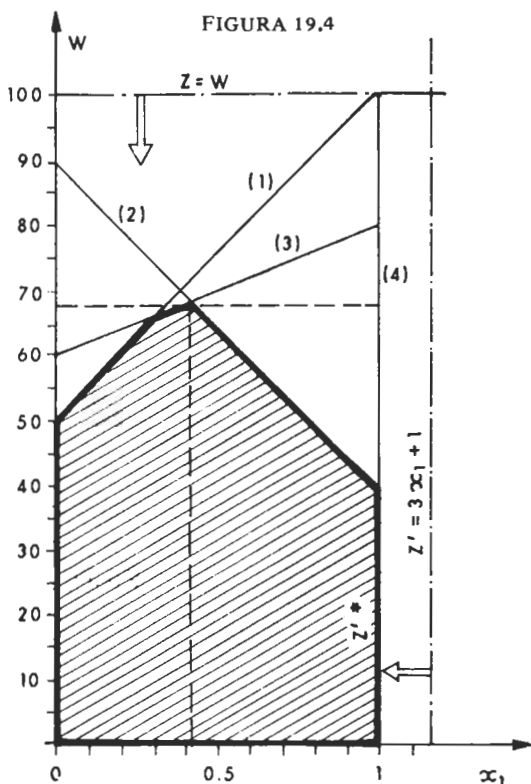
$$19.119 \quad \text{MAX } z' = 3x_1 + 1$$

$$19.120 \quad w - 50x_1 \leq 50$$

$$19.121 \quad w + 50x_1 \leq 90$$

$$19.122 \quad w - 20x_1 \leq 60$$

$$19.123 \quad x_1 \leq 1, \quad w, x_1 \geq 0$$



Si se observa la Figura 19.4, se obtiene:

1) Para el criterio z :

$$\begin{aligned} x_1^* &= 3/7 = 0,428 \\ x_2^* &= 4/7 = 0,571 \\ 19.124 \quad w^* &= 480/7 = 68,57 \end{aligned}$$

2) Para el criterio z' :

$$\begin{aligned} 19.125 \quad x_1^* &= 1, \quad x_2^* = 0 \\ \text{MAX } z' &= 4 \end{aligned}$$

Ahora hagamos:

$$19.126 \quad w = 30 \quad \text{como extremo inferior de } z$$

$$19.127 \quad w' = 2,5 \quad \text{como extremo inferior de } z'$$

Introduzcamos la función de pertenencia:

$$\begin{aligned} 19.128 \quad \mu(z) &= 0, & z &\leq 30 \\ &= \frac{w - 30}{270/7}, & 30 &\leq z \leq 480/7 \\ &= 1, & z &\geq 480/7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.129 \quad \mu(z') &= 0, & z' &\leq 2,5 \\ &= 2x_1 - 1, & 2,5 &\leq z' \leq 4 \\ &= 1, & z' &\geq 4 \end{aligned}$$

Es decir:

$$19.130 \quad \mu(z) = \frac{w - 30}{270/7}$$

$$19.131 \quad \mu(z') = 2x_1 - 1$$

y pasemos al programa lineal representado en la Figura 19.5.

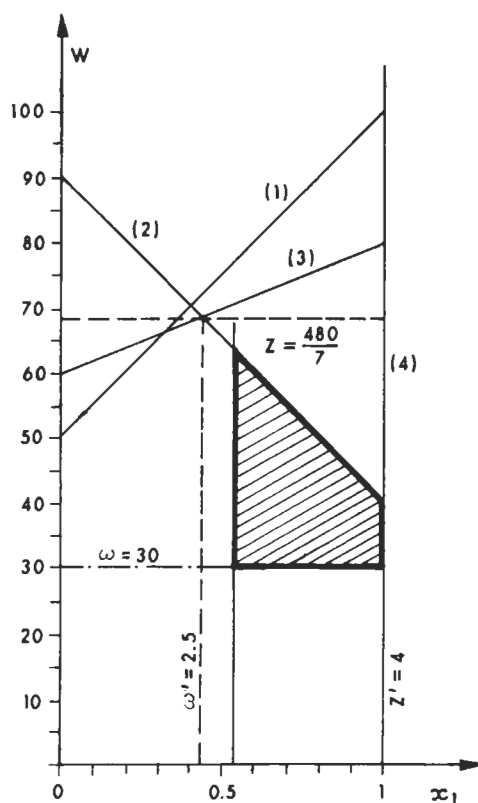


FIGURA 19.5

19.132 $\text{MAX } \lambda$

19.133 $\lambda \leq \frac{w - 30}{270/7}$

19.134 $\lambda \leq 2x_1 - 1$

19.135 $w + 50x_1 \leq 90 \quad \lambda, x_1, w \geq 0$

Se observa en la Figura 19.5 que las condiciones (1) y (3), es decir $w - 50x_1 \leq 50$ y $w - 20x_1 \leq 60$ ya no intervienen. Escribamos ahora de (19.132) a (19.135) de manera distinta:

$$19.136 \quad \text{MAX } \lambda$$

$$19.137 \quad 270\lambda - 7w \leq -210$$

$$19.138 \quad \lambda - 2x_1 \leq -1$$

$$19.139 \quad w + 50x_1 \leq 90 \quad \lambda, w, x_1 \geq 0$$

Para que los segundos miembros de (19.133) y (19.134) sean positivos, se hará:

$$19.140 \quad \lambda = \lambda' - 2$$

De lo que se deduce:

$$19.141 \quad \text{MAX } \lambda'$$

$$19.142 \quad 270\lambda' - 7w \leq 330$$

$$19.143 \quad \lambda' - 2x_1 \leq 1$$

$$19.144 \quad w + 50x_1 \leq 90, \quad \lambda', w, x_1 \geq 0$$

La condición $\lambda' \geq 2$ resulta aquí superflua.

Calculemos la solución óptima de este programa por el método simplex mediante los cuadros siguientes:

19.145

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	segundo miembro	Test
(1)	-7	270	0	1			330	
(2)	0	①	-2		1		1	←
(3)	1	0	50			1	90	
		-1					$-\lambda'$	

19.146

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	segundo miembro	Test
(1)	-7		(540)	1	-270		60	←
(2)	0	1	-2		1		1	
(3)	1		50		0	1	90	
			-2		-1		$-\lambda' + 1$	

↑

19.147

	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	segundo miembro	Test
(1)	$-\frac{7}{540}$		1	$\frac{1}{540}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{9}$	
(2)	$-\frac{14}{540}$	1		$\frac{2}{540}$	0		$\frac{11}{9}$	
(3)	$-\frac{890}{540}$			$-\frac{50}{540}$	-25	1	$\frac{760}{9}$	←
	$-\frac{14}{540}$			$\frac{2}{540}$			$-\lambda' + 11/9$	

↑

19.148

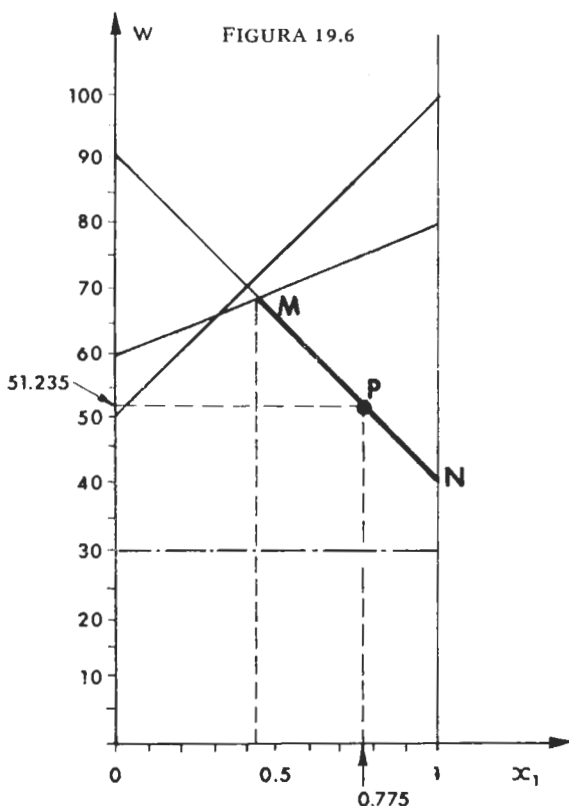
	w	λ'	x_1	u_1	u_2	u_3	segundo miembro	Test
(1)			1	$\frac{1}{890}$	$-\frac{270}{890}$	$\frac{7}{890}$	$\frac{69}{89}$	
(2)		1		$\frac{2}{890}$	$\frac{540}{890}$	$\frac{14}{890}$	$\frac{227}{89}$	
(3)	1			$-\frac{50}{890}$	$\frac{13500}{890}$	$\frac{540}{890}$	$\frac{4560}{89}$	
				$\frac{2}{890}$	$\frac{350}{890}$	$\frac{14}{890}$	$-\lambda' + 227/89$	

FIN

$$\lambda'^{\square} = \frac{227}{89} = 2.55056 \text{ es decir } \lambda^{\square} = \lambda' - 2 = 0.55056$$

$$x_1^{\square} = \frac{69}{89} = 0.77528, x_2^{\square} = 0.22472, w^{\square} = \frac{4560}{89} = 51.23595$$

Como se observa en la Figura 19.6 la estrategia óptima $x_1^{\square} = 0.775$, $x_2^{\square} = 0.224$, $w^{\square} = 51.235$ se sitúa en un punto P entre M y N en donde M es el punto que proporciona la estrategia óptima para el criterio de Wald y N que es el punto (en realidad todo el segmento de recta que va de N al eje Ox_1) que proporciona la estrategia óptima para la promoción del producto M_1 tomado aisladamente.



El método utilizado para asociar los criterios lineales al criterio de Wald puede ser empleado, después de la correspondiente adaptación, a los criterios de Hurwicz o de Savage y eventualmente a otros criterios.

En cuanto a los juegos contra la naturaleza con beneficios borrosos, pueden ser tratados como aquellos en que el adversario es inteligente. El elemento decisorio puede ser maximizador o minimizador según el caso.

El supuesto más general, tanto para los juegos con dos adversarios como para los juegos contra la naturaleza, hace referencia a los juegos en los que los pagos son borrosos y en donde se añaden varios criterios. En estos juegos, el jugador que maximiza toma los extremos inferiores, el que minimiza los superiores y se añade a MAX z (respectivamente MIN z) los criterios considerados. El caso se reduce a los tratados en este capítulo.

Se observa que la teoría de juegos contra la naturaleza constituye una manera parecida de abordar los problemas en los que el comportamiento de la naturaleza no es conocido en términos de probabilidad, de la utilizada en la teoría de los subconjuntos borrosos; y ello utilizando el max-min (respectivamente minmax); sin embargo, una estrategia mixta de un juego de estrategia no es una función de pertenencia bajo la forma más general sino un caso particular. Si no se establece, en un juego repetitivo, la condición de que la suma de los pesos sea igual a 1, sería necesario hacerlo de todas maneras más tarde, ya que si existe repetición y suficientes repeticiones, es perfectamente lógico adoptar la ley de ponderación como una ley de probabilidad y de ahí, la esperanza matemática como la ganancia esperada.

Evidentemente, la justificación lógica de un determinado comportamiento depende de la naturaleza del juego considerado, es decir del modelo que define las reglas, a veces sencillas, a veces muy complicadas.

Teoría de colas y pseudo-probabilidades borrosas

INTERVALOS DE CONFIANZA DE PROBABILIDAD

No vamos a recordar ahora las bases de la teoría de colas; para quienes deseen refrescar la memoria pueden recurrir a textos específicos sobre la materia (1).

Supongamos que, en un fenómeno de colas, existe una sola estación y el tipo medio de llegadas λ no es conocido con certeza por lo que viene dado a través de un intervalo de confianza.

$$20.1 \quad \lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$$

En lo que se refiere al servicio el tipo medio de este servicio tampoco es conocido con exactitud, por lo que viene dado a través de:

$$20.2 \quad \mu = [\mu_1, \mu_2]$$

Se considera, en este caso, el funcionamiento del sistema de colas en régimen permanente.

En teoría de colas la cantidad ψ :

$$20.3 \quad \psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

(1) Véase por ejemplo: KAUFMANN, A. y CRUON, R.: Les phénomènes d'attente, Ed. Dunod, Paris, O bien KAUFMANN, A.: Méthodes y modelos de la investigación de operaciones, Ed. CECSA.

se denomina “intensidad de tráfico” y juega un importante papel.

Bajo el supuesto de que λ y μ son conocidas, cada una de ellas por un intervalo de confianza, sucederá lo mismo para ψ :

$$20.4 \quad \psi = [\psi_1, \psi_2] = \frac{[\lambda_1, \lambda_2]}{[\mu_1, \mu_2]} = [\lambda_1 / \mu_2, \lambda_2 / \mu_1]$$

en donde $\lambda_2 < \mu_1$, ya que en caso contrario la cola podría no acabarse. Con esta hipótesis resulta:

$$20.5 \quad 0 < \psi < 1$$

La teoría de colas es una teoría probabilística. En el supuesto en que las llegadas sigan la ley de Poisson y los intervalos de servicio la ley exponencial se demuestra fácilmente que la probabilidad de n unidades en el sistema es:

$$20.6 \quad p_n = \psi^n (1 - \psi)$$

Esta ley no es monótona y posee un máximo para $\psi = \frac{n}{n+1}$

Por el contrario, la ley:

$$\begin{aligned} 20.7 \quad \text{pr}(N \leq n) &= \sum_{k=0}^n \psi^k (1 - \psi) \\ &= (1 - \psi) \sum_{k=0}^n \psi^k \\ &= (1 - \psi) \frac{1 - \psi^{n+1}}{1 - \psi} \\ &= 1 - \psi^{n+1} \end{aligned}$$

es una ley monótona.

Asimismo lo es, evidentemente, la ley complementaria

$$20.8 \quad \text{pr}(N > n) = \psi^{n+1}$$

Como se ha señalado no debe considerarse como probabilidad a un intervalo de confianza de probabilidades, ya que no posee las propiedades de las probabilidades, en particular la propiedad fundamental de que la suma de todas las probabilidades de los casos posibles sea igual a la unidad. Se les denomina, por ello, pseudo-probabilidades y se les designará por Π en lugar de p . No podremos hacer intervenir los intervalos de confianza más que en el caso de funciones monótonas como (20.7) y (20.8). Se escribe:

$$20.9 \quad \Pi_1(n) = \psi_1^{n+1}$$

$$20.10 \quad \Pi_2(n) = \psi_2^{n+1}$$

$$20.11 \quad (\psi_2 > \psi_1) \iff (\Pi_2 > \Pi_1)$$

y se podrá hacer:

$$20.12 \quad [\Pi_1(n), \Pi_2(n)] = [\psi_1^{n+1}, \psi_2^{n+1}]$$

con:

$$20.13 \quad [\psi_1, \psi_2] = \frac{[\lambda_1, \lambda_2]}{[\mu_1, \mu_2]} = [\lambda_1/\mu_2, \lambda_2/\mu_1]$$

$$\lambda_2 < \mu_1$$

Con objeto de evitar cualquier ambigüedad con la teoría de probabilidades, se puede llamar a las cantidades Π "indicadores de confianza".

Así, el indicador de confianza

$$20.14 \quad \Pi(n) = [\Pi_1(n), \Pi_2(n)]$$

para que haya más de n unidades en el sistema será, para $n = 5$ y

$$20.15 \quad \lambda_1 = 2.8, \quad \lambda_2 = 3.1, \quad \mu_1 = 4.1, \quad \mu_2 = 4.3$$

$$20.16 \quad [\psi_1, \psi_2] = [2.8/4.3, 3.1/4.1] = [0.651, 0.756]$$

$$20.17 \quad [\Pi_1(5), \Pi_2(5)] = [\psi_1^6, \psi_2^6] = [0.076, 0.186]$$

Lo que significa que el indicador de confianza que haya más de 5 unidades en el sistema se halla situado entre 0.076 y 0.186.

A título indicativo se presenta, en la figura 20.1, los intervalos de confianza en función de n .

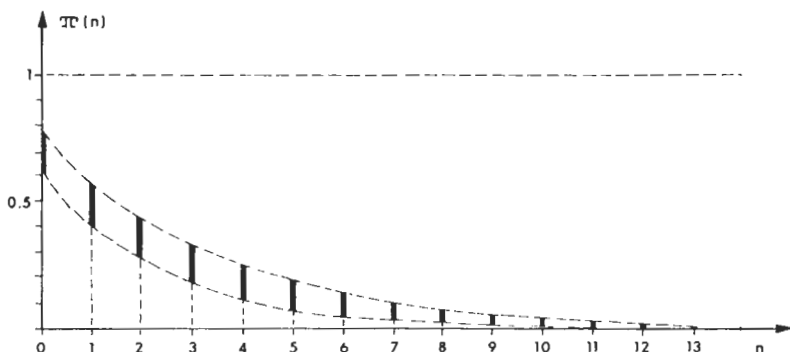


FIGURA 20.1

El principio que vamos a utilizar será el siguiente: toda fórmula relativa a las colas que sea monótona (creciente o decreciente) en relación al parámetro considerado, podrá ser expresada por un intervalo de confianza.

De esta manera, siempre en el supuesto de una cola única, llegada poissoniana, servicio exponencial, el número medio de unidades en el sistema viene dado por:

$$20.18 \quad \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p(n) = \frac{\psi}{1 - \psi}$$

en donde $p(n)$ es la probabilidad que existan n unidades en la cola; $p(n)$ no es monótona en relación a ψ sin embargo n es monótona en relación a ψ . Se escribirá entonces:

$$20.19 \quad [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \left[\frac{\psi_1}{1 - \psi_1}, \frac{\psi_2}{1 - \psi_2} \right]$$

Si se toman por ejemplo los datos (20.15), se tiene:

$$20.20 \quad [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \left[\frac{0.651}{1 - 0.651}, \frac{0.756}{1 - 0.756} \right] = [1.865, 3.098]$$

De esta manera, este número medio puede variar entre 2 y 3 (se eliminan las partes fraccionarias que no son significativas en este caso).

El número dado en (20.18) corresponde al número medio de unidades en el sistema, para el número de unidades en espera (no se tiene en cuenta la unidad que está siendo servida); se tiene:

$$20.21 \quad \bar{\nu} = \frac{\psi^2}{1 - \psi}$$

Se trata de una función monótona. Con los datos (20.15):

$$20.22 \quad [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] = \left[\frac{0.651^2}{1 - 0.651}, \frac{0.756^2}{1 - 0.756} \right] = [1.214, 2.342]$$

La cola se compone de 1 a 2 unidades aproximadamente.

LOS RESULTADOS EN EL SUPUESTO DE MONOTONIA

Otros resultados proporcionan también fórmulas caracterizadas por la monotonía.

El tiempo medio de espera en la cola es:

$$20.23 \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$$

y el tiempo medio de espera en el sistema:

$$20.24 \quad \bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda}$$

de donde se deduce que:

$$20.25 \quad [\bar{t}_{f_1}, \bar{t}_{f_2}] = \frac{1}{[\lambda_1, \lambda_2]} \cdot \left[\frac{\psi_1^2}{1 - \psi_1}, \frac{\psi_2^2}{1 - \psi_2} \right]$$

$$= \left[\frac{\psi_1^2}{\lambda_2 (1 - \psi_1)}, \frac{\psi_2^2}{\lambda_1 (1 - \psi_2)} \right]$$

Verifiquemos la monotonía.

Continuará cumpliéndose que:

$$20.26 \quad \lambda_1 \leq \lambda_2$$

y por lo tanto:

$$20.27 \quad \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{1}{\lambda_1}$$

por otra parte:

$$20.28 \quad \frac{\psi_1^2}{1 - \psi_1} \leq \frac{\psi_2^2}{1 - \psi_2}$$

por lo que:

$$20.29 \quad \frac{1}{\lambda_2} \frac{\psi_1^2}{1 - \psi_1} \leq \frac{1}{\lambda_1} \frac{\psi_2^2}{1 - \psi_2}$$

Para el tiempo de espera en el sistema se tiene:

$$\begin{aligned} 20.30 \quad [\bar{t}_{s_1}, \bar{t}_{s_2}] &= \frac{1}{[\lambda_1, \lambda_2]} \cdot \left[\frac{\psi_1}{1 - \psi_1}, \frac{\psi_2}{1 - \psi_2} \right] \\ &= \left[\frac{\psi_1}{\lambda_2 (1 - \psi_1)}, \frac{\psi_2}{\lambda_1 (1 - \psi_2)} \right] \end{aligned}$$

Verifiquemos la monotonía.

Se tiene, por hipótesis:

$$20.31 \quad \psi_1 \leq \psi_2$$

$$20.32 \quad 1 - \psi_1 \geq 1 - \psi_2$$

$$20.33 \quad \frac{\psi_1}{1 - \psi_1} \leq \frac{\psi_2}{1 - \psi_2}$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta (20.27):

$$20.34 \quad \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1}{1 - \psi_1} \leq \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_2}{1 - \psi_2}$$

Volvamos a considerar los valores numéricos de (20.15):

$$20.35 \quad \psi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} = \frac{2.8}{4.3} = 0.651$$

$$20.36 \quad \psi_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_1} = \frac{3.1}{4.1} = 0.756$$

$$20.37 \quad \frac{\psi_1^2}{1 - \psi_1} = 1.214, \quad \frac{\psi_2^2}{1 - \psi_2} = 2.342$$

$$20.39 \quad \frac{1}{\lambda_2} = 0.322, \quad \frac{1}{\lambda_1} = 0.357$$

$$20.41 \quad \frac{\psi_1}{1 - \psi_1} = 1.865, \quad \frac{\psi_2}{1 - \psi_2} = 3.098$$

$$20.43 \quad [\bar{t}_{f_1}, \bar{t}_{f_2}] = [0.322 \times 1.214, 0.357 \times 2.342] \\ = [0.391, 0.836]$$

$$20.44 \quad [\bar{t}_{s_1}, \bar{t}_{s_2}] = [0.322 \times 1.865, 0.357 \times 3.098] \\ = [0.601, 1.106]$$

Hay que observar que, contrariamente con lo que sucede con los datos

no borrosos, la diferencia entre (20.44) y (20.43) no proporciona la duración del servicio, es decir $1/\mu$

$$\begin{aligned}
 20.45 \quad [\bar{t}_{s_1}, \bar{t}_{s_2}] (-) [\bar{t}_{f_1}, \bar{t}_{f_2}] &= \\
 &= \left[\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1}{1-\psi_1}, \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2}{1-\psi_2} \right] \\
 &\quad (-) \left[\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1^2}{1-\psi_1}, \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1}{1-\psi_1} - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2}, \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2}{1-\psi_2} - \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} \right]
 \end{aligned}$$

Si se hace $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ y $\psi_1 = \psi_2 = 1$ se obtiene:

$$20.46 \quad t_s - t_f = \frac{1}{\mu}$$

Este fenómeno es perfectamente conocido tanto en la teoría de los intervalos de confianza como en el ámbito borroso.

$$\begin{aligned}
 20.47 \quad ([a_1, a_2] (-) [b_1, b_2]) (+) [b_1, b_2] \\
 = [a_1 - b_2 + b_1, a_2 - b_1 + b_2] \neq [a_1, a_2]
 \end{aligned}$$

No se cumple tampoco la propiedad (20.46) con la diferencia de Minkowski:

$$\begin{aligned}
 20.48 \quad [t_{s_1}, t_{s_2}] (-)_m [t_{f_1}, t_{f_2}] \\
 = \left[\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1}{1-\psi_1} - \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1^2}{1-\psi_1}, \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2}{1-\psi_2} - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2} \right] \\
 \neq \left[\frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_1} \right]
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces, suponiendo que la duración media de servicio es d:

$$20.49 \quad [d_{\sigma_1}, d_{\sigma_2}] = 1(:) [\mu_1, \mu_2] \\ = \left[\frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_1} \right]$$

Al mismo tiempo se tendrá, si d_E designa la duración media entre dos llegadas:

$$20.50 \quad [d_{E_1}, d_{E_2}] = \left[\frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_1} \right]$$

Como ha podido observarse se pueden hacer intervenir datos inciertos en la teoría de colas tal como ha sido señalado, siempre en el supuesto de preservar la monotonía.

Todo cuanto, sin dificultad, hemos realizado con los intervalos de confianza, podemos hacerlo con los números borrosos triangulares con la aproximación:

$$20.51 \quad 1(:) (a_1, a_2, a_3) \simeq \left(\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right)$$

También se podría actuar con cualesquiera datos borrosos operando nivel por nivel.

EL SUPUESTO DE VARIAS ESTACIONES IDENTICAS Y EN PARALELO

Vamos a estudiar ahora el supuesto de varias estaciones consideradas como idénticas y en paralelo.

Supongamos que el número de estaciones que prestan servicios es s . Si las s estaciones no se hallan ocupadas cuando se presenta una unidad, esta unidad queda servida de manera inmediata; por el contrario si todas las s estaciones se hallan ocupadas, la unidad debe esperar y se formará una cola.

Llamemos n al número de unidades que existen en el sistema; si $n \leq s$ las unidades no deben esperar y si $n > s$ existe una cola de $n - s$ unidades.

En el supuesto formal, el estudio es sensiblemente más difícil que en el caso anterior, pero este estudio ha sido realizado desde hace ya mucho

tiempo y es sobradamente conocido. Volveremos a encontrar las mismas dificultades y vamos a señalar lo que es susceptible de descripción en el caso en que los datos de entrada y de servicio son inciertos y únicamente conocidos bajo forma de intervalos de confianza. Evidentemente se es un dato formal, se trata de una decisión o hipótesis básica sobre la estructura del sistema.

Recordemos las condiciones y especificaciones de la teoría probabilística de una cola con varias estaciones. Cuando una estación queda libre el primer cliente de la cola será servido por esta estación; no existe preferencia alguna de un cliente para una estación. Todas las estaciones tienen un mismo tipo medio de servicio μ y la ley de servicio es exponencial. Las llegadas siguen la ley de Poisson (intervalos de llegada según la ley exponencial) en la que el tipo medio es λ . Se designa por:

s	al número de estaciones
ν	al número de unidades en la cola
n	al número total de unidades en el sistema, es decir en la cola y en las estaciones, por lo tanto $n = j + \nu$
j	al número de clientes que están sirviendo en las estaciones ($0 \leq j \leq s$)
ρ	al número de estaciones inocupadas
$\bar{n}, \bar{\nu}, \bar{j}, \bar{\rho}$	a las esperanzas matemáticas de n, ν, j, ρ
$\bar{t}_f$	al tiempo medio de espera en la cola antes de que se produzca el servicio

Existe una única cola y los clientes se dirigen inmediatamente hacia aquella estación que queda libre.

Mientras se cumpla que $j < s$, es decir cuando no todas las estaciones se hallan ocupadas, no existen colas y cada unidad que llega es servida de inmediato ($\nu = 0$). Por el contrario, si $j = s$, puede formarse una cola y entonces $\nu \geq 0$.

De nuevo nos colocamos en el supuesto de funcionamiento del sistema en régimen permanente.

Se escribirá

$$20.52 \quad \psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

Esta magnitud se llamará "intensidad de tráfico por estación". Se establece que debe cumplirse:

$$20.53 \quad \frac{\lambda}{s \mu} < 1, \text{ es decir } \frac{\lambda}{\mu} < s$$

ya que en caso contrario la cola llegaría a ser infinita.

La probabilidad p_n de que existan n unidades en el sistema (es decir n clientes que están, o bien siendo servidos o en la cola) viene dada por:

$$20.54 \quad p_n = p_0 \frac{\psi^n}{n!}, \quad 1 \leq n < s$$

$$= p_0 \frac{\psi^n}{s! s^{n-s}}, \quad n \geq s$$

en donde

$$20.55 \quad p_0 = \frac{1}{\frac{\psi^s}{s! \left(1 - \frac{\psi}{s}\right)} + 1 + \frac{\psi}{1} + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3!} + \dots + \frac{\psi^{s-1}}{(s-1)!}}$$

o también:

$$20.56 \quad p_n = \frac{\psi}{n} p_{n-1}, \quad 1 \leq n < s$$

$$= \frac{\psi}{s} p_{n-1}, \quad n \geq s$$

Esta ley de probabilidad no es monótona. Por el contrario:

$$20.57 \quad \text{pr}(N \leq n) = \sum_{k=0}^n p_k$$

y

$$20.58 \quad \text{pr}(N > n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$$

son leyes acumuladas monótonas. En este caso se pueden sustituir las probabilidades por indicadores de confianza $\Pi(n)$:

$$\begin{aligned} 20.59 \quad \Pi(n) &= [\Pi_1(n), \Pi_2(n)] \\ &= [\text{pr}_1(N > n), \text{pr}_2(N > n)] \end{aligned}$$

en donde $\Pi_1(n)$ se refiere a ψ_1 y $\Pi_2(n)$ a ψ_2 con:

$$\begin{aligned} 20.60 \quad \psi &= [\psi_1, \psi_2] = \frac{[\lambda_1, \lambda_2]}{[\mu_1, \mu_2]} \\ &= [\lambda_1/\mu_2, \lambda_2/\mu_1], \quad \lambda_2/\mu_1 < s \end{aligned}$$

El cálculo de $\Pi_1(n)$ y $\Pi_2(n)$ se realizará, pues, de la siguiente manera:

$$20.61 \quad \Pi_1(n) = \Pi_1(0) \frac{\psi_1^n}{n!}, \quad 1 \leq n < s$$

$$= \Pi_1(0) \frac{\psi_1^n}{s! s^{n-s}}, \quad n \geq s$$

$$20.62 \quad \Pi_1(0) = \frac{1}{\frac{\psi_1^s}{s! \left(1 - \frac{\psi_1}{s}\right)} + 1 + \frac{\psi_1}{1} + \frac{\psi_1^2}{2!} + \frac{\psi_1^3}{3!} + \dots + \frac{\psi_1^{s-1}}{(s-1)!}}$$

$$20.63 \quad \Pi_2(n) = \Pi_2(0) \frac{\psi_2^n}{n!}, \quad 1 \leq n < s$$

$$= \Pi_2(0) \frac{\psi_2^n}{s! s^{n-s}}, \quad n \geq s$$

$$20.64 \quad \Pi_2(0) = \frac{1}{\frac{\psi_2^s}{s! \left(1 - \frac{\psi_2}{s}\right)} + 1 + \frac{\psi_2}{1} + \frac{\psi_2^2}{2!} + \frac{\psi_2^3}{3!} + \dots + \frac{\psi_2^{s-1}}{(s-1)!}}$$

$$20.65 \quad \Pi_1(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \Pi_1(k)$$

$$20.66 \quad \Pi_2(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \Pi_2(k)$$

Se puede tomar también para $\Pi_1(n)$ y $\Pi_2(n)$:

$$20.67 \quad \Pi_1(n) = \Pi_1(0) \frac{\psi_1^n}{n!}, \quad 1 \leq n < s$$

$$= \Pi_1(0) \frac{\psi_1^n}{s! s^{n-s}}, \quad n \geq s$$

$$20.68 \quad \Pi_2(n) = \Pi_2(0) \frac{\psi_2^n}{n!}, \quad 1 \leq n < s$$

$$= \Pi_2(0) \frac{\psi_2^n}{s! s^{n-s}}, \quad n \geq s$$

Las fórmulas (20.61) a (20.68) pueden adoptar una forma simplificada, si se considera el supuesto de una posible espera de una duración cualquiera. Se escribe:

$$20.69 \quad \Pi_1(s) = \sum_{n=s}^{\infty} \Pi_1(n) = \frac{\psi_1^s}{s! \left(1 - \frac{\psi_1}{s}\right)} \cdot \Pi_1(0)$$

$$20.70 \quad \Pi_2(s) = \sum_{n=s}^{\infty} \Pi_2(n) = \frac{\psi_2^s}{s! \left(1 - \frac{\psi_2}{s}\right)} \cdot \Pi_2(0)$$

Como puede observarse los cálculos resultan de una cierta complicación aunque no representan demasiado para los ordenadores.

La monotonía va a aparecer de nuevo para $\bar{v}$ y $\bar{n}$:

$$20.71 \quad \bar{\nu}_1 = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \Pi_1(n) = \frac{\psi_1^{s+1}}{s \cdot s! \left(1 - \frac{\psi_1}{s}\right)^2} \cdot \Pi_1(0)$$

$$20.72 \quad \bar{\nu}_2 = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \Pi_2(n) = \frac{\psi_2^{s+1}}{s \cdot s! \left(1 - \frac{\psi_2}{s}\right)^2} \cdot \Pi_2(0)$$

De donde:

$$20.73 \quad [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) [\Pi_1(n), \Pi_2(n)]$$

$$= \left[\frac{\psi_1^{s+1}}{s \cdot s! \left(1 - \frac{\psi_1}{s}\right)^2} \Pi_1(0), \frac{\psi_2^{s+1}}{s \cdot s! \left(1 - \frac{\psi_2}{s}\right)^2} \Pi_2(0) \right]$$

El cálculo de $[\bar{n}_1, \bar{n}_2]$ no permite obtener una fórmula como la (20.73) ya que es necesario realizar un cálculo haciendo:

$$20.74 \quad [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \Pi_1(n), \sum_{n=0}^{\infty} n \Pi_2(n) \right]$$

Para $[\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2]$ resulta más simple:

$$20.75 \quad [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2] = \left[\sum_{n=0}^s (s-n) \Pi_1(n), \sum_{n=0}^s (s-n) \Pi_2(n) \right]$$

$$= [s - \psi_2, s - \psi_1]$$

En cuanto a $[\bar{j}_1, \bar{j}_2]$, se tiene:

$$20.76 \quad [\bar{j}_1, \bar{j}_2] = [\bar{n}_1 - \bar{\nu}_2, \bar{n}_2 - \bar{\nu}_1]$$

Las medias se hallan ligadas entre sí de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 20.77 \quad [\bar{n}_1, \bar{n}_2] &= [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] (+) s (-) [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2] \\
 &= [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] (+) [\psi_1, \psi_2]
 \end{aligned}$$

Para obtener el tiempo medio de espera en la cola se recuerda que $\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$, por lo que se tendrá:

$$20.78 \quad \left[\bar{t}_{f_1}, \bar{t}_{f_2} \right] = \frac{[\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2]}{[\lambda_1, \lambda_2]} = \left[\frac{\bar{\nu}_1}{\lambda_2}, \frac{\bar{\nu}_2}{\lambda_1} \right]$$

en donde $\bar{\nu}_1$ y $\bar{\nu}_2$ se obtendrán a partir de (20.73).

El tiempo medio de espera en el sistema se obtendrá de manera similar pero sensiblemente más complicado aunque siempre monótono.

Es posible calcular muchas otras magnitudes útiles a través de los intervalos de confianza si se verifica la monotonía.

Evidentemente, las consideraciones que hemos desarrollado para el supuesto de una sola estación se aplican, sin problema, a los números borrosos triangulares y, de manera más general, a los números borrosos nivel por nivel.

EL PROBLEMA DE VARIAS ESTACIONES Y NUMERO LIMITADO DE CLIENTES

Vamos a exponer un ejemplo recordando que el método de extensión a la incertidumbre que acabamos de presentar es aplicable a todas las fórmulas en las que existe monotonía. El caso que veremos a continuación hace referencia a varias estaciones y a un número limitado de clientes (siempre en régimen permanente).

Se considera el supuesto concreto de m equipos (clientes) y s mecánicos para su entretenimiento (estaciones), con la hipótesis $s < m$. Se describirá el fenómeno de espera de la siguiente manera: si $1 \leq n \leq s$ existen $s - n$ mecánicos que se hallan inocupados (n equipos se están reparando y ningún equipo se halla a la espera para ser reparado); si $s < n \leq m$, existen s equipos que se están reparando y $n - s$ que se hallan a la espera. Se admite que $\psi < s$ para evitar un fenómeno de congestión, en donde $\psi = \lambda/\mu$

Se supone, en todo caso, que las leyes de avería y las de la duración de la reparación siguen la ley de Poisson (los intervalos siguen la ley exponencial). Se tiene:

$$20.79 \quad 0 \leq n \leq s, \quad p_n = C_n^m \psi^n p_0 \text{ en donde } C_n^m = \frac{m!}{(m-n)! n!}$$

$$s \leq n \leq m \quad p_n = \frac{n!}{s! s^{n-s}} C_n^m \cdot \psi^n \cdot p_0$$

en donde, evidentemente:

$$20.80 \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Se obtiene p_0 de (20.79) y (20.80).

Resulta más simple utilizar un método de recurrencia. Se escribe:

$$20.81 \quad a_0 = \frac{p_n}{p_0}$$

Se calcula a_n de $n=0$ a $n=s-1$ con la ayuda de la fórmula:

$$20.82 \quad a_n = \frac{m-n+1}{n} \psi a_{n-1} \text{ en donde } a_0 = 1$$

Se calcula a_n de $n=s$ a $n=m$ con la fórmula:

$$20.83 \quad a_n = \frac{m-n+1}{s} \psi a_{n-1}$$

La ley p_n no es monótona y las a_n tampoco. Pero las leyes acumuladas que se obtienen a partir de p_n o de a_n son monótonas, por lo que es posible escribir:

$$20.84 \quad [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] = \left[\sum_{n=s+1}^m (n-s) \Pi_1(n), \sum_{n=s+1}^m (n-s) \Pi_2(n) \right]$$

en donde $\Pi_1(n)$ corresponde a la ley p_n con ψ_1 y $\Pi_2(n)$ a esta ley con ψ_2 .

De la misma manera se puede decir que:

$$20.85 \quad [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2] = \left[\sum_{n=0}^s (s-n) \Pi_2(n), \sum_{n=0}^s (s-n) \Pi_1(n) \right]$$

ya que para $\bar{\rho}$ la monotonía tiene lugar en sentido inverso.

También se tiene que:

$$20.86 \quad [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = s(+) [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] (-) [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2]$$

lo que permite calcular $[\bar{n}_1, \bar{n}_2]$.

El tiempo medio de espera para el equipo es:

$$20.87 \quad [\bar{t}_{f1}, \bar{t}_{f2}] = \frac{[\nu_1, \nu_2]}{[\lambda_1, \lambda_2] \cdot [m - n_2, m - n_1]}$$

Vamos a desarrollar un ejemplo numérico:

$$20.88 \quad m = 20, \quad s = 3, \quad \psi_1 = 0.1, \quad \psi_2 = 0.2$$

Se van a utilizar (20.82) y (20.83).

1) Con $\psi_1 = 0.1$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{20-0}{1} \times 0.1 \times 1 = 2$$

$$a_2 = \frac{20-1}{2} \times 0.1 \times 2 = 1.9$$

$$a_3 = \frac{20-2}{3} \times 0.1 \times 1.9 = 1.14$$

$$a_4 = \frac{20-3}{3} \times 0.1 \times 1.14 = 0.646$$

$$20.89 \quad a_5 = \frac{20-4}{3} \times 0.1 \times 0.646 = 0.34453$$

$$a_6 = \frac{20-5}{3} \times 0.1 \times 0.34453 = 0.17226$$

$$a_7 = \frac{20-6}{3} \times 0.1 \times 0.17226 = 0.08039$$

$$a_8 = \frac{20-7}{3} \times 0.1 \times 0.08039 = 0.03483$$

$$a_9 = 0.01393, a_{10} = 0.00511, a_{11} = 0.00170,$$

$$a_{12} = 0.00051, a_{13} = 0.00013, a_i < 0.0001,$$

$$i = 14, \dots, 20$$

De donde se deduce:

$$20.90 \quad \sum_{n=1}^{20} a_n = 6.3394$$

y, por tanto,

$$20.91 \quad \Pi_1(0) = \frac{1}{1 + 6.3394} = 0.13625$$

y, finalmente:

$$20.92 \quad \begin{aligned} \Pi_1(1) &= 0.27250, \quad \Pi_1(2) = 0.25888, \quad \Pi_1(3) = 0.15533, \\ \Pi_1(4) &= 0.08802, \quad \Pi_1(5) = 0.04694, \quad \Pi_1(6) = 0.02347, \\ \Pi_1(7) &= 0.01095, \quad \Pi_1(8) = 0.00475, \quad \Pi_1(9) = 0.00190, \\ \Pi_1(10) &= 0.00070, \quad \Pi_1(11) = 0.00023, \quad \Pi_1(12) = 0.00007, \end{aligned}$$

2) Con $\psi_2 = 0.2$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{20-0}{1} \times 0.2 \times 1 = 4$$

$$a_2 = \frac{20-1}{2} \times 0.2 \times 4 = 7.6$$

$$a_3 = \frac{20-2}{3} \times 0.2 \times 7.6 = 9.12$$

$$a_4 = \frac{20-3}{3} \times 0.2 \times 9.12 = 10.336$$

$$a_5 = \frac{20-4}{3} \times 0.2 \times 10.336 = 11.02506$$

$$20.93 \quad a_6 = \frac{20-5}{3} \times 0.2 \times 11.02506 = 11.02506$$

$$a_7 = \frac{20-6}{3} \times 0.2 \times 11.02506 = 10.29005$$

$$a_8 = \frac{20-7}{3} \times 0.2 \times 10.29005 = 8.91804$$

$$a_9 = \frac{20-8}{3} \times 0.2 \times 8.91804 = 7.13443$$

$$a_{10} = \frac{20-9}{3} \times 0.2 \times 7.13443 = 5.23191$$

$$a_{11} = \frac{20-10}{3} \times 0.2 \times 5.23191 = 3.48794$$

$$a_{12} = 2.09276, \quad a_{13} = 1.11614, \quad a_{14} = 0.52086,$$

$$a_{15} = 0.20834, \quad a_{16} = 0.06944, \quad a_{17} = 0.01851,$$

$$a_{18} = 0.00370, \quad a_{19} = 0.00049, \quad a_{20} = 0.00003$$

$$20.94 \quad \sum_{n=1}^{20} a_n = 93.19875$$

$$\Pi_2(0) = \frac{1}{1 + 93.19875} = 0.01061$$

$$\Pi_2(1) = 0.04246, \quad \Pi_2(2) = 0.08068, \quad \Pi_2(3) = 0.09681,$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_2(4) &= 0.10972, \quad \Pi_2(5) = 0.11704, \quad \Pi_2(6) = 0.11704 \\
 \Pi_2(7) &= 0.10923, \quad \Pi_2(8) = 0.09467, \quad \Pi_2(9) = 0.07573 \\
 20.95 \quad \Pi_2(10) &= 0.05554, \quad \Pi_2(11) = 0.03702, \quad \Pi_2(12) = 0.02221 \\
 \Pi_2(13) &= 0.01184, \quad \Pi_2(14) = 0.00552, \quad \Pi_2(15) = 0.00221 \\
 \Pi_2(16) &= 0.00073, \quad \Pi_2(17) = 0.00019, \quad \Pi_2(18) = 0.00003 \\
 \Pi_2(19) &= 0, \quad \Pi_2(20) = 0
 \end{aligned}$$

Se calcula $\bar{\nu}_1$ y $\bar{\nu}_2$:

$$20.96 \quad \bar{\nu}_1 = \sum_{n=4}^{20} (n-3) \cdot \Pi_1(n) = 0.339$$

$$20.97 \quad \bar{\nu}_2 = \sum_{n=4}^{20} (n-3) \cdot \Pi_2(n) = 3.273$$

$$20.98 \quad [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] = [0.339, 3.273]$$

y también $\bar{\rho}_1$ y $\bar{\rho}_2$:

$$20.99 \quad \bar{\rho}_1 = \sum_{n=0}^3 (3-n) \Pi_2(n) = 0.197$$

$$20.100 \quad \bar{\rho}_2 = \sum_{n=0}^3 (3-n) \Pi_1(n) = 1.213$$

$$20.101 \quad [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2] = [0.197, 1.213]$$

Como se puede observar, cuando se toma $\psi_2 = 2\psi_1$ las desviaciones se ensanchan mucho para los intervalos de confianza. En la práctica se puede valuar ψ de manera más ajustada. Para obtener $\psi_1 = 0.1$ y $\psi_2 = 0.2$ se había tomado:

$$20.102 \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \mu_1 = 15, \quad \mu_2 = 20$$

lo que proporciona:

$$\begin{aligned}
 20.103 \quad [\psi_1, \psi_2] &= [\lambda_1, \lambda_2] (:) [\mu_1, \mu_2] \\
 &= [2, 3] (:) [15, 20] \\
 &= [2/20, 3/15] = [0.1, 0.2]
 \end{aligned}$$

De esta manera el número medio de equipos que se hallan a la espera de la reparación viene dado por (20.98) y el número medio de mecánicos inactivos viene dado por (20.101).

Se calcula también:

$$\begin{aligned}
 20.104 \quad [\bar{n}_1, \bar{n}_2] &= 3 (+) [0.339, 3.273] (-) [0.197, 1.213] \\
 &= [2.126, 6.076]
 \end{aligned}$$

Resultan interesantes en este estudio, los dos coeficientes:

$$\begin{aligned}
 20.105 \quad k^{(1)} &= \frac{\bar{\nu}}{m} = \frac{\text{número medio de equipos en la cola}}{\text{número total de equipos}} \\
 20.106 \quad k^{(2)} &= \frac{\bar{\rho}}{s} = \frac{\text{número medio de mecánicos inactivos}}{\text{número total de mecánicos}}
 \end{aligned}$$

En este caso los coeficientes se convertirán en intervalos de confianza:

$$\begin{aligned}
 20.107 \quad [k_1^{(1)}, k_2^{(1)}] &= \frac{1}{20} [0.339, 3.273] \\
 &= [0.017, 0.163]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20.108 \quad [k_1^{(2)}, k_2^{(2)}] &= \frac{1}{3} [0.197, 1.213] \\
 &= [0.065, 0.404]
 \end{aligned}$$

El tiempo medio de espera para un equipo ha sido obtenido en (20.87) pero cuando los datos vienen dados a través de intervalos de confianza:

$$20.109 \quad m - [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = [20, 20] (-) [2.126, 6.076]$$

$$= [13.924, 17.874]$$

$$20.110 \quad [\lambda_1, \lambda_2] \cdot (m(-) [\bar{n}_1, \bar{n}_2]) \\ = [2, 3] \cdot [13.924, 17.874] = [27.848, 53.622]$$

$$20.111 \quad [\bar{t}_{r1}, \bar{t}_{r2}] = [0.339, 3.273] \quad (:) [27.848, 53.622] \\ = [0.006, 0.117]$$

El aspecto económico de este último problema resulta muy interesante como consecuencia de su utilidad.

Supongamos que C_1 es el coste de inmovilización de un equipo por unidad de tiempo y C_2 el del salario de un mecánico (se supone que todos tienen el mismo salario y que el parque de equipos es homogéneo).

El coste global de inactividad vendrá dado por:

$$20.112 \quad \Gamma(s) = (C_1 \bar{\nu} + C_2 \bar{\rho}) T$$

Con costes constantes a lo largo del tiempo se toma:

$$20.113 \quad \gamma(s) = \frac{\Gamma(s)}{T} = C_1 \bar{\nu} + C_2 \bar{\rho}$$

Se pasa ahora a los intervalos de confianza

$$20.114 \quad [\gamma_1(s), \gamma_2(s)] = C_1 [\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] (+) C_2 [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2] \\ = C_1 \left[\sum_{n=s+1}^m (n-s) \Pi_1(n), \sum_{n=s+1}^m (s-n) \Pi_2(n) \right] \\ (+) C_2 \left[\sum_{n=0}^s (s-n) \Pi_2(n), \sum_{n=0}^s (s-n) \Pi_1(n) \right]$$

Supongamos que el coste por hora de indisponibilidad de un equipo sea 1.800 unidades monetarias y que el salario por hora de un mecánico sea de 60 unidades monetarias. Se tendrá, tomando los datos numéricos obtenidos en (20.98) y (20.101):

$$20.115 \quad [\gamma_1(3), \gamma_2(3)] = 1800 [0.339, 3.273] \\ (+) 60 [0.197, 1.213]$$

$$\begin{aligned} &= [610, 5891] + [11, 72] \\ &= [622, 5963] \end{aligned}$$

Parece evidente que 3 mecánicos no son suficientes. Pero conviene realizar un cálculo económico con s como parámetro. Se reharán, pues, los cálculos anteriores no solamente para $s = 3$ sino para $s = 1, 2, 3, \dots, 20$ mecánicos. Los intervalos de confianza que se obtengan no proporcionarán, en general, un orden total para la obtención de un coste global mínimo; se tendrá un orden parcial y se establecerá un criterio (por ejemplo valor medio de cada intervalo) para obtener un orden total y poder así optimizar. A este respecto se pueden adoptar otros muchos criterios.

A pesar de que sólo hemos presentado tres ejemplos de aplicación, todos los modelos de colas son susceptibles de ser estudiados de manera similar en el ámbito de la incertidumbre. Es recomendable, finalmente, pasar de los intervalos de confianza a los números borrosos triangulares ya que a menudo resulta más expresivo para aquellos que tienen la obligación de decidir.

TERCERA PARTE

Aplicaciones a problemas de gestión

El presupuesto base cero borroso

PLANTEAMIENTO DEL METODO P.B.C.

El objetivo de este capítulo no consiste en la descripción del método "presupuesto base cero" (P.B.C.) ni en sus aspectos sociológicos, ni en lo que se refiere a la organización de la empresa o de sus proyectos, sino fundamentalmente en la parte matemática de este método actualmente muy extendido y aplicado sobre todo en U.S.A. (1). Nuestra intención es poner de manifiesto que resulta más realista considerar presupuestos inciertos expresados a través de números borrosos que presupuestos dados estrictamente en valores concretos. En nuestra época no podemos ser muy precisos en las previsiones presupuestarias como consecuencia de que el entorno económico está lejos de ser suficientemente estable.

Para explicar el interés de utilizar números borrosos para los presupuestos e incluir estos números en el método general, vamos a recordar los principios clásicos de este método, a partir de un ejemplo concreto.

En una empresa, se consideran cinco "centros de decisión" es decir direcciones de departamento que tienen sus propias responsabilidades presupuestarias y sus respectivos presupuestos de funcionamiento.

Se parte, pues de cinco centros de decisión $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$. Han sido definidos cuatro presupuestos A_0, A_1, A_2 y A_3 para $\mathcal{A}$ en los que $A_0 < A_1 < A_2 < A_3$ y A_0 es el "presupuesto mínimo" por debajo del

(1) Para una breve descripción de este método se puede consultar: KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: "Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos a la Gestión de las Empresas". Ed. Milladoiro 1986. Capítulo 3.

cual el departamento $\mathcal{A}$ no podría funcionar De la misma manera se han definido para $\mathcal{B}$ tres presupuestos: $B_0 < B_1 < B_2$; para $\mathcal{C}$ se han definido cuatro presupuestos $C_0 < C_1 < C_2 < C_3$; para $\mathcal{D}$ se han definido dos presupuestos $D_0 < D_1$; y para $\mathcal{E}$ se han definido tres $E_0 < E_1 < E_2$. Supongamos que todos los presupuestos han sido definidos para un año de gestión y que los gestores de la empresa se han reunido con los responsables de los departamentos para establecer la distribución del presupuesto general. Es evidente que, si un presupuesto X_j es superior a un presupuesto X_i es porque se podrán realizar más actividades con X_j que con X_i . Este punto debe quedar muy claro.

Resumamos seguidamente los presupuestos de los departamentos:

$$\mathcal{A} : A_0 < A_1 < A_2 < A_3$$

$$\mathcal{B} : B_0 < B_1 < B_2$$

$$21.1 : \mathcal{C} : C_0 < C_1 < C_2 < C_3$$

$$\mathcal{D} : D_0 < D_1$$

$$\mathcal{E} : E_0 < E_1 < E_2$$

Se establece también que si se elige un presupuesto X_j , se descarta $X_i < X_j$ ya que se supone que contiene, en general, todo lo que hay en X_i .

Los responsables de la gestión van a elegir los presupuestos estableciendo unas prioridades y examinando todos los presupuestos para obtener un orden de preferencia. Para definir este orden existirán $4 + 3 + 4 + 2 + 3 = 16$ fases.

A título de ejemplo y para poner de manifiesto el método P.B.C. vamos a suponer que se ha realizado la elección de la siguiente manera: se ha elegido primero B_0 ; el departamento $\mathcal{B}$ parece, pues, prioritario. Se elige D_0 lo que da $B_0 + D_0$. Luego se elige E_0 lo que da $B_0 + D_0 + E_0$. Luego B_1 , lo que da $B_1 + D_0 + E_0$ (B_0 desaparece al ser sustituido por B_1); y así sucesivamente. La secuencia de la elección y los presupuestos acumulados correspondientes serán:

	Elección		Presupuesto acumulado
1)	B_0	:	B_0
2)	D_0	:	$B_0 + D_0$

	3)	E_0	:	$B_0 + D_0 + E_0$
	4)	B_1	:	$B_1 + D_0 + E_0$
	5)	A_0	:	$A_0 + B_1 + D_0 + E_0$
	6)	A_1	:	$A_1 + B_1 + D_0 + E_0$
	7)	C_0	:	$A_1 + B_1 + C_0 + D_0 + E_0$
21.2	8)	B_2	:	$A_1 + B_2 + C_0 + D_0 + E_0$
	9)	D_1	:	$A_1 + B_2 + C_0 + D_1 + E_0$
	10)	A_2	:	$A_2 + B_2 + C_0 + D_1 + E_0$
	11)	C_1	:	$A_2 + B_2 + C_1 + D_1 + E_0$
	12)	E_1	:	$A_2 + B_2 + C_1 + D_1 + E_1$
	13)	A_3	:	$A_3 + B_2 + C_1 + D_1 + E_1$
	14)	C_2	:	$A_3 + B_2 + C_2 + D_1 + E_1$
	15)	E_2	:	$A_3 + B_2 + C_2 + D_1 + E_2$
	16)	C_3	:	$A_3 + B_2 + C_3 + D_1 + E_2$

Por construcción, todo presupuesto acumulado es más grande que el que le precede. Sea L el presupuesto global de la empresa. Habrá que detenerse cuando el presupuesto acumulado llegue a L y entra dentro de lo posible que deba cerrarse un departamento si su presupuesto mínimo no forma parte del presupuesto global aceptado, menor o igual a L . De esta manera si $A_1 + B_1 + D_0 + E_0 < L$ y $A_1 + B_1 + C_0 + D_0 + E_0 > L$, deberá suprimirse C .

LA INCORPORACION DE NUMEROS BORROSOS TRIANGULARES

El inconveniente de este método, en muchos casos, está en la previsión de los presupuestos con valores estrictos, cuando en la realidad se preferiría dar unos "abanicos" (intervalos de confianza) o, lo que es mejor, números borrosos. Vamos a continuar este ejemplo con datos inciertos ex-

presados por números borrosos triangulares (resulta más cómodo y más fácil de definir).

Se va a suponer que los números borrosos $\underline{A}_0, \underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ se hallan totalmente ordenados, y si no fuera así, los ordenaríamos a partir de un criterio de maximización. Esto es no factible para ciertos problemas, en cuyo caso modificaríamos en consecuencia el método que vamos a presentar. De la misma manera consideramos totalmente ordenados los presupuestos borrosos de $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$.

Establezcamos los números borrosos triangulares en una unidad monetaria determinada.

- 1) $\underline{A}_0 = (1500, 1700, 1900)$
- 2) $\underline{A}_1 = (1650, 1800, 2050)$
- 3) $\underline{A}_2 = (1800, 1850, 2050)$
- 4) $\underline{A}_3 = (2000, 2100, 2300)$
- 5) $\underline{B}_0 = (1100, 1200, 1200)$
- 6) $\underline{B}_1 = (1300, 1380, 1470)$
- 7) $\underline{B}_2 = (1400, 1700, 1820)$
- 21.3 8) $\underline{C}_0 = (800, 850, 950)$
- 9) $\underline{C}_1 = (900, 950, 1100)$
- 10) $\underline{C}_2 = (1100, 1150, 1300)$
- 11) $\underline{C}_3 = (1250, 1400, 1450)$
- 12) $\underline{D}_0 = (600, 750, 900)$
- 13) $\underline{D}_1 = (950, 1100, 1200)$
- 14) $\underline{E}_0 = (630, 630, 630)$
- 15) $\underline{E}_1 = (850, 900, 950)$
- 16) $\underline{E}_2 = (1000, 1100, 1300)$

Si suponemos que la selección secuencial es la dada en (21.2) se obtiene:

- 1) $\underline{B}_0 = (1100, 1200, 1200)$
- 2) $\underline{B}_0 (+) \underline{D}_0 = (1100, 1200, 1200) (+) (600, 750, 900)$
 $= (1700, 1950, 2100)$

- 3) $\underline{B}_0 (+) \underline{D}_0 (+) \underline{E}_0 = (1100, 1200, 1200) (+) (600, 750, 900)$
 $(+) (630, 630, 630) = (2330, 2580, 2730)$
- 4) $\underline{B}_1 (+) \underline{D}_0 (+) \underline{E}_0 = (1300, 1380, 1470) (+) (600, 750, 900)$
 $(+) (630, 630, 630) = (2530, 2760, 3000)$
- 5) $\underline{A}_0 (+) \underline{B}_1 (+) \underline{D}_0 (+) \underline{E}_0 = (1500, 1700, 1900)$
 $(+) (1300, 1380, 1470) (+) (600, 750, 900)$
 $(+) (630, 630, 630) = (4030, 4460, 4900)$
- 6) $\underline{A}_1 (+) \underline{B}_1 (+) \underline{D}_0 (+) \underline{E}_0 = (1650, 1800, 2050)$
 $(+) (1300, 1380, 1470) (+) (600, 750, 900)$
 $(+) (630, 630, 630) = (4180, 4560, 5050)$
- 7) $\underline{A}_1 (+) \underline{B}_1 (+) \underline{C}_0 (+) \underline{D}_0 (+) \underline{E}_0 = (1650, 1800, 2050)$
 $(+) (1300, 1380, 1470) (+) (800, 850, 950) (+)$
 $(+) (600, 750, 900) (+) (630, 630, 630)$
 $= (4980, 5410, 6000)$
- 21.4 8) $\underline{A}_1 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_0 (+) \underline{D}_0 (+) \underline{E}_0 = (1650, 1800, 2050)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (800, 850, 950)$
 $(+) (600, 750, 900) (+) (630, 630, 630)$
 $= (5080, 5730, 6350)$
- 9) $\underline{A}_1 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_0 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_0 = (1650, 1800, 2050)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (800, 850, 950)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (630, 630, 630)$
 $= (5430, 6080, 6650)$
- 10) $\underline{A}_2 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_0 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_0 = (1800, 1850, 2050)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (800, 850, 950)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (630, 630, 630)$
 $= (5580, 6130, 6650)$
- 11) $\underline{A}_2 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_1 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_0 = (1800, 1850, 2050)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (900, 950, 1100)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (630, 630, 630)$
 $= (5680, 6230, 6800)$

- 12) $\underline{A}_2 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_1 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_1 = (1800, 1850, 2050)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (900, 950, 1100)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (850, 900, 950)$
 $= (5900, 6500, 7120)$
- 13) $\underline{A}_3 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_1 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_1 = (2000, 2100, 2300)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (900, 950, 1100)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (850, 900, 950)$
 $= (6100, 6750, 7370)$
- 14) $\underline{A}_3 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_2 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_1 = (2000, 2100, 2300)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (1100, 1150, 1300)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (850, 900, 950)$
 $= (6300, 6950, 7570)$
- 15) $\underline{A}_3 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_2 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_2 = (2000, 2100, 2300)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (1100, 1150, 1300)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (1000, 1100, 1300)$
 $= (6450, 7150, 7920)$
- 16) $\underline{A}_3 (+) \underline{B}_2 (+) \underline{C}_3 (+) \underline{D}_1 (+) \underline{E}_2 = (2000, 2100, 2300)$
 $(+) (1400, 1700, 1820) (+) (1250, 1400, 1450)$
 $(+) (950, 1100, 1200) (+) (1000, 1100, 1300)$
 $= (6600, 7400, 8070)$

LIMITACION BORROSA AL PRESUPUESTO GLOBAL

Supongamos ahora que se establece una función para el umbral cuya representación es la de la figura 21.1.

y que viene dada por:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{f}}(x) &= 1, & x &\leq 6600 \\ &= \frac{-x + 7500}{900}, & 6600 &\leq x \leq 7500 \\ &= 0, & 7500 &\leq x \end{aligned}$$

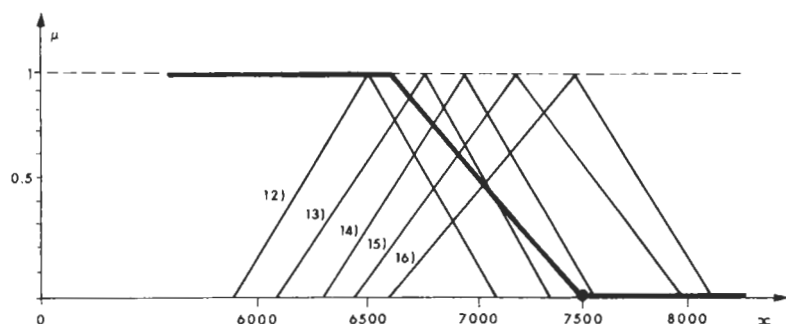


FIGURA 21.1

En la figura 21.1 representamos esta función umbral (en trazo fuerte) y los presupuestos acumulados 12), 13), 14), 15) y 16) calculados en (21.4); resulta inútil introducir los demás, ya que sin duda son aceptados. Desde el 12) al 16) se han calculado los índices de aceptación según (10.27). Se han hallado:

- Para 12) es decir $\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_1$: $k = 1$
 13) es decir $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_1$: $k = 0.967$
 21.6 14) es decir $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_1$: $k = 0.731$
 15) es decir $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_2$: $k = 0.468$
 16) es decir $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_3 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_2$: $k = 0.323$

Se puede admitir que k representa un riesgo de sobrepasar la cota fijada. 0.967 parece suficientemente próximo a la unidad para que la decisión recaiga sobre $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_1$.

En nuestro ejemplo no se ha rechazado ningún departamento. Evidentemente, tomando un umbral mucho más bajo, podría eliminarse alguno.

Como se ha señalado anteriormente, en nuestra época sensiblemente menos generosa en certezas económicas es preferible aceptar números borrosos en este tipo de métodos que números ciertos, es decir, precisos, que de alguna manera falsean las estimaciones.

Selección de personal

UN EJEMPLO SENCILLO DE SELECCION

Los problemas de selección de personal han constituido una de las constantes preocupaciones en la gestión de las empresas, habida cuenta de la dificultad que existe de formalizar adecuadamente relaciones en las cuales el hombre aparece de una manera fundamental. Ahora bien, si la teoría de los subconjuntos borrosos ha conseguido logros importantes en el campo de la semántica, ¿por qué no introducirla en el ámbito de la selección de personal?

Iniciemos esta exposición con un ejemplo sencillo pero que a la vez es muy frecuente e ilustrativo. Se trata de la necesidad que siente una empresa de contratar una secretaria con un determinado perfil caracterizado por tres cualidades: buena presencia, número de pulsaciones en mecanografía y capacidad de trabajo:

$$22.1 \quad C = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Como se puede observar una de estas cualidades permite la cuantificación, mientras que para las otras dos debe procederse a una valuación. Después de las primeras pruebas han quedado seleccionadas 8 candidatas:

$$22.2 \quad p = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$$

para cada p_i han quedado descritas las tres cualidades de la siguiente manera:

22.3

$$\begin{aligned} \tilde{D}(p_1) &= \begin{bmatrix} .4 \\ .3 \\ .8 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(p_2) = \begin{bmatrix} .9 \\ .2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(p_3) = \begin{bmatrix} .1 \\ 1 \\ .4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(p_4) = \begin{bmatrix} 1 \\ .8 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{D}(p_5) &= \begin{bmatrix} .7 \\ .9 \\ .8 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(p_6) = \begin{bmatrix} .6 \\ .4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(p_7) = \begin{bmatrix} .3 \\ .5 \\ .2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(p_8) = \begin{bmatrix} .5 \\ .6 \\ .7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esto permite establecer una relación borrosa:

22.4

C \ P	P							
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	.4	.9	.1	1	.7	.6	.3	.5
X ₂	.3	.2	1	.8	.9	.4	.5	.6
X ₃	.8	1	.4	0	.8	0	.2	.7

así como obtener la intensidad de cada cualidad que poseen las candidatas:

22.5

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_1) &= \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ \begin{bmatrix} .4 & .9 & .1 & 1 & .7 & .6 & .3 & .5 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \tilde{S}(x_2) &= \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ \begin{bmatrix} .3 & .2 & 1 & .8 & .9 & .4 & .5 & .6 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \tilde{S}(x_3) &= \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ \begin{bmatrix} .8 & 1 & .4 & 0 & .8 & 0 & .2 & .7 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

lo que permite establecer una asociación de cualidades, de tal manera que la buena presencia y la rapidez mecanográfica vendrán dadas por:

22.6

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_1 \wedge x_2) &= \\ = \tilde{S}(x_1) \cap \tilde{S}(x_2) &= \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ \begin{bmatrix} .3 & .2 & .1 & .8 & .7 & .4 & .3 & .5 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

y al considerar tres cualidades:

$$22.7 \quad \underline{\sim}(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = \underline{\sim}(x_1) \cap \underline{\sim}(x_2) \cap \underline{\sim}(x_3) =$$

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
=	.3	.2	.1	0	.7	0	.2	.5

resulta que p₅ es la que reúne en mayor grado las cualidades requeridas.

LA ADECUACION DE UN CANDIDATO A UN PUESTO DE TRABAJO

Es evidente que este ejemplo constituye sólo una aproximación muy grosera del que en la realidad se plantea, caracterizado por una mayor cantidad de cualidades exigidas, pero que permite adentrarnos de manera sencilla a problemas más complejos de selección de personal.

En efecto, es frecuente que el perfil ideal no pueda venir dado por el esquema descrito, sino que sea preciso un determinado grado en cada una de las cualidades que se exigen para ocupar una plaza. Así, si se considera un supuesto más general en el que para un determinado puesto de trabajo t, se exige la posesión de 7 cualidades $C = \{ A, B, C, D, E, F \text{ y } G \}$ los niveles de cualificación necesarios formarán, también, un subconjunto borroso tal como:

$$22.8 \quad \underline{\sim}T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & E & F & G \\ \hline .6 & .9 & .7 & 1 & .8 & .3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Supongamos ahora que se trata de seleccionar a n candidatos p₁, p₂, ..., p_n. Para nuestro ejemplo concreto hagamos n = 8.

22.9

$$\begin{array}{l} \underline{\sim}p_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & E & F & G \\ \hline 0 & .9 & .8 & 1 & .5 & .4 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \underline{\sim}p_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline .3 & .8 & .7 & .4 & 1 & .9 & .6 \\ \hline \end{array} \\ \underline{\sim}p_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline .4 & .8 & .6 & 1 & .9 & .3 & .3 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$p_4 = \begin{bmatrix} .6 & 1 & .9 & .5 & .7 & .5 & .8 \end{bmatrix}$$

$$p_5 = \begin{bmatrix} .2 & .1 & 1 & .9 & .3 & 0 & .4 \end{bmatrix}$$

$$p_6 = \begin{bmatrix} .8 & .8 & 1 & 1 & .1 & .9 & .9 \end{bmatrix}$$

$$p_7 = \begin{bmatrix} .5 & .6 & .2 & .1 & .4 & .6 & .2 \end{bmatrix}$$

$$p_8 = \begin{bmatrix} .1 & .8 & .4 & .2 & .5 & .3 & .4 \end{bmatrix}$$

Uno de los criterios para determinar la idoneidad de los candidatos a un determinado puesto de trabajo definido por un perfil, viene dado a través de la obtención de un "coeficiente de adecuación" de p a t que designaremos por $K(p, t)$, el cual se construye de la siguiente manera:

$$22.10 \quad \text{si } \mu_{\tilde{p}}(x) \geq \mu_{\tilde{T}}(x) \quad \text{se hace} \quad k_x(p \rightarrow t) = 1$$

$$22.11 \quad \text{si } \mu_{\tilde{p}}(x) < \mu_{\tilde{T}}(x) \quad \text{se hace} \quad k_x(p \rightarrow t) = \\ = 1 - \mu_{\tilde{T}}(x) + \mu_{\tilde{p}}(x)$$

lo que permite escribir también:

$$22.12 \quad k_x(p \rightarrow t) = 1 \wedge (1 - \mu_{\tilde{T}}(x) + \mu_{\tilde{p}}(x))$$

Para obtener $K(p, t)$ se suman las $k_x(p \rightarrow t)$ dividiendo el resultado por el número de actividades (7 en nuestro ejemplo) para obtener un número en $[0, 1]$. De los correspondientes cálculos se obtiene:

$$22.13$$

$$K(p_1, t) = \frac{0.4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0.7 + 1 + 1}{7} = 0.87$$

$$K(p_2, t) = \frac{0.7 + 0.9 + 1 + 0.4 + 1 + 1 + 1}{7} = 0.85$$

$$K(p_3, t) = \frac{0.8 + 0.9 + 0.9 + 1 + 1 + 1 + 1}{7} = 0.94$$

$$K(p_4, t) = \frac{1 + 1 + 1 + 0.5 + 0.9 + 1 + 1}{7} = 0.91$$

$$K(p_5, t) = \frac{0.6 + 0.2 + 1 + 0.9 + 0.5 + 0.7 + 1}{7} = 0.70$$

$$K(p_6, t) = \frac{1 + 0.9 + 1 + 1 + 0.3 + 1 + 1}{7} = 0.88$$

$$K(p_7, t) = \frac{0.9 + 0.7 + 0.5 + 0.2 + 0.6 + 1 + 1}{7} = 0.70$$

$$K(p_8, t) = \frac{0.5 + 0.9 + 0.7 + 0.2 + 0.7 + 1 + 1}{7} = 0.71$$

Se puede observar que el candidato p_3 es el que mejor se adapta al puesto de trabajo según los criterios expresados en (22.12).

Del análisis de este criterio se puede destacar un aspecto interesante. Así, un puesto de trabajo que no exige ninguna cualificación y un candidato que tampoco tiene cualificación alguna obtendría un $K = 1$, ya que el criterio establecido proporciona $K = 1$ a toda persona que iguala o sobrepasa, para las μ de las actividades consideradas, las μ del puesto de trabajo. El criterio elegido admite pues, el principio según el cual "el que puede mucho, puede también poco".

Otro criterio, que utiliza los subconjuntos borrosos, consiste en determinar el candidato que más se acerca al perfil exigido a través de niveles de cualificación. Esto se puede obtener a través de la distancia relativa de Hamming, que como ha sido reiteradamente expuesto es, para toda P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, y T :

$$22.14 \quad \delta(P_i, T) = \frac{1}{n} \sum_x \left(\left| \mu_{P_i}(x) - \mu_T(x) \right| \right), \quad x \in C$$

En el ejemplo anterior, resultaría:

$$\delta (P_1, T) = \frac{1}{7} (|0-0.6| + |0.9-0.9| + |0.8-0.7| + |1-1| + \\ + |0.5-0.8| + |0.4-0.3| + |0-0|) = 0.15$$

$$\delta (P_2, T) = \frac{1}{7} (|0.3-0.6| + |0.8-0.9| + |0.7-0.7| + |0.4-1| + \\ + |1-0.8| + |0.9-0.3| + |0.6-0|) = 0.34$$

$$\delta (P_3, T) = \frac{1}{7} (|0.4-0.6| + |0.8-0.9| + |0.6-0.7| + \\ + |1-1| + |0.9-0.8| + |0.3-0.3| + \\ + |0.3-0|) = 0.11$$

$$\delta (P_4, T) = \frac{1}{7} (|0.6-0.6| + |1-0.9| + |0.9-0.7| + |0.5-1| + \\ + |0.7-0.8| + |0.5-0.3| + |0.8-0|) = 0.27$$

22.15

$$\delta (P_5, T) = \frac{1}{7} (|0.2-0.6| + |0.1-0.9| + |1-0.7| + |0.9-1| + \\ + |0.3-0.8| + |0-0.3| + |0.4-0|) = 0.40$$

$$\delta (P_6, T) = \frac{1}{7} (|0.8-0.6| + |0.8-0.9| + |1-0.7| + |1-1| + |0.1-0.8| + \\ + |0.9-0.3| + |0.9-0|) = 0.40$$

$$\delta (P_7, T) = \frac{1}{7} (|0.5-0.6| + |0.6-0.9| + |0.2-0.7| + |0.1-1| + \\ + |0.4-0.8| + |0.6-0.3| + |0.2-0|) = 0.38$$

$$\delta (P_8, T) = \frac{1}{7} (|0.1-0.6| + |0.8-0.9| + |0.4-0.7| + |0.2-1| + |0.5-0.8| + \\ + |0.3-0.3| + |0.4-0|) = 0.34$$

A pesar de que con este criterio se deduce, también, que el candidato que mejor se adapta al puesto de trabajo es el p_3 , el orden ya no resulta el mismo que el resultante de la aplicación del criterio anterior. Además

si se utilizara otra noción de distancia el orden podría resultar también distinto.

Un tercer criterio podría establecerse a través de un cálculo de posibilidad. Como ya se ha señalado, la *posibilidad* de cada candidato con relación al perfil establecido vendría dado por:

$$22.16 \quad \text{pos}_{\sim}(P_i) = \bigvee_x (\mu_{P_i}(x) \wedge \mu_{\sim}(x))$$

lo que daría lugar en nuestro ejemplo a:

$$\text{pos}_{\sim}(P_1) = \bigvee (0 \wedge 0.6, 0.9 \wedge 0.9, 0.8 \wedge 0.7, 1 \wedge 1, 0.5 \wedge 0.8, \\ 0.4 \wedge 0.3, 0 \wedge 0) = 1$$

$$\text{pos}_{\sim}(P_2) = \bigvee (0.3 \wedge 0.6, 0.8 \wedge 0.9, 0.7 \wedge 0.7, 0.4 \wedge 1, \\ 1 \wedge 0.8, 0.9 \wedge 0.3, 0.6 \wedge 0) = 0.8$$

$$\text{pos}_{\sim}(P_3) = \bigvee (0.4 \wedge 0.6, 0.8 \wedge 0.9, 0.6 \wedge 0.7, 1 \wedge 1, \\ 0.9 \wedge 0.8, 0.3 \wedge 0.3, 0.3 \wedge 0) = 1$$

$$\text{pos}_{\sim}(P_4) = \bigvee (0.6 \wedge 0.6, 1 \wedge 0.9, 0.9 \wedge 0.7, 0.5 \wedge 1, \\ 0.7 \wedge 0.8, 0.5 \wedge 0.3, 0.8 \wedge 0) = 0.9$$

$$22.17 \quad \text{pos}_{\sim}(P_5) = \bigvee (0.2 \wedge 0.6, 0.1 \wedge 0.9, 1 \wedge 0.7, 0.9 \wedge 1, \\ 0.3 \wedge 0.8, 0 \wedge 0.3, 0.4 \wedge 0) = 0.9$$

$$\text{pos}_{\sim}(P_6) = \bigvee (0.8 \wedge 0.6, 0.8 \wedge 0.9, 1 \wedge 0.7, 1 \wedge 1, 0.1 \wedge 0.8, \\ 0.9 \wedge 0.3, 0.9 \wedge 0) = 1$$

$$\text{pos}_{\sim}(P_7) = \bigvee (0.5 \wedge 0.6, 0.6 \wedge 0.9, 0.2 \wedge 0.7, 0.1 \wedge 1, \\ 0.4 \wedge 0.8, 0.6 \wedge 0.3, 0.2 \wedge 0) = 0.6$$

$$\text{pos}_{\sim}(P_8) = \bigvee (0.1 \wedge 0.6, 0.8 \wedge 0.9, 0.4 \wedge 0.7, 0.2 \wedge 1, \\ 0.5 \wedge 0.8, 0.3 \wedge 0.3, 0.4 \wedge 0) = 0.8$$

Como puede observarse los resultados obtenidos son sensiblemente diferentes en estos dos últimos criterios como no podía ser de otra manera, dado que mientras la "distancia" proporciona la desviación media de las diferencias, la "posibilidad" pone el acento en lo que domina.

ESTIMACION DE LA POLIVALENCIA DEL PERSONAL

Otro de los aspectos interesantes a considerar en el ámbito de la selección de personal hace referencia a la polivalencia de éste para la realización de ciertas tareas específicas, de las que se dispone de un perfil profesional, cuyo referencial es:

$$22.18 \quad E = \{ A, B, C, D, E, F, G \}$$

Estos perfiles son:

$$22.19 \quad \tilde{T}_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline \tilde{T}_1 & 0.9 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 & 0.8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\tilde{T}_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{T}_2 & 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0.9 \\ \hline \end{array}$$

$$\tilde{T}_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{T}_3 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.3 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ \hline \end{array}$$

$$\tilde{T}_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{T}_4 & 0.8 & 1 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Si se consideran los 8 candidatos, cuya medida o valoración de sus cualidades viene dado por (22.9), se puede obtener la distancia de Hamming de cada persona a cada tarea, lo que proporciona la siguiente matriz:

22.20

	$\tilde{T}_1$	$\tilde{T}_2$	$\tilde{T}_3$	$\tilde{T}_4$
$\tilde{P}_1$	0.61	0.60	0.38	0.42
$\tilde{P}_2$	0.31	0.22	0.18	0.41
$\tilde{P}_3$	0.42	0.41	0.28	0.41
$\tilde{P}_4$	0.35	0.37	0.38	0.17
$\tilde{P}_5$	0.54	0.62	0.42	0.41
$\tilde{P}_6$	0.40	0.47	0.54	0.21
$\tilde{P}_7$	0.44	0.25	0.27	0.45
$\tilde{P}_8$	0.48	0.35	0.28	0.38

La afectación de candidatos a cada una de las tareas se realiza ordenando las distancias de menor a mayor eliminando a cada paso la columna (tarea) y fila (candidato) correspondiente una vez se ha encontrado la persona que más se acerca al perfil buscado. Así dado que $\delta(\underline{P}_4 \rightarrow \underline{T}_4) = 0.17$, se elige P_4 para ocupar el puesto T_4 y se elimina la fila $\underline{P}_4$ y la columna $\underline{T}_4$. Como $\delta(\underline{P}_2 \rightarrow \underline{T}_3) = 0.18$, se elige P_2 para T_3 y se elimina la fila $\underline{P}_2$ y la columna $\underline{T}_3$. Al ser $\delta(\underline{P}_7 \rightarrow \underline{T}_2) = 0.25$ se escogerá P_7 para el puesto de trabajo T_2 , eliminándose la fila $\underline{P}_7$ y la columna $\underline{T}_2$. Finalmente la tarea T_1 será ocupada por P_6 al ser $\delta(\underline{P}_6 \rightarrow \underline{T}_1) = 0.40$. Los demás candidatos serán rechazados. La matriz de afectación correspondiente será:

22.21

	$\underline{T}_1$	$\underline{T}_2$	$\underline{T}_3$	$\underline{T}_4$
$\underline{P}_1$				
$\underline{P}_2$			1	
$\underline{P}_3$				
$\underline{P}_4$				1
$\underline{P}_5$				
$\underline{P}_6$	1			
$\underline{P}_7$		1		
$\underline{P}_8$				

Este procedimiento de afectación es uno entre los muchos que existen, que aún sin un extraordinario rigor tiene la ventaja de su sencillez. En este sentido cabe destacar el llamado “método húngaro” conocido y utilizado desde hace más de 40 años en investigación operativa. La distancia total mínima obtenida a través de la afectación (22.21) da un total de $0.17 + 0.18 + 0.25 + 0.40 = 1.00$. El hecho de que se obtenga como resultado la unidad no tiene significación especial alguna, ya que normalmente la cifra obtenida resulta unas veces inferior y otras superior a uno.

Si se desea obtener el candidato más apto para todas las tareas (problema de la no especialización) bastará hallar la unión de todas las $\underline{T}_i$ de (22.19). Así se tendrá que:

$$22.22 \quad \tilde{T} = \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \cup \tilde{T}_3 \cup \tilde{T}_4 = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline & 0.9 & 1 & 1 & 0.6 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

y se calculan:

$$\delta(\tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{T}) = 0.52, \quad \delta(\tilde{P}_2 \rightarrow \tilde{T}) = 0.25, \quad \delta(\tilde{P}_3 \rightarrow \tilde{T}) = 0.42$$

$$\delta(\tilde{P}_4 \rightarrow \tilde{T}) = 0.21, \quad \delta(\tilde{P}_5 \rightarrow \tilde{T}) = 0.60, \quad \delta(\tilde{P}_6 \rightarrow \tilde{T}) = 0.25$$

$$\delta(\tilde{P}_7 \rightarrow \tilde{T}) = 0.55, \quad \delta(\tilde{P}_8 \rightarrow \tilde{T}) = 0.54$$

De donde se deduce que el candidato más adecuado para una actividad polivalente es $\tilde{P}_4$.

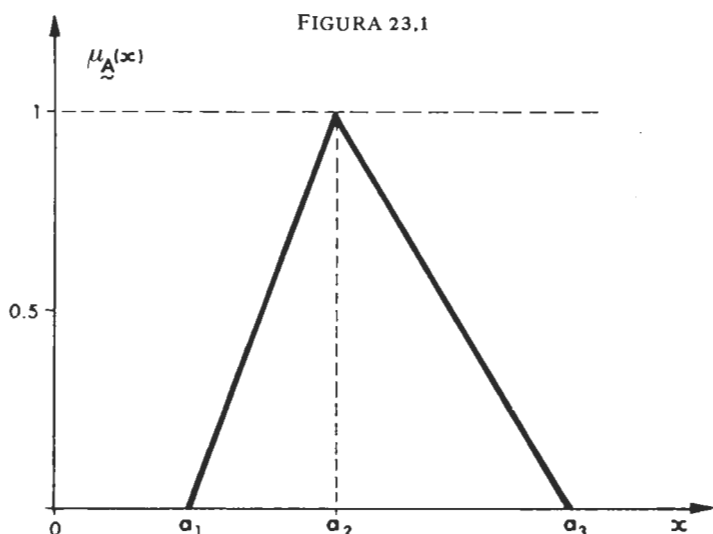
Sirvan estos ejemplos para ilustrar las muchas posibilidades que existen de utilizar la teoría de los subconjuntos borrosos en un campo tan importante de la vida de las empresas como es la gestión de personal.

Gestión de inversiones con números borrosos triangulares

TRATAMIENTO DEL PROBLEMA MEDIANTE PROGRAMACION DINAMICA

Para simplificar la exposición vamos a tratar primero un ejemplo numérico sencillo, para pasar luego a desarrollar los aspectos teóricos de este tema.

Supongamos que nos proponemos colocar una masa de 10.000.000 de unidades monetarias en cuatro sectores I, II, III, IV y que el beneficio por sector sea incierto y solamente conocido por un número borroso triangular (a_1, a_2, a_3) (figura 23.1).



Habida cuenta que será necesario realizar una selección entre los números borrosos triangulares (N.B.T.), se elegirá el siguiente criterio:

Dados:

$$23.1 \quad \underline{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$23.2 \quad \underline{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$23.3 \quad \left(\frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4} > \frac{b_1 + 2b_2 + b_3}{4} \right) \Rightarrow (\underline{A} \succ \underline{B})$$

Si I es una inversión y $\underline{A}$ el beneficio anual dado subjetivamente por uno o varios expertos, el beneficio de I será igual a:

$$23.4 \quad \underline{A} = \Phi(I) = (a_1(I), a_2(I), a_3(I))$$

A partir del criterio (23.3) se elegirá una afectación óptima de I . Vamos a establecer, ahora, un cierto número de hipótesis numéricas que constituirán los datos del problema que vamos a tratar mediante programación dinámica.

Se va a suponer que $I = 10.000.000$ sólo será susceptible de descomposición en 11 eslabones de 0 a 10^7 , que son 0, 10^6 , 2×10^6 , ..., 9×10^6 , 10^7 . El cuadro siguiente proporciona los correspondientes beneficios totales.

23.5

Inversiones en 10^6	Beneficio Sector I	Beneficio Sector II	Beneficio Sector III	Beneficio Sector IV
0	0	0	0	0
1	(.25, .28, .30)	(.20, .25, .26)	(.13, .15, .18)	(.18, .20, .24)
2	(.40, .45, .46)	(.33, .41, .43)	(.19, .25, .26)	(.25, .33, .38)
3	(.58, .65, .71)	(.48, .55, .60)	(.37, .40, .42)	(.37, .42, .48)
4	(.70, .78, .85)	(.62, .65, .67)	(.45, .50, .51)	(.40, .48, .52)
5	(.81, .90, 1.01)	(.68, .75, .77)	(.53, .62, .66)	(.51, .53, .54)

6	(.95, 1.02, 1.11)	(.70, .80, .90)	(.70, .73, .74)	(.55, .56, .57)
7	(1.04, 1.13, 1.16)	(.83, .85, .90)	(.76, .82, .83)	(.56, .58, .58)
8	(1.20, 1.23, 1.30)	(.85, .88, .90)	(.89, .90, .95)	(.59, .60, .60)
9	(1.31, 1.32, 1.42)	(.88, .90, .93)	(.95, .96, .1.02)	(.59, .60, .61)
10	(1.35, 1.38, 1.50)	(.90, .90, .94)	(.98, 1.00, 1.08)	(.59, .60, .64)

Estos N.B.T. sólo constituyen un ejemplo numérico para explicar este método y los N.B.T. realistas deberán ser calculados de manera efectiva por especialistas del análisis financiero.

Vamos a designar por:

$\underline{f}_1(x)$ la función beneficio correspondiente al sector I

$\underline{f}_2(x)$ " " " " II

$\underline{f}_3(x)$ " " " " III

$\underline{f}_4(x)$ " " " " IV

$\underline{F}_{1,2}(\ell)$ el beneficio óptimo cuando se invierten ℓ millones conjuntamente en I y II

$\underline{F}_{1,2,3}(\ell)$ " " " " I, II y III

$\underline{F}_{1,2,3,4}(\ell)$ " " " " I, II, III y IV

Así, para obtener $\underline{F}_{1,2}(2)$ es necesario calcular y comparar

$$\underline{f}_1(0, 0, 0) (+) \underline{f}_2(33, 41, 43) = (0, 0, 0) (+) (33, 41, 43) \\ \underline{0} \quad \quad \quad \underline{2} \quad \quad \quad = (33, 41, 43)$$

$$\underline{f}_1(25, 28, 30) (+) \underline{f}_2(20, 25, 26) = (25, 28, 30) \\ \underline{1} \quad \quad \quad \underline{1} \quad \quad \quad (+) (20, 25, 26) \\ = (45, 53, 56)$$

23.6

$$\underline{f}_1(40, 45, 46) (+) \underline{f}_2(0, 0, 0) = (40, 45, 46) (+) (0, 0, 0) \\ \underline{2} \quad \quad \quad \underline{0} \quad \quad \quad = (40, 45, 46)$$

De donde resulta que:

$$\frac{.33 + .82 + .43}{4} = .3950$$

$$23.7 \quad \frac{.45 + 1.06 + .56}{4} = .5175$$

$$\frac{.40 + .90 + .46}{4} = .4400$$

De esta manera, la colocación óptima para 2 millones es 1 millón en I y 1 millón en II con un beneficio total de (.45, .53, .56).

Si se analiza el cuadro (23.5), se observará que los beneficios no crecen en relación al importe de la inversión (10 millones no permiten obtener 10 veces lo que proporciona 1 millón). Recordemos una vez más, que los N.B.T. sólo tienen como objetivo la explicación del método. Posteriormente realizaremos ciertos comentarios al respecto.

Efectuando todos los cálculos, de la misma manera que en (23.6) y (23.7) se obtiene el cuadro (23.8) siguiente:

$$\tilde{F}_{1,2}(\ell) = \max_{x+y=\ell} (\tilde{f}_1(x) (+) \tilde{f}_2(y))$$

23.8

Inversión ℓ	$\tilde{f}_1(x)$	$\tilde{f}_2(x)$	$\tilde{F}_{1,2}(\ell)$	Política óptima con I y II
0	0	0	0	(0, 0)
1	(.25, .28, .30)	(.20, .25, .26)	(.25, .28, .30)	(1, 0)
2	(.40, .45, .46)	(.33, .41, .43)	(.45, .53, .56)	(1, 1)
3	(.58, .65, .71)	(.48, .55, .60)	(.60, .70, .72)	(2, 1)
4	(.70, .78, .85)	(.62, .65, .67)	(.78, .90, .97)	(3, 1)
5	(.81, .90, 1.01)	(.68, .75, .77)	(.91, 1.06, 1.14)	(3, 2)

6	(.95, 1.02, 1.11)	(.70, .80, .90)	(1.06, 1.20, 1.31)	(3, 3)
7	(1.04, 1.13, 1.16)	(.83, .85, .90)	(1.18, 1.33, 1.45)	(4, 3)
8	(1.20, 1.23, 1.30)	(.85, .88, .90)	(1.29, 1.45, 1.61)	(5, 3)
9	(1.31, 1.32, 1.42)	(.88, .90, .93)	(1.43, 1.57, 1.71)	(6, 3)
10	(1.35, 1.38, 1.50)	(.90, .90, .94)	(1.57, 1.67, 1.78)	(6, 4)

Continuemos calculando $\tilde{F}_{1,2,3}(\ell)$

$$23.9 \quad \tilde{F}_{1,2,3}(\ell) = \max_{x+y=\ell} (\tilde{F}_{1,2}(x) (+) \tilde{f}_3(y))$$

ℓ	$\tilde{F}_{1,2}(x)$	$\tilde{f}_3(x)$	$\tilde{F}_{1,2,3}(\ell)$	Política óptima con I, II y III
0	0	0	0	(0, 0, 0)
1	(.25, .28, .30)	(.13, .15, .18)	(.25, .28, .30)	(1, 0, 0)
2	(.45, .53, .56)	(.19, .25, .26)	(.45, .53, .56)	(1, 1, 0)
3	(.60, .70, .72)	(.37, .40, .42)	(.60, .70, .72)	(2, 1, 0)
4	(.78, .90, .97)	(.45, .50, .51)	(.78, .90, .97)	(3, 1, 0)
5	(.91, 1.06, 1.14)	(.53, .62, .66)	(.91, 1.06, 1.14)	(3, 2, 0)
6	(1.06, 1.20, 1.31)	(.70, .73, .74)	(1.04, 1.21, 1.32)	(3, 2, 1)
7	(1.18, 1.33, 1.45)	(.76, .82, .83)	(1.19, 1.35, 1.49)	(3, 3, 1)
8	(1.29, 1.45, 1.61)	(.89, .90, .95)	(1.31, 1.48, 1.63)	(4, 3, 1)
9	(1.43, 1.57, 1.71)	(.95, .96, 1.02)	(1.42, 1.60, 1.79)	(5, 3, 1)
10	(1.57, 1.67, 1.78)	(.98, 1.00, 1.08)	(1.56, 1.72, 1.89)	(6, 3, 1)

Para terminar calculemos $\tilde{F}_{1,2,3,4}(\ell)$

$$\tilde{F}_{1,2,3,4}(\ell) = \max_{x+y=\ell} (\tilde{F}_{1,2,3}(x) (+) \tilde{f}_4(y))$$

23.10

q	$\underline{F}_{1,2,3}(x)$	$\underline{f}_4(x)$	$F_{1,2,3,4}(q)$	Política óptima con I, II, III y IV
0	0	0	0	(0, 0, 0, 0)
1	(.25, .28, .30)	(.18, .20, .24)	(.25, .28, .30)	(1, 0, 0, 0)
2	(.45, .53, .56)	(.25, .33, .38)	(.45, .53, .56)	(1, 1, 0, 0)
3	(.60, .70, .72)	(.37, .42, .48)	(.63, .73, .80)	(1, 1, 0, 1)
4	(.78, .90, .97)	(.40, .48, .52)	(.78, .90, .97)	(3, 1, 0, 0)
5	(.91, 1.06, 1.14)	(.51, .53, .54)	(.96, 1.10, 1.21)	(3, 1, 0, 1)
6	(1.04, 1.21, 1.32)	(.55, .56, .57)	(1.09, 1.26, 1.38)	(3, 2, 0, 1)
7	(1.19, 1.35, 1.49)	(.56, .58, .58)	(1.22, 1.41, 1.56)	(3, 2, 1, 1)
8	(1.31, 1.48, 1.63)	(.59, .60, .60)	(1.37, 1.55, 1.73)	(3, 3, 1, 1)
9	(1.42, 1.60, 1.79)	(.59, .60, .61)	(1.49, 1.68, 1.87)	(4, 3, 1, 1)
10	(1.56, 1.72, 1.89)	(.59, .60, .64)	(1.60, 1.80, 2.03)	(5, 3, 1, 1)

Con lo que se puede observar que la colocación óptima de 10^7 unidades monetarias se realiza con la política siguiente:

	5.10 ⁶	unidades en el sector I, lo que permite obtener:
		(.81, .90, 1.01) .10 ⁶ U.M.
	3.10 ⁶	” II, lo que permite obtener:
		(.48, .55, .60) .10 ⁶ U.M.
23.11	1.10 ⁶	” III, lo que permite obtener:
		(.13, .15, .18) .10 ⁶ U.M.
	1.10 ⁶	” IV, lo que permite obtener:
		(.18, .20, .24) .10 ⁶ U.M.

El beneficio será:

$$23.12 \quad ((.81, .90, 1.01) (+) (.48, .55, .60) (+) (.13, .15, .18) (+) (.18, .20, .24))10^6 = (1.60, 1.80, 2.03) \cdot 10^6$$

LOS NUMEROS BORROSOS TRIANGULARES Y SUS REPRESENTACIONES

Si se escribe:

$$23.13 \quad \bar{a} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}$$

para representar (a_1, a_2, a_3) en la optimización, podría haberse realizado perfectamente esta optimización a partir de las $\bar{a}$ en lugar de hacerlo con los N.B.T. ya que las $\bar{a}$ han sido tomadas como criterio. Sin embargo, a lo largo del proceso utilizado, se puede observar cómo evolucionan los N.B.T. Es sobradamente conocido que:

$$\begin{aligned} 23.14 \quad (a_1 + a_2 + a_3) (+) (b_1, b_2, b_3) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &\Rightarrow \left(\frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4} (+) \frac{b_1 + 2b_2 + b_3}{4} \right) \\ &\Rightarrow (\bar{a} + \bar{b}) \end{aligned}$$

Las $\bar{a}$ se suman en paralelo con los N.B.T. correspondientes. También se puede escribir:

$$\begin{aligned} 23.15 \quad k(a_1, a_2, a_3) &= (ka_1, ka_2, ka_3) \quad , \quad k \geq 0 \\ &\Rightarrow k \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4} = \frac{ka_1 + 2ka_2 + ka_3}{4} \\ &\Rightarrow k \bar{a} \end{aligned}$$

Los N.B.T. constituyen vectores lineales para la adición.

Se puede afirmar también que los N.B.T. forman un monoide para la adición (asociativos y neutro $(0, 0, 0)$). En el problema elemental que acabamos de tratar es incluso conmutativo, ya el orden no interviene: se

podría optimizar por ejemplo II y III, luego II, III, y I y finalmente II, III, I y IV.

Es sabido que la programación dinámica no puede aplicarse más que en el supuesto de monoides monótonos no decrecientes (búsqueda del máximo) o de monoides no crecientes (búsqueda del mínimo). Es conveniente también que el criterio de optimización se base en una relación de orden total; es precisamente lo que se ha hecho al sustituir los N.B.T. (orden parcial) por sus representaciones $\overline{a}$ (orden total). Si se satisfacen estas condiciones, es posible utilizar la programación dinámica bajo todas sus formas con los N.B.T. o de manera más general con los números borrosos.

Se observa que para realizar el tratamiento de la incertidumbre contenida en las (a_1, a_2, a_3) , se trata la certeza con las $\overline{a}$. Esto se asemeja a la manera de operar con la programación dinámica en los procesos estocásticos en donde la optimización se realiza sobre la esperanza matemática que es un número cierto que representa un número aleatorio. Los números aleatorios forman un orden parcial y sus representaciones, las esperanzas matemáticas correspondientes, forman un orden total.

Evidentemente se pueden utilizar criterios distintos del (23.3), por ejemplo utilizar el máximo (respectivamente el mínimo) de los números borrosos pero los cálculos son mucho más complicados (los N.B.T. pierden sus formas triangulares) y resulta necesario operar nivel por nivel. Si es necesario, se hace así. Los resultados no difieren demasiado, en los supuestos prácticos, de los que se obtienen con el método simple que acabamos de utilizar.

En relación con los N.B.T. y sus representaciones $\overline{a}$ es conveniente hacer una observación ilustrada mediante la figura (23.2).

Los dos N.B.T.:

$$\begin{array}{l} 23.16 \\ 23.17 \end{array} \quad (9, 12, 14) \quad \text{y} \quad (6, 12, 17)$$

tienen la misma representación

$$23.18 \quad \overline{a} = \frac{9 + 24 + 14}{4} = 11.75 ; \quad \overline{a} = \frac{6 + 24 + 17}{4} = 11.75$$

Surge claramente que la representación $\overline{a}$ no tiene en cuenta el riesgo. Sin embargo una elección en el ámbito financiero tiene en el riesgo un parámetro que conviene considerar en la optimización. Es por ello que

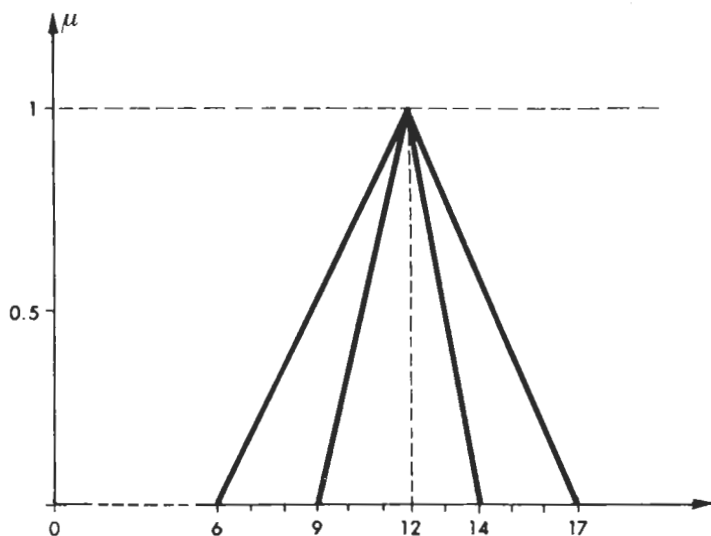


FIGURA 23.2

vamos a abandonar el criterio $\bar{a}$ en el supuesto de colocaciones con y/o sin riesgos y utilizar los operadores ($\wedge$) (minimización) y ($\vee$) (maximización). Vamos a perder las facilidades de cálculo de los N.B.T. y operaremos nivel por nivel con $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ como niveles de presunción.

UTILIZACION DE LOS OPERADORES DE MAXIMIZACION Y MINIMIZACION

Si $\underline{A}$ es un N.B.T.

$$23.19 \quad \underline{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

su función de pertenencia viene dada por:

23.20 $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A}}(x) &= 0 & , \quad x \leq a_1 \\ &= \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ &= \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & , \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ &= 0 & , \quad x \geq a_3\end{aligned}$$

o incluso por los α -cortes:

23.21 $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha]$$

Utilizando el operador $(\vee)$ (respectivamente $(\wedge)$) y la programación dinámica no se realizará una optimización en el sentido estricto de la palabra ya que, en casi todos los casos, el óptimo obtenido no proporcionará la política óptima; lo que vamos a poner de manifiesto a través de un ejemplo con intervalos de confianza.

Supongamos que:

23.22 El beneficio de la inversión I es: $[15, 18]$

23.23 El beneficio de la inversión II es: $[12, 20]$

23.24 $[15, 18] (\vee) [12, 20] = [15, 20]$

La elección no puede recaer ni en I ni en II.

Lo mismo sucederá, nivel por nivel, con los N.B.T. y de manera más general con los números borrosos. La programación dinámica se aplicará teóricamente sin que pueda especificarse al final del proceso la elección óptima.

Vamos a proponer un método mixto.

1) Se calcula la optimización a partir de las $\bar{a}$ como se ha indicado en (23.3) y (23.13).

2) Se calcula el verdadero óptimo con el operador ($\vee$) en los intervalos de confianza de nivel 0 es decir $[a_1, a_2]$.

3) Se comparan los resultados obtenidos en 1) y en 2) y se aceptan los resultados de 1) si los extremos obtenidos en 2) no se hallan demasiado alejados de los que se han obtenido en 1).

Volvamos a considerar el cuadro (23.5) tomando solamente los extremos.

$$\varphi_{1,2}(\ell) = \left(\bigvee_{x+y=\ell} \right) (f_1(x) (+) f_2(y))$$

23.25

ℓ	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi_{1,2}(\ell)$
0	0	0	0
1	[.25, .30]	[.20, .26]	[.25, .30]
2	[.40, .46]	[.33, .43]	[.45, .56]
3	[.58, .71]	[.48, .60]	[.60, .73]
4	[.70, .85]	[.62, .67]	[.78, .97]
5	[.81, 1.01]	[.68, .77]	[.91, 1.14]
6	[.95, 1.11]	[.70, .90]	[1.06, 1.31]
7	[1.04, 1.16]	[.83, .90]	[1.20, 1.45]
8	[1.20, 1.30]	[.85, .90]	[1.32, 1.61]
9	[1.31, 1.42]	[.88, .93]	[1.43, 1.71]
10	[1.35, 1.50]	[.90, .94]	[1.57, 1.78]

Continuemos para $\varphi_{1,2,3}(\ell)$:

$$\varphi_{1,2,3}(\ell) = \left(\bigvee_{x+y=\ell} \right) (\varphi_{1,2}(x) (+) f_3(y))$$

23.26

ℓ	$\varphi_{1,2}(x)$	$f_3(x)$	$\varphi_{1,2,3}(\ell)$
0	0	0	0
1	[.25, .30]	[.13, .18]	[.25, .30]
2	[.45, .56]	[.19, .26]	[.45, .56]
3	[.60, .73]	[.37, .42]	[.60, .74]
4	[.78, .97]	[.45, .51]	[.78, .97]
5	[.91, 1.14]	[.53, .66]	[.91, 1.14]
6	[1.06, 1.31]	[.70, .74]	[1.06, 1.32]
7	[1.20, 1.45]	[.76, .83]	[1.20, 1.49]
8	[1.32, 1.61]	[.89, .95]	[1.33, 1.63]
9	[1.43, 1.71]	[.95, 1.02]	[1.45, 1.79]
10	[1.57, 1.78]	[.98, 1.08]	[1.57, 1.89]

y finalmente para $\varphi_{1,2,3,4}(\ell)$:

$$\varphi_{1,2,3,4}(\ell) = \left(\bigvee_{x+y=\ell} \right) (\varphi_{1,2,3}(x) (+) f_4(y))$$

23.27

ℓ	$\varphi_{1,2,3}(x)$	$f_4(x)$	$\varphi_{1,2,3,4}(\ell)$
0	0	0	0
1	[.25, .30]	[.18, .24]	[.25, .30]
2	[.45, .56]	[.25, .38]	[.45, .56]
3	[.60, .74]	[.37, .48]	[.63, .80]
4	[.78, .97]	[.40, .52]	[.78, .98]

5	[.91, 1.14]	[.51, .54]	[.96, 1.21]
6	[1.06, 1.32]	[.55, .57]	[1.09, 1.38]
7	[1.20, 1.49]	[.56, .58]	[1.24, 1.56]
8	[1.33, 1.63]	[.59, .60]	[1.38, 1.73]
9	[1.45, 1.79]	[.59, .61]	[1.51, 1.87]
10	[1.57, 1.89]	[.59, .64]	[1.63, 2.03]

Al comparar (23.8) y (23.25), (23.9) y (23.26), (23.10) y (23.27) se observa que la diferencia en los resultados es muy pequeña y que, por lo tanto, pueden aceptarse los cuadros (23.8), (23.9) y (23.10) obtenidos con el criterio $\bar{A}$ en lugar de (V).

Evidentemente, los N.B.T. obtenidos con $\bar{A}$ sólo son números borrosos aproximados, en particular para los niveles entre 0 y 1.

Para mejorar la precisión, se podría descomponer para el cálculo 10^7 en 101 posiciones en lugar de 11. Pero dada la imprecisión relativa a las estimaciones de los expertos los resultados del cuadro (23.10) pueden ser aceptados.

Hay que señalar que el procedimiento proporciona los resultados correspondientes a toda inversión parcial, entre $\ell = 0$ y $\ell = 10^7$ unidades monetarias.

El método utilizado puede extenderse al supuesto en que las inversiones son función del tiempo y que se tiene en cuenta el proceso de actualización. En este caso los datos son más complicados, por lo que resulta necesaria la utilización del ordenador. Ahora bien la programación dinámica es muy bien aceptada por los medios de tratamiento de la información. El supuesto de N.B.T. aumenta muy poco el volumen de cálculos por parte del ordenador.

Finalmente se puede añadir que también es posible realizar una extensión de este esquema con la utilización de datos híbridos.

Curvas de supervivencia borrosas

INTRODUCCION DE LA BORROSIDAD EN LAS CURVAS DE SUPERVIVENCIA

En el ámbito de la renovación de equipos adquiere especial importancia la estimación de la vida útil de un objeto de la inversión. De ahí el interés que adquieren las curvas de supervivencia.

Consideremos dos curvas de supervivencia relativas a un mismo equipo $v_*(t)$ y $v^*(t)$, tales que:

$$24.1 \quad \forall t \in R^+ : v^*(t) \geq v_*(t)$$

Supongamos que el (o los) expertos ha proporcionado estas dos curvas de manera subjetiva, la una $v_*(t)$, como curva baja y la otra, $v^*(t)$, como curva alta.

Se designará por:

$$24.2 \quad V(t) = [v_*(t), v^*(t)]$$

el intervalo de confianza formado por v_* y v^* para un valor de t dado (figura 24.1).

Si ahora se considera que $V(t)$ es un número borroso que lo escribiremos $\underline{V}(t)$, con una función de pertenencia:

$$24.3 \quad \mu_{\underline{V}(t)}(v) \in [0, 1]$$

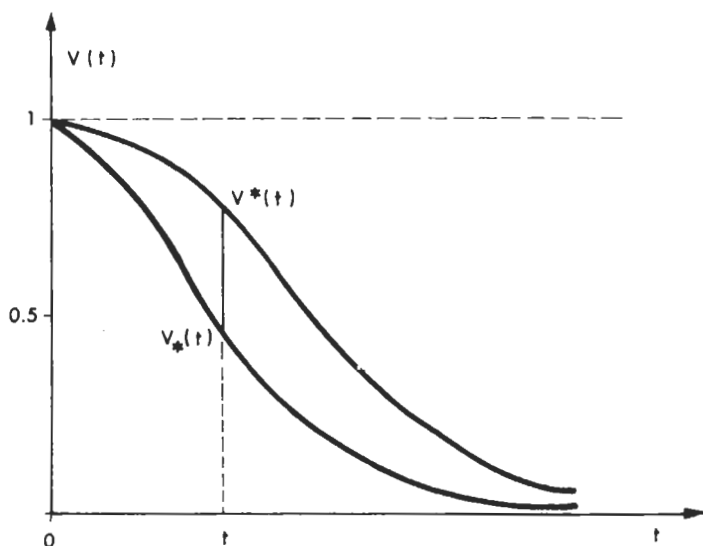


FIGURA 24.1

y si $\mu_{\underline{V}(t)}(v)$ es conocida para todos los valores de t , se dirá que $\underline{V}(t)$ es una “curva de supervivencia borrosa”. Vamos a suponer, además, que:

24.4 1) $\mu_{\underline{V}(t)}(v)$ es siempre unimodal

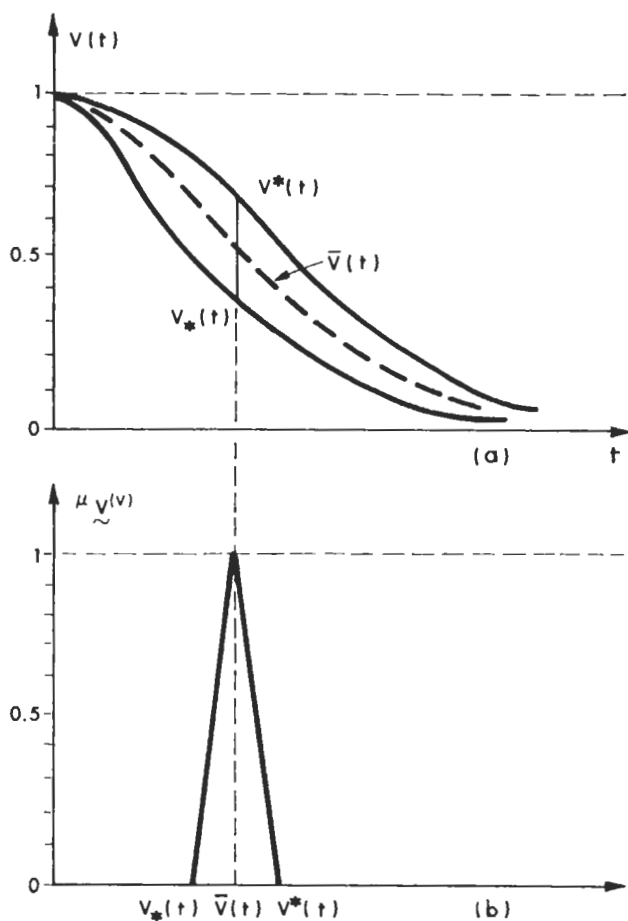
24.5 2) la moda de $\underline{V}(t)$ es: $\forall t \in \mathbb{R} : \bar{v}(t) = \frac{1}{2} (v_*(t) + v^*(t))$

Vamos a poner de manifiesto el interés que tiene este concepto para el estudio de la fiabilidad de los sistemas cuando las curvas de supervivencia son inciertas pero que se acepta una hipótesis baja y una hipótesis alta así como un nivel de presunción, a partir del cual se puede definir $\underline{V}(t)$.

En la figura 24.2 se han representado $v_*(t)$ y $v^*(t)$ así como la curva media $\bar{v}(t)$ que proporciona también la moda (figura 24.2a). La figura 24.2b representa un N.B.T., que constituye la función de pertenencia de $\underline{V}(t)$. Es sobradamente conocido que la propiedad de los N.B.T. no se

conserva para las operaciones $(.)$ y $(\hat{+})$ pero, por contra se conserva la moda así como los valores bajos y altos. Deberán tenerse en cuenta estos aspectos en la aplicación de funciones de supervivencia borrosas a los sistemas.

FIGURA 24,2



Antes de avanzar más en este esquema, veamos dos ejemplos sencillos.

Supongamos que:

$$\begin{aligned}
 24.6 \quad & v_*(t) = e^{-\lambda_1 t} \quad , \quad v^*(t) = e^{-\lambda_2 t} \\
 24.7 \quad & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad \lambda_1 \geq \lambda_2
 \end{aligned}$$

de donde se tiene:

$$24.8 \quad \bar{v}(t) = \frac{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}}{2}$$

Si, para toda $t \in \mathbb{R}^+$, establecemos para $\underline{v}(t)$ la función de pertenencia indicada en la figura 24.2b, se deduce:

$$\begin{aligned}
 24.9 \quad \mu_{\underline{v}(t)}(v) &= 0 & v(t) &\leq v_*(t) \\
 &= \frac{v(t) - v_*(t)}{\bar{v}(t) - v_*(t)} & v_*(t) &\leq v(t) \leq \bar{v}(t) \\
 &= \frac{v^*(t) - v(t)}{v^*(t) - \bar{v}(t)} & \bar{v}(t) &\leq v(t) \leq v^*(t) \\
 &= 0 & v(t) &\geq v^*(t)
 \end{aligned}$$

También se puede escribir, para todo α -corte:

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$24.10 \quad V_\alpha(t) = [v_*(t) + (\bar{v}(t) - v_*(t))\alpha, v^*(t) - (v^*(t) - \bar{v}(t))\alpha]$$

Para las funciones (24.6), (24.7) y (24.8), las fórmulas (24.9) y (24.10) se convierten en:

$$\begin{aligned}
 24.11 \quad \mu_{\underline{v}(t)}(v) &= 0 \quad , \quad v(t) \leq e^{-\lambda_1 t} \\
 &= 2 \frac{v(t) - e^{-\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}} \quad , \quad e^{-\lambda_1 t} \leq v(t) \leq \frac{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}}{2}
 \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{e^{-\lambda_2 t} - v(t)}{e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}}, \quad \frac{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}}{2} \leq v(t) \leq e^{-\lambda_2 t}$$

$$= 0, \quad v(t) \geq e^{-\lambda_2 t}$$

$$24.12 \quad V_\alpha(t) = \left[e^{-\lambda_1 t} + (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \frac{\alpha}{2}, \quad e^{-\lambda_2 t} - (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \frac{\alpha}{2} \right]$$

Para las fórmulas generales (24.9) y (24.10) es interesante calcular la desviación existente para (24.10) entre el extremo inferior y el extremo superior, teniendo en cuenta que para un valor de α dado y para toda t , el extremo inferior y el superior decrecen ambos monótonamente cuando t aumenta.

Calculemos la separación en el intervalo de confianza (24.10).

$$24.13 \quad \delta(t) = v^*(t) - (v^*(t) - \bar{v}(t))\alpha - (v_*(t) + (\bar{v}(t) - v_*(t))\alpha)$$

$$= (1 - \alpha)(v^*(t) - v_*(t))$$

Demostraremos que en el supuesto de las funciones exponenciales (24.6) y (24.7) la separación $\delta(t)$ pasa por un máximo.

$$24.14 \quad \delta(t) = (1 - \alpha)(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$$

$$24.15 \quad \delta'(t) = (1 - \alpha)(-\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t})$$

Esta derivada se anula para:

$$24.16 \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_2 t}}, \quad \alpha < 1$$

es decir:

$$24.17 \quad t_0 = - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Si se sustituye este valor de t en (24.6) y (24.7) se tiene:

$$\begin{aligned}
 &24.18 \\
 &24.19 \quad v_*(t_0) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad v^*(t_0) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}
 \end{aligned}$$

Vamos a asignar valores numéricos:

$$\begin{aligned}
 &24.20 \\
 &24.21 \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &24.22 \quad t_0 = - \frac{1}{1/2 - 1/3} \ln \frac{1/3}{1/2} \\
 &\quad = -6 \ln \frac{2}{3} = 2.43279
 \end{aligned}$$

$$24.23 \quad v_*(t_0) = \left(\frac{1/3}{1/2} \right)^{\frac{1/2}{1/2 - 1/3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = 0.29629$$

$$24.24 \quad v^*(t_0) = \left(\frac{1/3}{1/2} \right)^{\frac{1/3}{1/2 - 1/3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = 0.4444$$

Veamos otro tipo de funciones $v(t)$, la función en forma de campana.

$$\begin{aligned}
 &24.25 \\
 &24.26 \quad v_*(t) = e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}}, \quad v^*(t) = e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_0^+, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2$$

Estas funciones satisfacen las condiciones (24.1) y (24.4). Se aplicará la fórmula (24.9).

$$24.27 \quad \mu_{\underline{v}(t)}(v) = 0, \quad v(t) \leq e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{v(t) - e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}}}{e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}}}, \quad e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} \leq v(t) \leq \frac{e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} + e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}}}{2} \\
&= 2 \frac{e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - v(t)}{e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}}}, \quad \frac{e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} + e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}}}{2} \leq v(t) \leq e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} \\
&= 0, \quad v(t) \geq e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}}
\end{aligned}$$

o también para los α -cortes

$$\begin{aligned}
24.28 \quad V_\alpha(t) &= \left[e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} + \left(e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} \right) \frac{\alpha}{2} \right. \\
&\quad \left. e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - \left(e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} \right) \frac{\alpha}{2} \right]
\end{aligned}$$

La separación de $V_\alpha(t)$ es:

$$24.29 \quad \delta(t) = (1 - \alpha) \left(e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} - e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} \right)$$

$$24.30 \quad \delta'(t) = (1 - \alpha) \left(-\lambda_2 t e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}} + \lambda_1 t e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}} \right)$$

Esta derivada se anula para:

$$24.31 \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{e^{\frac{-\lambda_1 t^2}{2}}}{e^{\frac{-\lambda_2 t^2}{2}}}$$

es decir:

$$24.32 \quad t_0 = \sqrt{\frac{-2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Si se sustituye este valor en (24.25) y (24.26) se tiene:

$$24.33 \quad v_*(t_0) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad v^*(t) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}$$

Se vuelve a encontrar el mismo resultado que en el caso exponencial pero las λ no tienen la misma significación y la fecha t_0 es diferente.

LA BORROSIDAD A TRAVES DE LA FUNCION INVERSA

Veamos ahora otra manera de convertir en borrosas las funciones de supervivencia.

A partir de $v_*(t)$ se considerará la función $t_*(v)$ y de la misma manera a partir de $v^*(t)$ la función $t^*(v)$, en donde v representa la probabilidad acumulada de supervivencia, $t_*(v)$ será la función inversa baja y $t^*(v)$ la función alta.

Resulta, en relación a la figura 24.3 con el mismo tipo de N.B.T. simétrico:

$$24.35 \quad \begin{aligned} \mu_{\tilde{T}(v)}(t) &= 0 & t(v) &\leq t_*(v) \\ &= \frac{t(v) - t_*(v)}{\bar{t}(v) - t_*(v)}, & t_*(v) &\leq t(v) \leq \frac{t_*(v) + t^*(v)}{2} \\ &= \frac{t^*(v) - t(v)}{t^*(v) - \bar{t}(v)}, & \frac{t_*(v) + t^*(v)}{2} &\leq t(v) \leq t^*(v) \\ &= 0 & t(v) &\geq t^*(v) \end{aligned}$$

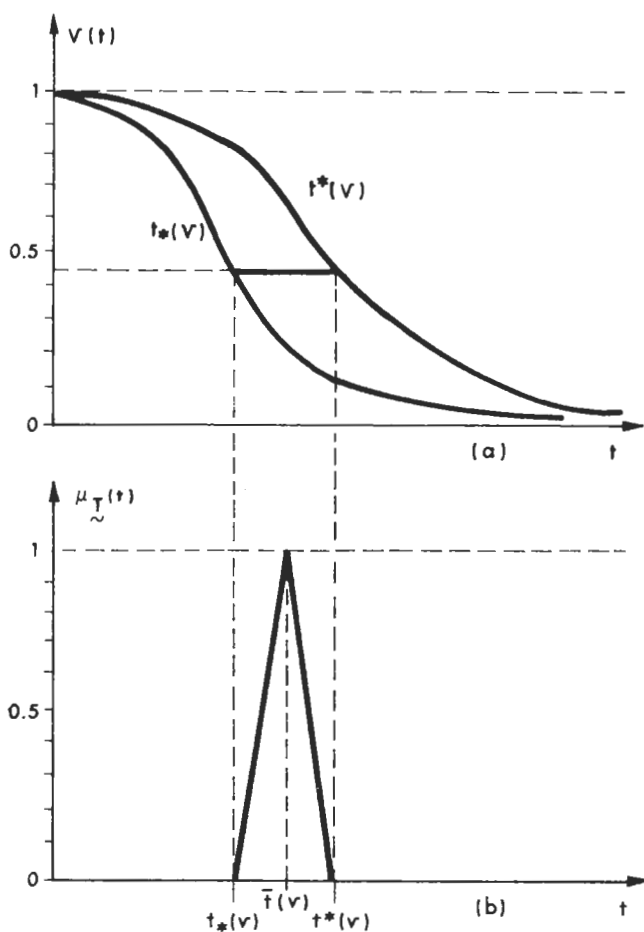


FIGURA 24.3

De la misma manera, para todo α -corte:

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$24.36 \quad T_{\alpha}(v) = [t_{*}(v) + (\bar{t}(v) - t_{*}(v))\alpha, t^{*}(v) - (t^{*}(v) - \bar{t}(v))\alpha]$$

Volvamos a tomar como ejemplo las curvas de supervivencia (24.6) y (24.7). Para las funciones inversas serán:

$$\begin{array}{l} 24.37 \\ 24.38 \end{array} \quad t_*(v) = -\frac{1}{\lambda_1} \ln v, \quad t^*(v) = -\frac{1}{\lambda_2} \ln v$$

La fórmula (24.35) se convierte en:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{T}(v)}(t) &= 0, \quad t(v) \leq -\frac{1}{\lambda_1} \ln v \\ &= 2 \frac{t(v) + \frac{1}{\lambda_1} \ln v}{-\frac{1}{\lambda_2} \ln v + \frac{1}{\lambda_1} \ln v}, \quad -\frac{1}{\lambda_1} \ln v \leq t(v) \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln v + \frac{1}{\lambda_2} \ln v \right) \end{aligned}$$

24.39

$$\begin{aligned} &= 2 \frac{-\frac{1}{\lambda_2} \ln v - t(v)}{-\frac{1}{\lambda_2} \ln v + \frac{1}{\lambda_1} \ln v}, \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln v + \frac{1}{\lambda_2} \ln v \right) \leq t(v) \leq -\frac{1}{\lambda_2} \ln v \\ &= 0 \quad t(v) \geq -\frac{1}{\lambda_2} \ln v \end{aligned}$$

O también con α :

$$\begin{aligned} 24.40 \quad T_\alpha(v) &= \left[-\frac{1}{\lambda_1} \ln v + \left(-\frac{1}{\lambda_2} \ln v + \frac{1}{\lambda_1} \ln v \right) \frac{\alpha}{2}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{\lambda_2} \ln v - \left(-\frac{1}{\lambda_2} \ln v + \frac{1}{\lambda_1} \ln v \right) \frac{\alpha}{2} \right] \end{aligned}$$

Se calcula la separación existente en (24.40) y que resulta:

$$24.41 \quad \delta(v) = \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (1 - \alpha) \ln v$$

Para todo valor de α , $\delta(v)$ aumenta monótonamente para tender hacia ∞ cuando $v \rightarrow 0$. De esta manera, el número borroso $\tilde{T}(v)$ se va a ensanchar cada vez más. Su anchura es nula para $v = 1$ y resulta infinita cuando $v \rightarrow 0$, lo que concuerda con la naturaleza de las funciones $v(t) = e^{-\lambda t}$.

Veamos un ejemplo numérico volviendo a tomar (24.20) y (24.21)

$$24.42$$

$$24.43 \quad t_*(v) = -2 \ln v, \quad t^*(v) = -3 \ln v$$

$$24.44 \quad T_\alpha(v) = \left[-2 \ln v + (-3 \ln v + 2 \ln v) \frac{\alpha}{2}, \right.$$

$$\left. -3 \ln v - (-3 \ln v + 2 \ln v) \frac{\alpha}{2} \right]$$

con

$$24.45 \quad \delta(v) = (1 - \alpha) \ln v$$

Veamos ahora el caso muy general, aunque quizá demasiado teórico, en el que todas las curvas de supervivencia borrosas tienen funciones de pertenencia que son las de números borrosos cualesquiera.

Supongamos que al nivel α se tiene:

$$24.46 \quad V_\alpha(t) = [v_*(\alpha, t), v^*(\alpha, t)]$$

Por hipótesis, se debe tener, para todo valor de α :

$$(t_2 > t_1) \Rightarrow$$

$$24.47 \quad [v_*(\alpha, t_2) \leq v_*(\alpha, t_1)]$$

$$y \quad v^*(\alpha, t_2) \leq v^*(\alpha, t_1)]$$

dado que toda función $v(t)$ debe ser monótona decreciente.

Finalmente por la propiedad de los α -cortes debe tenerse para todo valor de t :

$$24.48 \quad (\alpha_2 > \alpha_1) \Rightarrow$$

$$([v_*(\alpha_1, t), v^*(\alpha_1, t)] \supset [v_*(\alpha_2, t), v^*(\alpha_2, t)])$$

Las propiedades (24.1), (24.47) y (24.48) permiten utilizar toda la teoría de las redes de fiabilidad para las curvas de supervivencia borrosas. Vamos a recordar de una manera esquemática la teoría de las redes de fiabilidad (1).

ASPECTOS LOGICOS DE LA APARICION DE AVERIAS

Antes de exponer cómo se determina la ley de supervivencia de un equipo complejo que comprende diversos componentes, vamos a estudiar los aspectos lógicos de las apariciones de averías.

Sea e un equipo. Si e funciona, diremos que la variable x ligada a e es igual a 1, es decir $x = 1$; por el contrario, si e no funciona, diremos que $x = 0$. Así, la variable de estado es binaria, y no toma otros valores que 0 o bien 1 y se excluye, en las presentes hipótesis establecidas, cualquier otro valor (se puede tomar también 0 en lugar del 1 y recíprocamente, pero hemos elegido la correspondencia más utilizada).

Supongamos ahora que un equipo e se halla formado por 2 componentes e_1 y e_2 . Si e_1 funciona $x_1 = 1$, si e_1 no funciona $x_1 = 0$, y lo mismo para e_2 con x_2 . Supongamos que e funciona con la condición y sólo con esa condición de que e_1 y e_2 funcionen. Se escribirá:

$$\begin{aligned} 24.49 \quad \varphi(x_1, x_2) &= 1 && \text{si: } x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \\ &= 0 && \text{si: } x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \\ &= 0 && \text{si: } x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \\ &= 0 && \text{si: } x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

Para obtener este resultado con variables binarias, basta con escribir:

(1) Para los aspectos teóricos véase: KAUFMANN, A.: "La Confiante Technique", Théorie mathématique de la fiabilité, Ed. Dunod, París, 1969.

$$24.50 \quad \varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

La función φ se denomina "función lógica de estructura" o "función de estructura", y expresa cómo funciona o no funciona el sistema cuando se consideran los estados de todos sus componentes.

Veamos otro caso. Supongamos que el equipo e tiene dos componentes e_1 y e_2 y posee tales características que e funciona con la condición de que e_1 y/o e_2 funcionen. Esto puede enunciarse también: para que e no funcione es necesario que e_1 no funcione y que e_2 tampoco funcione. La función de estructura es entonces tal como:

$$\begin{aligned}
 24.51 \quad \varphi(x_1, x_2) &= 1 && \text{si: } x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \\
 &= 1 && \text{si: } x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \\
 &= 1 && \text{si: } x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \\
 &= 0 && \text{si: } x_1 = 0, \quad x_2 = 0
 \end{aligned}$$

Para obtener este resultado basta con utilizar el operador $\hat{+}$, y así se tendrá:

$$\begin{aligned}
 24.52 \quad \varphi(x_1, x_2) &= x_1 \hat{+} x_2 \\
 &= x_1 + x_2 - x_1 x_2 \\
 &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)
 \end{aligned}$$

Desde un punto de vista más general, consideremos un equipo e que comprende n componentes $e_1, e_2, \dots, e_n$. Llamaremos "función de estructura" de este equipo e a una función $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que sólo puede tomar los valores 0 o bien 1 cuando las variables de estado $x_1, x_2, \dots, x_n$ toman, todas ellas, como valores posibles 0 o bien 1.

Esta función de estructura describe pues los dos estados de e a partir de los estados de e_1 , de $e_2, \dots$, y de e_n . Así:

$$24.53 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

es una función de estructura. En efecto:

24.54

x_1	x_2	x_3	$\varphi(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Veamos otro ejemplo que no proporciona una función de estructura:

$$24.55 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 - x_1 x_2 x_3$$

24.56

x_1	x_2	x_3	$\varphi(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	1
1	1	1	1

Entre las funciones de estructura, sólo presentan interés las funciones de estructura denominadas "monótonas" ya que son las únicas que pueden representar la lógica de las averías de un equipo que comprende varios componentes: La lógica que utiliza los operadores $\cdot$ y $\hat{+}$.

Sea φ una función de estructura; si para todo vector $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ que domina a un vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se tiene:

$$24.57 \quad \varphi(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \geq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y entonces φ es monótona.

Así, se verifica fácilmente que (24.53) es monótona, mientras que:

$$24.58 \quad \varphi(x_1, x_2) = 1 - x_1 \cdot x_2$$

aunque sea una función de estructura, no es monótona. Por ejemplo:

$$24.59 \quad \varphi(1,1) \leq \varphi(0,0)$$

Veamos ahora el concepto de red de fiabilidad asociado al de función de estructura monótona.

Consideramos un dipolo eléctrico entre cuyos extremos se hace pasar una corriente (figura 24.4).

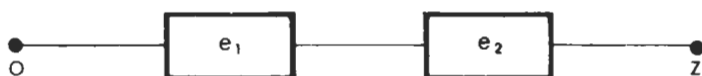


FIGURA 24.4

Supongamos que la avería de un componente e_i , $i = 1, 2$ es suficiente para interrumpir la corriente. En este caso la función de estructura sería:

$$24.60 \quad \varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Supongamos, por el contrario, que sea necesaria la avería de los dos componentes para impedir el paso de la corriente; se tendría entonces un dipolo como el de la figura 24.5.

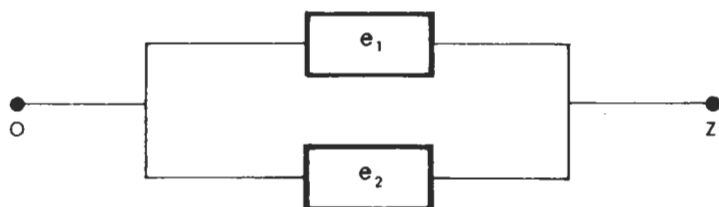


FIGURA 24.5

y la función de estructura sería:

$$24.61 \quad \varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

Supongamos ahora que, como consecuencia de la naturaleza del equipo, es necesario imponer las condiciones siguientes, para tres componentes e_1, e_2 y e_3 :

$$24.62 \quad (x_1 = 0 \text{ y } x_3 = 0) \Rightarrow (\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0)$$

$$24.63 \quad (x_2 = 0 \text{ y } x_3 = 0) \Rightarrow (\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0)$$

Se puede verificar que la siguiente función de estructura monótona satisface estas condiciones:

$$24.64 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_3)$$

y también el dipolo de la figura 24.6

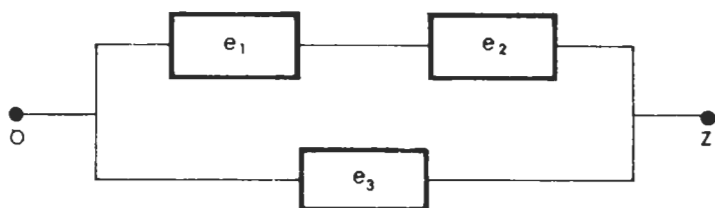


FIGURA 24.6

Se denomina “red de fiabilidad” a una representación, a través de un dipolo con entrada O y salida Z, de las condiciones lógicas de funcionamiento o de no funcionamiento.

Examinemos ahora dos conceptos importantes ligados a la noción de estructura monótona: camino y corte.

Sea $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ el conjunto de componentes de un equipo. Sea un subconjunto de estos componentes $E' = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\}$.

Si $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_r} = 1$ es una condición suficiente para que el equipo funcione, se dice que E' es un “camino” de $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ asociado a E .

$$24.65 \quad (x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_r} = 1 \text{ y } \varphi = 1)$$

$$\Rightarrow (\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\} \text{ es un camino})$$

Por otra parte, si $x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_s} = 0$ es una condición suficiente para que el equipo no funcione, se dice que $E'' = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_s}\}$ es un "corte" de $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$24.66 \quad (x_{j_1} = x_{j_2} = x_{j_s} = 0 \text{ y } \varphi = 0)$$

$$\Rightarrow (\{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_s}\} \text{ es un corte})$$

Se definen ahora dos conceptos fundamentales. Se llama "camino mínimo" de φ un camino en el que ningún subconjunto de componentes puede formar un camino excepto el que ha sido considerado. Se llama "corte mínimo" de φ un corte en el que ningún subconjunto de componentes puede formar un corte exceptuando el que ha sido considerado.

Veamos un ejemplo.

$$24.67 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_4)$$

entonces:

$$24.68 \quad \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{es un camino ya que } \varphi(1, 1, 1, x_4) = 1 \text{ sea cual fuere } x_4, \text{ pero este camino no es mínimo.}$$

$$24.69 \quad \{e_1, e_3\} \quad \text{es un camino dado que } \varphi(1, x_2, 1, x_4) = 1 \text{ sean cuales sean } x_2 \text{ y } x_4. \text{ Y este camino es mínimo ya que } e_1 \text{ no es un camino y } e_3 \text{ tampoco.}$$

$$24.70 \quad \{e_1, e_3, e_4\} \quad \text{es un corte, pues } \varphi(0, x_2, 0, 0) = 0 \text{ sea cual fuere } x_2, \text{ sin embargo no es un corte mínimo.}$$

$$24.71 \quad \{e_1, e_4\} \quad \text{es un corte ya que } \varphi(0, x_2, x_3, 0) = 0 \text{ sean cuales sean } x_2 \text{ y } x_3 \text{ y este corte es mínimo habida cuenta de que ni } e_1 \text{ ni } e_4 \text{ son cortes.}$$

Se enuncia la propiedad fundamental siguiente:

A toda red de fiabilidad corresponde una y sólo una función de estructura monótona y recíprocamente.

Se observará que la red de fiabilidad puede representarse de distintas

maneras equivalentes y sucede lo mismo para la función de estructura monótona. En todo caso, evidentemente, el cuadro de resultados lógicos (como el 24.54) es siempre único.

En una red de fiabilidad, los caminos y los cortes son generalmente visibles de manera directa. Veamos un ejemplo (figura 24.7).

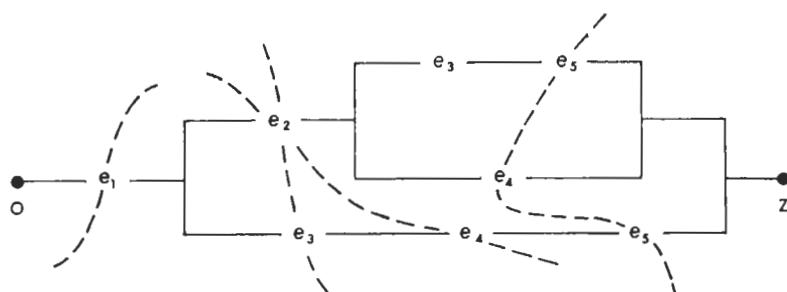


FIGURA 24.7

Se puede observar a simple vista que $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ y $\{e_1, e_2, e_4\}$ son caminos y también son caminos mínimos. Por otra parte, $\{e_1\}$, $\{e_4, e_5\}$ son cortes y también cortes mínimos, por el contrario $\{e_3, e_5\}$ no es un corte.

Pongamos de manifiesto ahora cómo se pasa de una función de estructura monótona a una red de fiabilidad y recíprocamente.

Dada la función de estructura:

$$24.72 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

se establece el cuadro funcional:

24.73

x_1	x_2	x_3	φ	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	←
1	0	0	0	
1	0	1	1	←
1	1	0	0	
1	1	1	1	←

$\{e_2 e_3\}$, $\{e_1, e_3\}$ y $\{e_1, e_2, e_3\}$ son caminos, pero sólo $\{e_2, e_3\}$ y $\{e_1, e_3\}$ son mínimos. Entonces basta con colocar en paralelo los caminos mínimos lo que proporciona la figura 24.8.

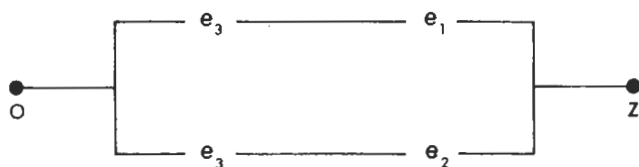


FIGURA 24.8

que se reduce a la figura 24.9:

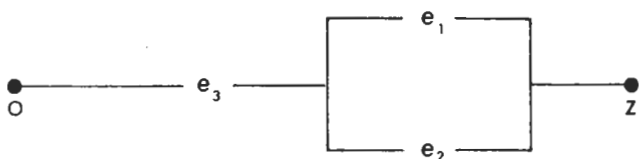


FIGURA 24.9

Se pueden utilizar también los cortes. Efectivamente $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_3\}$ son cortes, pero sólo $\{e_1, e_2\}$ y $\{e_3\}$ son mínimos. Se colocan en serie y se vuelve a encontrar la figura 24.9.

Para pasar de la red a la función se buscan todos los itinerarios de O a Z sin omisión ni repetición. Tomemos un ejemplo más complicado (figura 24.10).

Existen cuatro itinerarios distintos: OABDZ, OABCDZ, OACDZ, OACBDZ a los cuales les corresponden los caminos $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_3, e_4\}$. Los tres caminos $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, y $\{e_3, e_4\}$ son mínimos. Se les coloca en paralelo lo que proporciona la función.

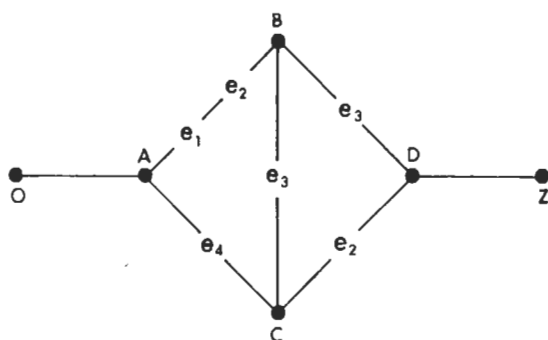


FIGURA 24.10

$$24.74 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_1 x_2 x_3)(1 - x_2 x_4)(1 - x_3 x_4)$$

a la cual corresponde también la red de la figura 24.11

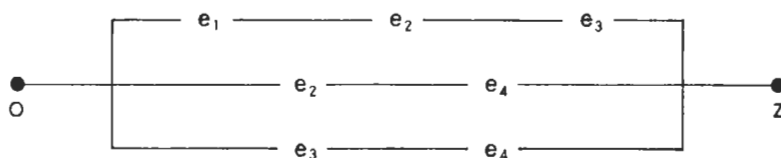


FIGURA 24.11

Vamos a aprovechar el ejemplo de la figura 24.10 para poner de manifiesto que las ramificaciones de una red de fiabilidad pueden ser orientadas (figura 24.12).

En esta coasión, sólo existen tres itinerarios distintos: OABDZ, OABCDZ, OACDZ, con los caminos $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ en donde dos de ellos se confunden. Finalmente existen dos caminos mínimos $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{e_2, e_4\}$. Por lo que la función φ será:

$$24.75 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - x_1 x_2 x_3)(1 - x_2 x_4)$$

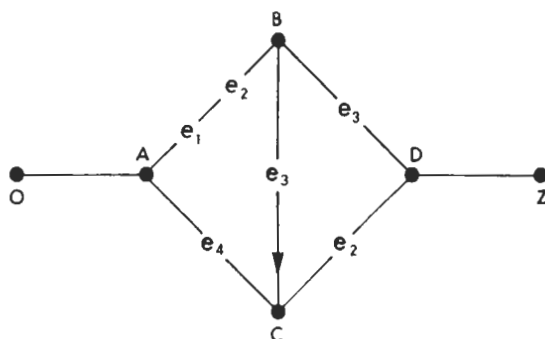


FIGURA 24.12

y la red de la figura 24.13:

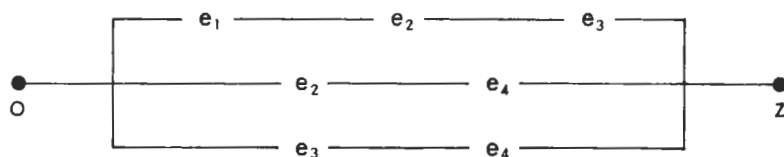


FIGURA 24.13

Veamos cómo se utiliza la noción de corte para los ejemplos de las figuras 24.10 y 24.12.

Puede observarse que, en la figura 24.10 existen 9 cortes: $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_3, e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_4\}$, $\{e_1, e_3, e_4\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Los cortes mínimos son $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_3, e_4\}$.

De la función φ siguiente:

$$\begin{aligned}
 24.76 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= [1 - (1 - x_1)(1 - x_4)] \cdot \\
 &\quad \cdot [1 - (1 - x_2)(1 - x_3)] \cdot \\
 &\quad \cdot [1 - (1 - x_2)(1 - x_4)] \cdot [1 - (1 - x_3)(1 - x_4)]
 \end{aligned}$$

La red correspondiente es la de la figura 24.14:

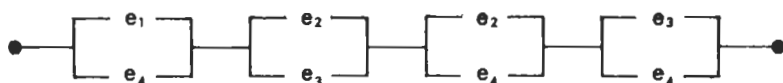


FIGURA 24.14

Se comprobará que (24.74) y (24.76) constituyen la misma función que puede escribirse:

$$24.77 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 x_4 + x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \\ - x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_4$$

En el supuesto de la figura 24.12 existen 11 cortes: $\{e_2\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_3, e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_4\}$, $\{e_1, e_3, e_4\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (el corte $\{e_2\}$ se obtiene teniendo en cuenta el sentido de la flecha; el corte que pasa por e_2, e_3 , e_2 no debe tener en cuenta a e_3). Quedan como cortes mínimos: $\{e_2\}$, $\{e_1, e_4\}$, $\{e_3, e_4\}$. Todo ello proporciona la función φ :

$$24.78 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot [1 - (1 - x_1)(1 - x_4)] \cdot \\ \cdot [1 - (1 - x_3)(1 - x_4)]$$

y la red correspondiente viene dada por la figura 24.15

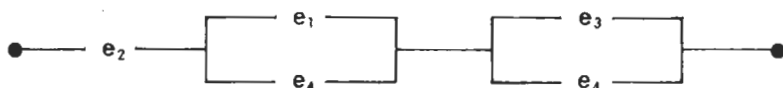


FIGURA 24.15

Las fórmulas (24.75) y (24.78) pueden escribirse:

$$24.79 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 x_4$$

Una interesante propiedad de las redes de fiabilidad viene dada por la propiedad de dualidad. Sea $\mathcal{R}$ una red de fiabilidad, existe una red $\mathcal{R}'$ llamada "dual" de $\mathcal{R}$ tal que: todo camino de $\mathcal{R}$ es un corte de $\mathcal{R}'$ y recíprocamente. Así, si consideramos las figuras 24.16 y 24.17

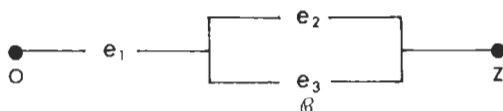


FIGURA 24.16

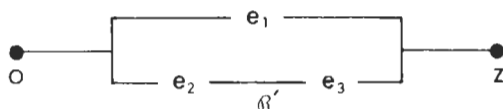


FIGURA 24.17

$\mathcal{R}'$ es el dual de $\mathcal{R}$ y recíprocamente.

Una red $\mathcal{R}$ puede ser su propio dual, como es el caso de la figura 24.18

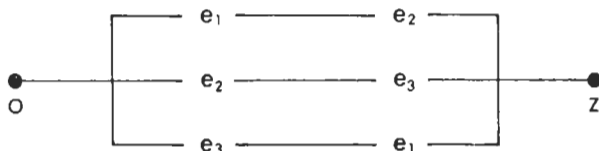


FIGURA 24.18

FUNCIONES DE FIABILIDAD

Vamos a pasar ahora de las funciones de estructura y de las redes de fiabilidad al concepto de función de fiabilidad haciendo intervenir las probabilidades de estado.

Consideremos un equipo formado por una estructura que comprende n componentes $e_1, e_2, \dots, e_n$. Supongamos que para cada componente

e_i se tiene conocimiento de la probabilidad p_i de que este componente funcione o, lo que es lo mismo, de la probabilidad $1 - p_i$ de que este componente no funcione. ¿Cuál es entonces la probabilidad de funcionamiento del equipo si los componentes son independientes en probabilidad entre sí en lo referente a las averías?

Veamos primero dos ejemplos simples (figuras 24.19a y 24.19b):



FIGURA 24.19a

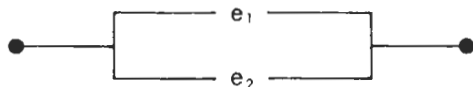


FIGURA 24.19b

Supongamos un equipo formado por dos componentes e_1 y e_2 tales que es necesario que los dos componentes funcionen para que lo haga el equipo (figura 24.19). Si se llama $h(p_1, p_2)$ la probabilidad que depende pues de la de e_1 y de la de e_2 , es evidente que se tiene:

$$24.80 \quad h(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$$

Si resulta suficiente que funcione un solo componente para que el equipo funcione (figura 24.19b) se tiene, evidentemente:

$$24.81 \quad h(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

Pero, para un equipo más complejo, ¿cómo se puede obtener esta probabilidad de funcionamiento?

Consideremos un equipo formado por n componentes $e_1, e_2, \dots, e_n$, que tienen respectivamente las probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$ de estar funcionando. Se establece la hipótesis de que los n componentes tienen paradas en su funcionamiento independientes entre sí. Se llamará "función de fiabilidad" a la probabilidad de funcionamiento del equipo expresada a partir de las probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$ es decir $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Para obtener la función de fiabilidad a partir de la red de fiabilidad o de la función de estructura, se utiliza un método llamado "método de la forma simple"

Volvamos a considerar el ejemplo de la función de estructura (24.67):

$$24.82 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_4)$$

Realicemos los productos:

$$24.83 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_4 - x_1 x_3 x_4 \\ - x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3 x_4$$

Pero, cualquiera que sea $r = 1, 2, 3, \dots$:

$$24.84 \quad x_i^r = x_i \quad (1)$$

En efecto, esto es lo mismo que admitir que el componente e_i es, en la red de fiabilidad en donde se halla colocado, r veces en serie consigo mismo. Aplicando la propiedad (24.84) y efectuando en caso necesario las sumas o diferencias, se obtiene una forma particular de la función φ llamada "forma simple" que se escribe φ_s . Así, en este ejemplo (24.83):

$$24.85 \quad \varphi_s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_4 - \\ - x_1 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

Desde un aspecto general, consideremos una función de estructura $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$; se llamará "forma simple de φ " una expresión de φ en la cual se habrán reducido todos los términos a partir de la propiedad (24.84) y efectuado, si resultan necesarias, las operaciones aditivas sobre el resultado obtenido.

Estamos ahora en disposición de proporcionar de inmediato la expresión de la función de fiabilidad; es suficiente sustituir las x_i de φ_s por las p_i y sustituir el símbolo φ por el símbolo h . De esta manera la función de fiabilidad de la red de la figura 24.20

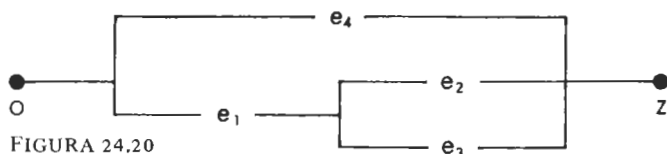


FIGURA 24.20

(1) Se observa que también puede ser aplicada la propiedad dual:

$$x_i \hat{+} x_i = x_i + x_i - x_i^2 = x_i + x_i - x_i = x_i$$

La idempotencia es cierta para $(.)$ y $(\hat{+})$ ($x_i \in \{0, 1\}$).

que corresponde a la función de estructura (24.82) de la que se ha obtenido la forma simple (24.85) es:

$$24.86 \quad h(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_4 + p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_4 - \\ - p_1 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 p_4$$

Resumamos este método. Se obtiene $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y luego $\varphi_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de donde, inmediatamente se halla $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Lo que justifica plenamente este método es el hecho de que la función de estructura proporciona una expresión lógica de las condiciones de funcionamiento en función de las variables de estado. Por otra parte, la red de fiabilidad equivalente a esta función de estructura puede trasponerse con la ayuda de la noción de camino o de corte a los ensamblajes paralelo-serie o serie-paralelo en donde las funciones de estructura corresponden a aquella que se está considerando. Evidentemente, la propiedad (24.84) es fundamental para pasar de φ a φ_s y de ahí a h .

Antes de continuar, enunciemos una propiedad evidente llamada de monotonía. Si, en una función de fiabilidad $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ una o varias p_i disminuye, la función h no puede en ningún caso aumentar. De la misma manera, si una o varias p_i aumenta la función h nunca podrá disminuir.

Por otra parte, recordemos también como se pasa de las condiciones lógicas a la función de estructura. Tal como se ha hecho en (24.73) se elabora el cuadro de las condiciones lógicas, luego se buscan los caminos, luego los caminos mínimos (respectivamente los cortes), lo cual permite construir φ . Hay que tener en cuenta que el cuadro de las condiciones lógicas debe satisfacer la monotonía, pues en caso contrario se caería en un error por contradicción. Seguidamente vamos a dar unos ejemplos.

24.87

x_1	x_2	x_3	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1

camino $x_2 x_3$ camino x_1

$$\varphi = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2 x_3)$$

camino $x_1 x_3$

1	1	0	0
1	1	1	1

camino $x_1 \ x_2 \ x_3$

24.88

x_1	x_2	x_3	φ	
0	0	0	0	
0	0	1	1	camino x_3
0	1	0	1	camino x_2
0	1	1	1	camino $x_2 \ x_3$
1	0	0	0	$\varphi = 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)$
1	0	1	1	camino $x_1 \ x_3$ no interviene x_1
1	1	0	1	camino $x_1 \ x_2$
1	1	1	1	camino $x_1 \ x_2 \ x_3$

24.89

x_1	x_2	x_3	φ	
0	0	0	0	cuadro incompleto
0	0	1	1	camino x_3
0	1	0	1	camino x_2
0	1	1	1	camino $x_2 \ x_3$
1	0	0	0	$\varphi(1, 1, 0) = 1$
1	0	1	1	$\varphi(1, 1, 1) = 1$
1	1	0	?	camino $x_1 \ x_2$ por lo tanto:
1	1	1	?	camino $x_1 \ x_2 \ x_3$ $\varphi = 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)$

Hay que subrayar que si un cuadro es incompleto y no puede ser completado por monotonía no puede proporcionar una función de estructura (da lugar a varias).

Pasemos ahora a las funciones de supervivencia. La función de supervivencia es una ley de probabilidad monótona no creciente que depende de

t. Si $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ son leyes de supervivencia de los equipos $e_1, e_2, \dots, e_n$, se pasará de $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ a $W(v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$ sustituyendo toda p_i por su homóloga $v_i(t)$. Así, la ley de supervivencia del equipo correspondiente a la red de la figura 24.20 se obtiene a partir de (24.86)

$$\begin{aligned} 24.90 \quad W(t) = & v_4(t) + v_1(t) \cdot v_2(t) + v_1(t) \cdot v_3(t) - v_1(t) \cdot v_2(t) \cdot v_4(t) \\ & - v_1(t) \cdot v_3(t) \cdot v_4(t) - v_1(t) \cdot v_2(t) \cdot v_3(t) + v_1(t) \cdot v_2(t) \cdot \\ & \cdot v_3(t) \cdot v_4(t) \end{aligned}$$

CURVAS DE SUPERVIVENCIA BORROSAS

Ahora nos hallamos en disposición de abordar el problema inicial de las curvas de supervivencia borrosa.

Se consideran primero las curvas de supervivencia en la incertidumbre a través del concepto de intervalo de confianza del tipo (24.2) que satisface la condición (24.1). Introducida esta condición, se puede trabajar con $V(t)$ relativa a un equipo formado por n componentes de los que se conoce, o bien se ha establecido, la función de estructura. Como consecuencia de las condiciones de monotonía introducidas, el paso de la probabilidad a los intervalos de probabilidad y después a los números borrosos no plantea grandes dificultades, sobre todo si los cálculos son realizados a través de la informática dado que éstos son de fácil programación.

Vamos a exponer un ejemplo sencillo de un equipo.

Se considera un sistema de 4 componentes e_1, e_2, e_3, e_4 . Las curvas de supervivencia inciertas de cada componente serán v_{i*} y v_i^* , $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} 24.91 \quad v_{1*}(t) = e^{-0.0866t} \quad , \quad v_1^*(t) = e^{-0.0630t} \\ 24.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24.93 \quad v_{2*}(t) = e^{-\frac{0.0138t^2}{2}} \quad , \quad v_2^*(t) = e^{-\frac{0.0061t^2}{2}} \\ 24.94 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24.95 \quad v_{3*}(t) = e^{-\frac{0.0054t^2}{2}} \quad , \quad v_3^*(t) = e^{-\frac{0.0042t^2}{2}} \\ 24.96 \end{aligned}$$

$$24.97 \quad v_{4*}(t) = e^{-0.1386t} \quad , \quad v_4^*(t) = e^{-0.0990t}$$

Por otra parte, las condiciones de funcionamiento vienen dadas por el cuadro de condiciones lógicas siguientes:

	x_1	x_2	x_3	x_4	φ	
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	1	$x_4 \leftarrow$
2	0	0	1	0	1	$x_3 \leftarrow$
3	0	0	1	1	1	$x_3 x_4$
4	0	1	0	0	0	
5	0	1	0	1	1	$x_2 x_4$
6	0	1	1	0	1	$x_2 x_3$
7	0	1	1	1	1	$x_2 x_3 x_4$
8	1	0	0	0	0	
9	1	0	0	1	1	$x_1 x_4$
10	1	0	1	0	1	$x_1 x_3$
11	1	0	1	1	1	$x_1 x_3 x_4$
12	1	1	0	0	1	$x_1 x_2 \leftarrow$
13	1	1	0	1	1	$x_1 x_2 x_4$
14	1	1	1	0	1	$x_1 x_2 x_3$
15	1	1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$

Los caminos mínimos vienen indicados por $\rightarrow$. La función de estructura es:

$$24.100 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_1 x_2)$$

La red de fiabilidad que corresponde a (24.100) viene dada por la figura 24.21

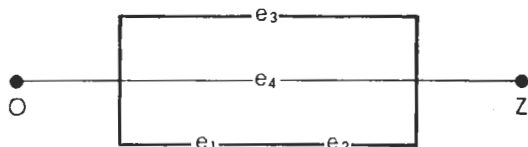


FIGURA 24.21

La función simple φ_s que corresponde a φ es la φ misma ya que ninguna x_i se encuentra más de una vez en 24.100.

Se tiene, pues:

$$24.101 \quad \varphi_s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 + x_4 + x_1 x_2 - x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 \\ - x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

De donde se obtiene directamente $v_*(t)$ y $v^*(t)$:

$$24.102 \quad v_*(t) = v_3^*(t) + v_4^*(t) + v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) - v_3^*(t) \cdot v_4^*(t) \\ - v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) \cdot v_3^*(t) - v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) \cdot v_4^*(t) \\ + v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) \cdot v_3^*(t) \cdot v_4^*(t)$$

$$24.103 \quad v^*(t) = v_3^*(t) + v_4^*(t) + v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) - v_3^*(t) \cdot v_4^*(t) \\ - v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) \cdot v_3^*(t) - v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) \cdot v_4^*(t) \\ + v_1^*(t) \cdot v_2^*(t) \cdot v_3^*(t) \cdot v_4^*(t)$$

Se van a calcular separadamente para los valores de $t = 0$ hasta $t = 40$ (por valor de 5) todos los monomios de (24.102) y (24.103) y se les añadirá o restará teniendo en cuenta los signos obtenidos.

Realizando los correspondientes cálculos al aplicar (24.102) y (24.103) a los datos de (24.91) a (24.98) se obtiene:

24,104

0	1	1
5	0.964	0.994
10	0.705	0.928
15	0.330	0.766
20	0.133	0.551
25	0.045	0.351
30	0.017	0.234
35	0.007	0.107
40	0.003	0.053

De donde se puede hallar la figura 24.22

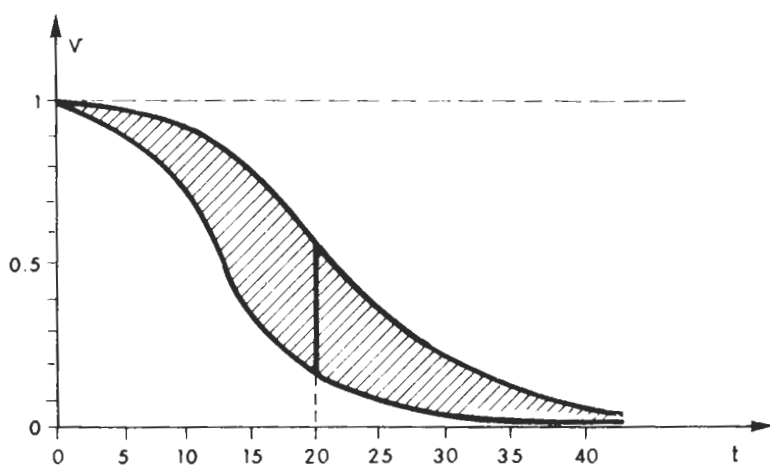


FIGURA 24.22

Si se quiere pasar de los intervalos de confianza de probabilidad a probabilidades borrosas se afectará a cada $v_i(t)$ una función de pertenencia y los cálculos serán los mismos pero nivel a nivel.

De hecho la teoría de la fiabilidad clásica puede ser recogida y genera-

lizada a los intervalos de confianza $[v_{i*}, v_i^*]$ y de ahí al ámbito borroso. De esta manera se puede estudiar (1) la redundancia, la canibalización, la renovación, las curvas de supervivencia con límite de funcionamiento, con garantía... y todos los problemas de optimización ligados a la fiabilidad.

Es posible, finalmente, elaborar muchos otros modelos relativos a problemas de fiabilidad en el campo de la incertidumbre, pues en este ámbito existe una mayor libertad que en el aleatorio.

El modelo a desarrollar depende, en gran medida, del fenómeno observado.

(1) Véase: KAUFMANN, A.: *La confiance technique. Théorie mathématique de la fiabilité*. Ed. Dunod, París.
KAUFMANN, A., GROUCHKO, D. y CRUON, R.: *Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes*. Ed. Masson, París.

La distribución espacial de las acciones comerciales

LA TAXONOMIA BORROSA

Resulta interesante poner de manifiesto la utilidad que puede tener lo que podría llamarse "taxonomía borrosa" en el problema de la elección o selección de direcciones sectoriales en una empresa. Parece razonable confiar a una misma dirección sectorial comercial los productos de características muy semejantes o incluso sectores en los que los perfiles que les caracterizan no son muy dispares; generalmente se facilita la gestión, los stocks son más sencillos de gestionar y frecuentemente menos importantes, los técnicos más interesados y mejor utilizados. Evidentemente existen otras razones que pueden hacer que se prefiera una separación estrictamente regional o especializada, todo depende de los productos, de los mercados, de los hombres y de las comunicaciones.

A través de un ejemplo muy simple se podrá observar cómo es posible utilizar la taxonomía borrosa.

Una empresa despliega su actividad en 7 mercados ($S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$) y se impone agrupar convenientemente estos mercados en direcciones comerciales adaptables a los productos distribuidos. Se supone que la empresa produce y distribuye 6 clases principales de productos C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 y C_6 . Se trata de obtener una configuración comercial que se adapte correctamente a los sectores (mercados) y a las clases de producto.

Supongamos también que resulta posible medir o valorar de 0 a 1 la buena adaptación de una clase de producto a un sector (mercado). En general, estos índices vienen dados subjetivamente por expertos cualificados aunque cuando sea posible es preferible establecer medidas (exhaus-

tivas o no, por sondeo, etc.) con objeto de tener informaciones más objetivas. Vamos a suponer que se dispone, para cada sector y cada clase de producto, de perfiles en los que aparecen los índices que acabamos de mencionar, tales como:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_1$:	0.4	1	0.3	0	0.3	1
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_2$:	0.4	0.6	0.9	0.3	0.8	0.4
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_3$:	0.7	0.2	0	0.6	1	0.7
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_4$:	0.1	1	1	0.1	0	0.2
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_5$:	0.3	0.8	0.2	0	0.1	1
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_6$:	0.9	0	0.9	1	0.7	0
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\underline{S}_7$:	1	0	0.8	0.9	0.6	0.1

De esta manera cada sector S_i constituye un subconjunto borroso, que se designará por $\underline{S}_i$, del referencial $\underline{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$.

Vamos a prestar atención a la distancia que separa cada $\underline{S}_i$ de cada $\underline{S}_j$. Para ello utilizemos la distancia de Hamming, en el bien entendido de que podríamos adoptar otra de las conocidas (1) si resultara más conveniente:

(1) Se puede tomar perfectamente la distancia cuadrática

$$d(\underline{S}_i, \underline{S}_j) = \sqrt{\sum_{x=1}^6 (\mu_{\underline{S}_i}(x) - \mu_{\underline{S}_j}(x))^2}$$

o bien otro tipo de distancia. En este caso hemos elegido la distancia de Hamming.

$$25.2 \quad d(\underline{s}_i, \underline{s}_j) = \sum_{x=1}^6 |\mu_{\underline{s}_i}(x) - \mu_{\underline{s}_j}(x)|, \quad x \in$$

y con objeto de obtener índices entre 0 y 1 vamos a normalizar (25.1), es decir:

$$25.3 \quad \delta(\underline{s}_i, \underline{s}_j) = \frac{1}{6} d(\underline{s}_i, \underline{s}_j)$$

Veamos cómo se calcula (25.3) en nuestro ejemplo:

$$\delta(\underline{s}_i, \underline{s}_j) = 0, \quad \forall (i=j)$$

$$\begin{aligned} \delta(\underline{s}_1, \underline{s}_2) &= \frac{1}{6} (|0.4-0.4| + |1-0.6| + |0.3-0.9| + |0-0.3| + \\ &\quad + |0.3-0.8| + |1-0.4|) = 0.40 \end{aligned}$$

25.4

$$\begin{aligned} \delta(\underline{s}_1, \underline{s}_3) &= \frac{1}{6} (|0.4-0.7| + |1-0.2| + |0.3-0| + |0-0.6| + \\ &\quad + |0.3-0.1| + |1-0.7|) = 0.50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\underline{s}_1, \underline{s}_4) &= \frac{1}{6} (|0.4-0.1| + |1-1| + |0.3-1| + |0-0.1| + \\ &\quad + |0.3-0| + |1-0.2|) = 0.36 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

La relación borrosa que sigue (anti-reflexiva y simétrica) es la relación de distancias y constituye una relación de desemejanza.

25.5

δ	$\underline{s}_1:$	$\underline{s}_2:$	$\underline{s}_3:$	$\underline{s}_4:$	$\underline{s}_5:$	$\underline{s}_6:$	$\underline{s}_7:$
$\underline{s}_1:$	0	0.40	0.50	0.36	0.10	0.75	0.70
$\underline{s}_2:$	0.40	0	0.40	0.33	0.43	0.38	0.40
$\underline{s}_3:$	0.50	0.40	0	0.73	0.50	0.45	0.43
$\underline{s}_4:$	0.36	0.33	0.73	0	0.36	0.61	0.60
$\underline{s}_5:$	0.10	0.43	0.50	0.36	0	0.78	0.73
$\underline{s}_6:$	0.75	0.38	0.45	0.61	0.78	0	0.08
$\underline{s}_7:$	0.70	0.40	0.43	0.60	0.73	0.08	0

Por comodidad tomemos la relación borrosa complementaria que es una relación de semejanza (reflexiva y simétrica).

25.6

$\tilde{R}$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0.60	0.50	0.64	0.90	0.25	0.30
2	0.60	1	0.60	0.67	0.57	0.62	0.60
3	0.50	0.60	1	0.27	0.50	0.55	0.57
4	0.64	0.67	0.27	1	0.64	0.39	0.40
5	0.90	0.57	0.50	0.64	1	0.22	0.27
6	0.25	0.62	0.55	0.39	0.22	1	0.92
7	0.30	0.60	0.57	0.40	0.27	0.92	1

Vamos a tomar los α -cortes, $\alpha = 0.92; 0.90; 0.67; 0.64; \dots$ y para cada relación $\tilde{R}_\alpha$ vamos a buscar las subrelaciones máximas de similitud, tal como se ha hecho en capítulos anteriores, empleando, de manera indistinta, el algoritmo de Lafosse-Marin-Kaufmann o el de Pichat. No van a detallarse los cálculos para hacer más ágil la lectura.

25.7

$\alpha = 0.92$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2		1					
3			1				
4				1			
5					1		
6						1	
7							1

1 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 4 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 5 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 6 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

25.8

$\alpha = 0.90$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1					1	
2		1					
3			1				
4				1			
5	1				1		
6						1	1
7						1	1

1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 4 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 5 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 6 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

25.9

$\alpha = 0.67$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1					1	
2		1		1			
3			1				
4		1		1			
5	1				1		
6						1	1
7						1	1

1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 4 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 5 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 6 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

25.10 $\alpha = 0.64$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1			1	1		
2		1		1			
3			1				
4	1	1		1	1		
5	1			1	1		
6						1	1
7						1	1

	1	4	5
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

	2	4
2	1	1
4	1	1

	3
3	1

	6	7
6	1	1
7	1	1

25.11 $\alpha = 0.62$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1			1	1		
2		1		1		1	
3			1				
4	1	1		1	1		
5	1			1	1		
6		1				1	1
7						1	1

	1	4	5
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

	2	4
2	1	1
4	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

	3
3	1

	6	7
6	1	1
7	1	1

25.12 $\alpha = 0.60$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1		1	1		
2	1	1	1			1	1
3		1	1				
4	1	1		1	1		
5	1			1	1		
6		1				1	1
7		1				1	1

	1	2	4
1	1	1	1
2	1	1	1
4	1	1	1

	1	4	5
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

	2	3
2	1	1
3	1	1

	2	6	7
2	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1

25.13 $\alpha = 0.57$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1		1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1
3		1	1				1
4	1	1		1	1		
5	1	1		1	1		
6		1				1	1
7		1	1			1	1

	1	2	4	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	3	7
2	1	1	1
3	1	1	1
7	1	1	1

	2	6	7
2	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1

25.14 $\alpha = 0.55$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1		1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1
3		1	1				1
4	1	1		1	1		
5	1	1		1	1		
6		1	1			1	1
7		1	1			1	1

	1	2	4	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	3	6	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

25.15 $\alpha = 0.50$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1		1	1		
5	1	1	1	1	1		
6		1	1			1	1
7		1	1			1	1

	1	2	3	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	4	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	3	6	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

25.16

 $\alpha = 0.40$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1		1	1	1
4	1	1		1	1		1
5	1	1	1	1	1		
6		1	1			1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	4	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	3	6	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

	2	4	7
2	1	1	1
4	1	1	1
7	1	1	1

25.17

 $\alpha = 0.39$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1		1	1	1
4	1	1		1	1	1	1
5	1	1	1	1	1		
6		1	1	1		1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	4	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	3	6	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

	2	4	6	7
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

25.18

 $\alpha = 0.30$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1		1	1	1
4	1	1		1	1	1	1
5	1	1	1	1	1		
6		1	1	1		1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	3	7
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
7	1	1	1	1

	1	2	4	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	4	7
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
7	1	1	1	1

	2	3	6	7
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

	2	4	6	7
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

25.19

 $\alpha = 0.27$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	7
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1

	2	3	4	6	7
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1

25.20

 $\alpha = 0.25$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	7
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	6	7
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1

25.21

$\alpha = 0.22$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Un análisis de (25.7) a (25.21), para los distintos niveles de α , resulta interesante para este tipo de problemas. Así, cuando se quiere especializar de una manera completa las direcciones de sector se puede descender hasta (25.10), es decir, $\alpha = 0.64$. A partir de aquí, ciertos sectores se adscribirán a las diversas direcciones y se puede jugar con el número de direcciones. Se observa que (25.14) proporciona solamente dos direcciones con un único sector S_2 que depende de dos direcciones. Esta puede ser la solución interesante. Esta descomposición en subrelaciones máximas de similitud, permite tomar decisiones que se justifican a través de diversos criterios. Volviendo a (25.14) se observa que esta solución permite una "agregación por afinidad" con una semejanza de perfiles igual o superior a 0.55, lo que representa un buen resultado para una agregación de este tipo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DUAL

Por su interés vamos a describir el problema dual.

Si se parte de (25.1) y se consideran las columnas C_j en lugar de las filas S_i se puede imaginar la agrupación de sectores según su afinidad por el conjunto de productos, lo que conduce a la presentación siguiente:

25.22

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
C_1 :	0.4	0.4	0.7	0.1	0.3	0.9	1
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
C_2 :	1	0.6	0.2	1	0.8	0	0
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
C_3 :	0.3	0.9	0	1	0.2	0.9	0.8

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇
$\underline{C}_4$:	0	0.3	0.6	0.1	0	1	0.9

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇
$\underline{C}_5$:	0.3	0.8	1	0	0.1	0.7	0.6

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇
$\underline{C}_6$:	1	0.4	0.7	0.2	1	0	0.1

Se calcularán las distancias de Hamming:

$$25.23 \quad d(\underline{C}_i, \underline{C}_j) = \sum_{y=1}^7 |\mu_{\underline{C}_i}(y) - \mu_{\underline{C}_j}(y)|, \quad y \in \underline{S}$$

y se procederá a su normalización:

$$25.24 \quad \delta(\underline{C}_i, \underline{C}_j) = \frac{1}{7} d(\underline{C}_i, \underline{C}_j)$$

De donde se obtiene la relación de distancias:

25.25

$\underline{R}$	$\underline{C}_1$:	$\underline{C}_2$:	$\underline{C}_3$:	$\underline{C}_4$:	$\underline{C}_5$:	$\underline{C}_6$:
$\underline{C}_1$:	0	0.65	0.35	0.15	0.24	0.45
$\underline{C}_2$:	0.65	0	0.50	0.75	0.67	0.25
$\underline{C}_3$:	0.35	0.50	0	0.40	0.37	0.72
$\underline{C}_4$:	0.15	0.75	0.40	0	0.28	0.58
$\underline{C}_5$:	0.24	0.67	0.37	0.28	0	0.52
$\underline{C}_6$:	0.45	0.25	0.72	0.58	0.52	0

y la de semejanza:

25.26

$\bar{\underline{R}}$	1	2	3	4	5	6
1	1	0.35	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.35	1	0.50	0.25	0.33	0.75
3	0.65	0.50	1	0.60	0.63	0.28

4	0.85	0.25	0.60	1	0.72	0.42
5	0.76	0.33	0.63	0.72	1	0.48
6	0.55	0.75	0.28	0.42	0.48	1

Tomando los α -cortes sucesivos, se obtiene:

25,27

$\alpha = 0.85$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1		
2		1				
3			1			
4	1			1		
5					1	
6						1

1	4
1	1
1	1

2
1

3
1

5
1

6
1

25,28

$\alpha = 0.76$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	
2		1				
3			1			
4	1			1		
5	1				1	
6						1

1	4
1	1
1	1

1	5
1	1
1	1

2
1

3
1

6
1

25,29

$\alpha = 0.75$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	
2		1				1
3			1			
4	1			1		
5	1				1	
6		1				1

1	4
1	1
1	1

1	5
1	1
1	1

2	6
1	1
1	1

3
1

25,30

$\alpha = 0.72$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	
2		1				1
3			1			
4	1			1	1	
5	1			1	1	
6		1				1

1	4	5
1	1	1
1	1	1

2	6
1	1
1	1

3
1

25.31

 $\alpha = 0.65$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	
2		1				1
3	1		1			
4	1			1	1	
5	1			1	1	
6		1				1

	1	3
1	1	1
3	1	1

	1	4	5
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.32

 $\alpha = 0.63$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	
2		1				1
3	1		1	1	1	
4	1			1	1	
5	1		1	1	1	
6		1				1

	1	3	5
1	1	1	1
3	1	1	1
5	1	1	1

	1	4	5
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.33

 $\alpha = 0.60$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	
2		1				1
3	1		1	1	1	
4	1		1	1	1	
5	1		1	1	1	
6		1				1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.34

 $\alpha = 0.55$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	1
2		1				1
3	1		1	1	1	
4	1		1	1	1	
5	1		1	1	1	
6	1	1				1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	6
1	1	1
6	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.35

 $\alpha = 0.50$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	1
2		1	1			1
3	1	1	1	1	1	
4	1		1	1	1	
5	1		1	1	1	
6	1	1				1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	6
1	1	1
6	1	1

	2	3
2	1	1
3	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.36

 $\alpha = 0.48$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	1
2		1	1			1
3	1	1	1	1	1	
4	1			1	1	
5	1		1	1	1	1
6	1	1			1	1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	5	6
1	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1

	2	3
2	1	1
3	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.37

 $\alpha = 0.42$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1	1	1	1
2		1	1			1
3	1	1	1	1	1	
4	1			1	1	1
5	1		1	1	1	1
6	1	1		1	1	1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	4	5	6
1	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

	2	3
2	1	1
3	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

25.38

 $\alpha = 0.35$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1			1
3	1	1	1	1	1	
4	1		1	1	1	1
5	1		1	1	1	1
6	1	1		1	1	1

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1

	1	2	6
1	1	1	1
2	1	1	1
6	1	1	1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	4	5	6
1	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

25.39

 $\alpha = 0.33$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1		1	1
3	1	1	1	1	1	
4	1		1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1		1	1	1

	1	2	3	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	5	6
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	4	5	6
1	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

25.40

 $\alpha = 0.28$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1		1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1		1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	5	6
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1

	1	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1

25.41

$\alpha = 0.25$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

Examinando las subrelaciones máximas de similitud obtenidas desde (25.27) a (25.41) se observa que el nivel más bajo, en el que todas las subrelaciones son disjuntas, es 0.60, en donde se encuentra $\{1, 3, 4, 5\}$ y $\{2, 6\}$ lo que puede resultar interesante en un problema como éste. Pero no debe exagerarse la importancia del caso en que la descomposición proporciona subrelaciones disjuntas, como acostumbra a considerarse en la teoría de los subconjuntos vulgares.

Existen ciertos problemas en que, por razones diversas, resulta conveniente la obtención de intersecciones o fronteras no vacías.

Para obtener sistemáticamente las *clases* (subrelaciones máximas disjuntas) basta con obtener:

$$25.42 \quad \hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots$$

deteniéndonos cuando $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n$

A título de ejemplo veamos lo que sucede para (25.26)

25.43

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.35	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.35	1	0.50	0.25	0.33	0.75
3	0.65	0.50	1	0.60	0.63	0.28
4	0.85	0.25	0.60	1	0.72	0.42
5	0.76	0.33	0.63	0.72	1	0.48
6	0.55	0.75	0.28	0.42	0.48	1

$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} =$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.35	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.35	1	0.50	0.25	0.33	0.75
3	0.65	0.50	1	0.60	0.63	0.28
4	0.85	0.25	0.60	1	0.72	0.42
5	0.76	0.33	0.63	0.72	1	0.48
6	0.55	0.75	0.28	0.42	0.48	1

o

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.35	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.35	1	0.50	0.25	0.33	0.75
3	0.65	0.50	1	0.60	0.63	0.28
4	0.85	0.25	0.60	1	0.72	0.42
5	0.76	0.33	0.63	0.72	1	0.48
6	0.55	0.75	0.28	0.42	0.48	1

 $=$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.55	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.55	1	0.50	0.50	0.50	0.75
3	0.65	0.50	1	0.65	0.65	0.55
4	0.85	0.50	0.65	1	0.76	0.55
5	0.76	0.50	0.65	0.76	1	0.55
6	0.55	0.75	0.55	0.55	0.55	1

25.44

 $\tilde{R}^3 = \tilde{R}^2 \circ \tilde{R}^1 =$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.55	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.55	1	0.50	0.50	0.50	0.75
3	0.65	0.50	1	0.65	0.65	0.55
4	0.85	0.50	0.65	1	0.76	0.55
5	0.76	0.50	0.65	0.76	1	0.55
6	0.55	0.75	0.55	0.55	0.55	1

 $\circ$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.35	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.35	1	0.50	0.25	0.33	0.75
3	0.65	0.50	1	0.60	0.63	0.28
4	0.85	0.25	0.60	1	0.72	0.42
5	0.76	0.33	0.63	0.72	1	0.48
6	0.55	0.75	0.28	0.42	0.48	1

 $=$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.55	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.55	1	0.55	0.55	0.55	0.75
3	0.65	0.55	1	0.65	0.65	0.55
4	0.85	0.55	0.65	1	0.76	0.55
5	0.76	0.55	0.65	0.76	1	0.55
6	0.55	0.75	0.55	0.55	0.55	1

25.45

$$\tilde{R}^4 = \tilde{R}^3 \circ \tilde{R} =$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.55	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.55	1	0.55	0.55	0.55	0.75
3	0.65	0.55	1	0.65	0.65	0.55
4	0.85	0.55	0.65	1	0.76	0.55
5	0.76	0.55	0.65	0.76	1	0.55
6	0.55	0.75	0.55	0.55	0.55	1

$$\circ =$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.35	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.35	1	0.50	0.25	0.33	0.75
3	0.65	0.50	1	0.60	0.63	0.28
4	0.85	0.25	0.60	1	0.72	0.42
5	0.76	0.33	0.63	0.72	1	0.48
6	0.55	0.75	0.28	0.42	0.48	1

$$=$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	0.55	0.65	0.85	0.76	0.55
2	0.55	1	0.55	0.55	0.55	0.75
3	0.65	0.55	1	0.65	0.65	0.55
4	0.85	0.55	0.65	1	0.76	0.55
5	0.76	0.55	0.65	0.76	1	0.55
6	0.55	0.75	0.55	0.55	0.55	1

25.46 nos detendremos aquí $\hat{R} = \tilde{R}^4 = \tilde{R}^3$.

Descompongamos ahora $\hat{R}$ a partir de los α -cortes 0,85, 0,76, etc. Se obtiene:

25.47

$$\alpha = 0.85$$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1		
2		1				
3			1			
4	1			1		
5					1	
6						1

$$1 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 2 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad 3 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad 5 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad 6 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

25.48

$$\alpha = 0.76$$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	
2		1				
3			1			
4	1			1	1	
5	1			1	1	
6						1

$$1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 2 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad 3 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad 6 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$\alpha = 0.75$

	1	2	3	4	5	6
1	1				1	1
2		1				1
3			1			
4	1			1	1	
5	1				1	1
6		1				1

	1	4	5
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

	3
3	1

$\alpha = 0.65$

	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	1
2		1				1
3	1		1	1	1	
4	1			1	1	1
5	1		1	1	1	
6		1				1

	1	3	4	5
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	2	6
2	1	1
6	1	1

$\alpha = 0.55$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

La ventaja de este esquema viene dada por cuanto los α -cortes proporcionan subrelaciones máximas disjuntas (clases de equivalencia). Su inconveniente reside en que toda la sensibilidad del análisis por semejanza queda muy mermada, la clasificación pierde sus matices. La transitividad hace que desaparezcan importantes propiedades.

LA TESIS DE PHUOC TRAN QUI SOBRE REGIONALIZACION ECONOMICA

La tesis de P. TRAN QUI (1), que vamos a presentar mediante una breve síntesis utiliza, para estudiar un espacio económico (en su caso el francés) con una división más o menos arbitraria en regiones, los conceptos de subconjunto borroso, distancia de Hamming, relación de semejanza y subrelación máxima de similitud por α -cortes, todo lo cual ha sido descrito en la primera parte de este capítulo.

Las informaciones introducidas en este importante trabajo son informaciones objetivas obtenidas a partir del sistema S.I.R.F. (Statistiques et

(1) Este tema se ha inspirado en el método empleado por PHUOC TRAN QUI en su tesis: *Régionalisation de l'économie et taxonomie floue. Application au cas de la France*. Facultad de Ciencias Económicas y de Gestión, Universidad de Dijon, 1977.

Indicateurs des Regions Françaises) utilizado por el "Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques" (I.N.S.E.E.) de Francia. Se trata de un sistema de gestión de series cronológicas (datos anuales) registrados a diversos niveles geográficos de este país (Departamento, Región, Zonas de estudio y de revitalización del territorio, Academia).

En esta tesis se ha establecido una separación en 21 regiones. La práctica totalidad de las informaciones proceden del S.I.R.F. y se han considerado 107 descriptores reagrupados en 6 apartados.

- Aparato productivo: 76 descriptores.
- Movimiento de la población, urbanización: 8 descriptores.
- Equipamiento familiar: 12 descriptores.
- Equipos sanitarios: 6 descriptores.
- Créditos a la industria y al comercio: 3 descriptores.
- Valor de las importaciones y exportaciones: 2 descriptores.

Parece interesante proporcionar la lista detallada de estos 107 descriptores tal como fueron definidos en el momento de la toma de datos.

a) Aparato productivo

Valor añadido. — 1) agricultura, 2) industria de la madera, 3) industria del vestido, 4) industria textil, 5) industria química y del caucho, 6) industria del automóvil, 7) construcción eléctrica y electrónica, 8) industria mecánica, 9) primera transformación y tratamiento de metales, 10) extracción de minerales y metalurgia de metales no ferrosos, 11) extracción de minerales y siderurgia, 12) industria del vidrio, 13) extracción y fabricación de materiales de la construcción y cerámica.

Importe de las inversiones en la industria. — 14) extracción y minerales, 15) industria mecánica y eléctrica, 16) bienes de equipo industriales, 17) construcción de automóviles, 18) construcción eléctrica y electrónica, 19) materiales de construcción y vidrio, 20) productos químicos y del caucho, 21) textil y vestido.

Establecimientos. — 22) de 100 asalariados o más, 23) de 1.000 asalariados y más, 24) número de domicilios sociales en las empresas más importantes por su facturación.

Número de asalariados en la industria. — 25) extracción de minerales y metalurgia, 26) industria mecánica y electrónica, 27) bienes de equipo industriales, 28) construcción de automóviles, 29) construcción eléc-

trica y electrónica, 30) materiales de la construcción y vidrio, 31) productos químicos y del caucho, 32) textiles y del vestido.

Efectivos asalariados en 1.º de Enero. — 33) transportes y servicios, 34) vivienda y obras públicas, 35) industria (excluida vivienda y obras públicas), 36) bienes de consumo, 37) bienes intermedios, 38) bienes de equipo, 39) agricultura.

Efectivos asalariados en 1.º de enero. Total general. — 40) mujeres, 41) hombres.

Efectivos asalariados por sector de establecimiento. — 42) industrias agrícolas y de la alimentación, 43) agricultura, 44) industria del carbón, 45) producción y distribución de electricidad, gas y agua, 46) refinería y distribución de petróleo, 47) extracción y fabricación de materiales de la construcción y cerámica, 48) industria del vidrio, 49) extracción de minerales de hierro y siderurgia, 50) extracción de minerales y metalurgia de materiales no ferrosos, 51) transformación y elaboración de metales, 52) industria mecánica, 53) construcciones eléctricas y electrónicas, 54) industria de la electrónica, 55) construcción naval y aeronáutica, 56) industria química y del caucho, 57) industria textil, 58) industria del vestido, 59) sociedades inmobiliarias, 60) otros servicios, 61) conjunto de comercios, 62) banca, seguros e instituciones financieras, 63) administraciones, 64) servicio doméstico, 65) industria del cuero, 66) industria de la madera, 67) industria papelera, 68) industrias poligráficas, prensa y editoriales, 69) transformación de materiales plásticos e industrias diversas, 70) vivienda y obras públicas, 71) transportes, 72) servicio de telecomunicaciones.

Valor en unidades monetarias del salario anual. — 73) obreros especializados asalariados a tiempo completo.

Consumo de energía. — 74) peso en miles de toneladas de equivalencia carbón de la energía industrial consumida, 75) consumo de coque en miles de toneladas, 76) consumo de fuel-oil en miles de toneladas.

b) Movimiento de la población, urbanización

Migraciones interiores. — 77) población que ha cambiado de región desde el último censo, 78) población activa que ha cambiado de población, 79) variación total de la población municipal, 80) población total que ha integrado el país desde el último censo, 81) población total que ha cambiado de provincia en la misma región desde el último censo, 82) población que ha cambiado de región desde el último censo.

Población urbana. — 83) población total de las comunidades urbanas (unidades urbanas).

Población rural. — 84) población total de las comunidades rurales.

c) Equipamiento familiar

Datos económicos de las familias. — 85) ahorro bruto, 86) consumo, 87) prestaciones sociales, 88) salarios netos, 89) rentas de las empresas individuales, 90) conjunto de los ingresos y empleos.

Número de familias equipadas por 100 familias. — 91) automóvil (diciembre), 92) refrigerador (diciembre), 93) lavadora (diciembre), 94) televisor, 95) teléfono (diciembre), 96) lavavajillas (diciembre).

d) Equipos sanitarios

Hospitales públicos. — 97) número de camas explotables.

Clínicas privadas. — 98) número de camas explotables.

Cuerpo médico y paramédico. — 99) número de médicos a principios de año, 100) número de farmacéuticos a principios de año, 101) número de cirujanos-dentistas, 102) número de asistentes sociales y auxiliares a principios de año.

e) Crédito a la industria y al comercio

Crédito hotelero, comercial e industrial, en miles de u.m. de préstamos. — 103) otorgados al comercio, 104) otorgados a la industria, 105) otorgados a los que prestan servicios y transportistas.

f) Valor de las importaciones y exportaciones

106) valor de las exportaciones en millones de unidades monetarias, 107) valor de las importaciones en millones de unidades monetarias.

Resulta evidente que la adaptación de este esquema a otros países comportaría, en muchos casos, la consideración de descriptores distintos e incluso a otra agrupación diferente.

A partir de los datos suministrados por el sistema S.I.R.F., el autor establece:

- 1) Un cuadro con los datos brutos para cada región.
- 2) El cuadro ha sido normalizado (es decir que todos los datos brutos de un mismo descriptor han sido convertidos en números que pertenez-

can a $[0,1]$ dividiendo cada dato bruto por el valor mayor de los datos brutos del mismo descriptor), cuadro de 21×107 .

- 3) Se ha tomado la distancia de Hamming normalizada entre todo par de región.
- 4) Se ha presentado la relación de desemejanza 21×21 .
- 5) Se ha establecido la lista de los α -cortes.
- 6) Han sido calculadas las subrelaciones máximas de similitud para todos los α -cortes con el algoritmo de Pichat.

Para poner de manifiesto el aspecto que toman los resultados, se puede señalar que para el corte $\alpha = 0.05407$ (es decir $\alpha \leq 0.05407$) de la relación de desemejanza, se puede estimar que las regiones agrupadas se asemejan mucho. Para subrelaciones máximas con un solo elemento se han obtenido 11 regiones, con dos elementos 5 grupos de regiones y con tres elementos 2 grupos de regiones.

Sobre los $1/2 (21 \times 21 - 21) = 210$ α -cortes que se deben analizar, el autor de la tesis sólo considera algunos que resultan interesantes por los cambios que aportan en las subrelaciones máximas de similitud.

TIPOLOGIA PARA LAS REGIONES PROPUESTA POR TRAN QUI

Vamos a sintetizar (1) las diversas observaciones de TRAN QUI quien llama "región taxonómica" a una subrelación máxima obtenida a un determinado nivel α .

El estudio de las relaciones de desimilitud colocadas por orden creciente de α pone de manifiesto que los agregados (subrelaciones máximas de similitud) de las regiones (las 21 regiones) varían muy poco.

Esta estabilidad de las regiones taxonómicas en relación a los reducidos valores del umbral de distancia d es una característica general de los resultados numéricos obtenidos. Se pueden extraer dos conclusiones: 1) por una parte sugiere que el método utilizado es poco sensible a las distancias d . Es un resultado muy satisfactorio en la medida en que las estadísticas de que se dispone no son demasiado buenas (se tendría un coste desproporcionado para conseguir las suficientemente afinadas). Una desviación en un sentido o en otro de los datos brutos en relación a la realidad no habría modificado de manera significativa los resultados cuando esta desviación repercute sobre los valores de las distancias d .

(1) La necesaria adaptación a un texto como el nuestro ha exigido una fuerte condensación. Para un estudio detallado se puede recurrir a la tesis de P. TRAN QUI.

Al mismo tiempo se puede aventurar que la elección de una distancia distinta a la de Hamming no aportaría muchas modificaciones sobre la tipología de las regiones taxonómicas que se desea construir, 2) por otra parte, como consecuencia de esta estabilidad, la interpretación de los resultados numéricos puede dejar de ser relevante para alguno de los valores α . De esta manera el autor de la tesis que comentamos sólo ha considerado una décima parte de las relaciones R_α obtenidas por el ordenador: el primer resultado, el décimo, el vigésimo, etc. Habida cuenta de las anteriores observaciones, este procedimiento de explotación de los resultados numéricos sólo hace que se pierda una ínfima parte de la información.

La tipología que propone P. TRAN QUI para las regiones se basa en las subrelaciones máximas que corresponden a cada α -corte considerado. Para $\alpha = 1$ todas las subrelaciones máximas son disjuntas. Inversamente, para el valor más pequeño de α de la relación de desemejanza R las regiones se reagrupan en una sola región taxonómica. De esta manera se ha adoptado la siguiente regla: las agregaciones de regiones o "regiones taxonómicas" constituidas a partir de las subrelaciones máximas son tanto más homogéneas en cuanto el valor de α es más pequeño. Inversamente, resultan tanto menos homogéneas en cuanto el valor de α es más elevado. El valor de α mide el grado de homogeneidad de las regiones taxonómicas. El método de clasificación elaborado permite disponer, no solamente una división del territorio de un país, sino de varias, tantas divisiones como relaciones R_α .

Al disponer de esta regla de interpretación, se pueden sugerir cuatro tipos de regiones entre las cuales las más originales parecen ser las "regiones borrosas", es decir, regiones administrativas que pueden pertenecer indiferentemente a varias regiones taxonómicas para un nivel bajo de α . Según parece es la primera vez que se ponen de manifiesto este tipo de regiones ya que los estudios relativos a la tipología de las regiones (o unidades espaciales elementales) se han basado hasta ahora en técnicas de clasificación que eliminan, por construcción, el aspecto impreciso de las realidades regionales.

Si el análisis de los resultados permite poner de manifiesto aquellas regiones que tienen características específicas, también conduce a la construcción de un sistema regional. Se puede utilizar este sistema, bien para delimitar el marco espacial de las encuestas estadísticas (la utilización de grandes regiones presenta la ventaja de evitar retrasos y un coste excesivamente elevado para diversos estudios), bien para la elaboración de modelos que describan relaciones de interacción entre el nivel regional y el nivel nacional, o, mejor todavía, para elaborar modelos que intentan expre-

sar el mecanismo de evolución regional, que se reduce, de hecho, al de la diferenciación regional.

Vamos a detenernos aquí, en el breve resumen del apasionante trabajo de TRAN QUI, el cual, referido como se ha señalado a Francia, va más lejos al ligar su investigación con los diversos planes elaborados en este país sobre el importante problema de la regionalización.

Lo que hemos pretendido con la cita y descripción de este trabajo es que los métodos utilizados a partir de la teoría de los subconjuntos borrosos son, no solamente muy interesantes desde un punto de vista teórico, sino todavía más a efectos de su utilización práctica. El concepto de subrelación máxima de similitud en las relaciones borrosas de semejanza constituye una novedad que surge de esta teoría. Este concepto es fundamental, generaliza el concepto matemático de clase, está mucho más cercano de todas las formas de lo real y no prescinde de las complicaciones naturales en un deseo exagerado de simplificación.

El problema de la regionalización es también el de la organización y de la diversificación de las empresas. La comprensión de las partes para comprender mejor el todo constituye la forma humanista del espíritu cartesiano. Deseamos que los analistas de la investigación operativa no hagan lo mismo que los especialistas en informática (no todos afortunadamente) quienes simplifican demasiado con objeto de obtener un formalismo aparentemente más claro. La complicación engendra la libertad, la vida nace de la complicación y para que una organización se encuentre viva, desde lo biológico hasta lo socioeconómico, es necesario respetar la complicación. Comprender lo complicado ha constituido siempre la voluntad de los hombres hacia el conocimiento.

Consideraciones finales

Los rápidos cambios que se producen en la actividad económica como consecuencia de las constantes innovaciones tecnológicas y la incidencia que la acción de las medidas de política económica, financiera y fiscal de los gobiernos ejerce sobre el marco en que se desenvuelve la vida de las empresas, hacen que éstas deban moverse, en estos momentos, en un ambiente en que la incertidumbre del futuro constituye un elemento primordial que impide una gestión apoyada en las técnicas habitualmente adaptadas para resolver los problemas que se plantean, día tras otro, en el desarrollo de la actividad productiva.

En un pasado más o menos inmediato resultaba posible hacer estimaciones sobre magnitudes futuras tomando como referencia los datos de que se disponía, al admitir que el contexto en que se desenvolvían las empresas no iba a variar sustancialmente. Así, los estudios económicos de las empresas se elaboran con ayuda de unos esquemas basados unas veces en la certeza y otras en términos de probabilidad. Creer hoy que esto continúa siendo posible sería, en gran cantidad de casos, engañarnos a nosotros mismos.

Y sin embargo, gracias a los enormes avances producidos en los ordenadores, cada vez somos capaces de recoger una mayor cantidad de datos y proceder con ellos a una variada gama de operaciones con una rapidez tan grande que el tiempo de realización prácticamente no cuenta. Conocer el pasado, controlar la gestión realizada... son objetivos ya alcanzados gracias al tratamiento de la información. Pero no termina aquí la labor de una buena gestión, si los conocimientos adquiridos no pueden servir para tomar decisiones. Entonces, ¿qué hacer con estos datos históricos si no se

dispone de esquemas que permitan trasladarlos hacia el futuro con ciertas garantías de aplicabilidad?

También es cierto, afortunadamente, que siguen siendo válidos, en gran cantidad de circunstancias, los esquemas que tradicionalmente suministran los estudios económicos con base en la certeza y la probabilidad. Y existe un principio que resulta conveniente destacar: cuando sea posible cuantificar hay que hacerlo, sólo cuando nos vemos imposibilitados de ello se debe recurrir al tratamiento de los problemas en el ámbito de la incertidumbre.

Hasta no hace mucho, las posibilidades que ofrecía este campo de estudio eran limitadas (técnicas basadas en la teoría de errores, en los intervalos de confianza...). Pero con el desarrollo de la teoría de los subconjuntos borrosos, se ha abierto una amplia perspectiva a la utilización de nuevos esquemas para la gestión, como está sucediendo en otras varias ramas del saber (medicina, semántica, sociología...) sobre todo en aquellas en que el hombre se relaciona con sus semejantes, dado que refleja de manera muy fidedigna el comportamiento del cerebro humano.

En efecto, para las relaciones hombre-máquina, y el caso más representativo es la del hombre con el ordenador, las instrucciones deben ser precisas e inequívocas, deben tener una y sólo una lectura. Las cosas son buenas o malas, positivas o negativas, de ahí la gran utilidad del álgebra booleana, gracias a la cual se ha producido la revolución informática que nos ha entusiasmado, nos entusiasma y nos continuará entusiasmando aún durante mucho tiempo.

Pero esta maravillosa máquina paralela que es el cerebro humano no se limita al sí o no, sino que es capaz de concebir toda una gama de situaciones intermedias. La rigidez de la mecánica se convierte en sutileza cuando se trata del razonamiento de los hombres. Y esto es susceptible de ser formalizado a través de técnicas basadas en el álgebra borrosa, cuya utilización para el tratamiento de la incertidumbre en la gestión presentamos en esta obra.

Para ello se ha dividido el trabajo en tres partes. La primera reúne los elementos teóricos básicos que serán aplicados posteriormente para la elaboración de las técnicas y para la resolución de problemas de gestión. En ella se pone de manifiesto la insuficiencia de los esquemas tímidamente utilizados hasta ahora, como la teoría de errores y los intervalos de confianza. Queda también de manifiesto que ambas *teorías* constituyen casos particulares de la teoría de los subconjuntos borrosos que de esta manera se presenta con una mayor generalización que las mismas.

La segunda, que es la parte central de este trabajo, está formada por un grupo de esquemas que son susceptibles de ser utilizados para la solu-

ción de diversos problemas que se pueden plantear en el ámbito de la gestión. En determinados casos se trata de técnicas clásicas que han sido transformadas convenientemente para que resultaran aptas para el tratamiento de la incertidumbre, en otros constituyen una nueva incorporación a este campo, desde otras parcelas del conocimiento. Finalmente se han incluido nuevos esquemas que creemos pueden ser útiles en una situación, como la actual, regida por una rápida mutación de los fenómenos que en ella se producen y por la incertidumbre que plantean la estimación de las situaciones futuras.

La tercera comprende algunas aplicaciones para la solución de problemas concretos en ámbitos tan diversos como son la inversión o renovación de equipos y la gestión de personal, por ejemplo. La obligada limitación de esta obra nos ha aconsejado reducir este grupo de temas que, por otra parte, son el objeto específico de un trabajo publicado en 1986 (1).

El objetivo perseguido ha consistido en poner de manifiesto, a través de ejemplos de aplicación, las posibilidades de tratamiento de los problemas de gestión en ambiente incierto. Es evidente que 16 capítulos no son muchos en relación a la existencia de miles de modelos matemáticos aplicados a la economía en general y a la investigación operativa y gestión de empresas en particular. Pero en realidad, si fuera necesario, la extensión al ámbito borroso se puede realizarse para todos los modelos, cuando no es posible aceptar ni la certeza ni la aleatoriedad. Nos hemos limitado a presentar una muestra a partir de la cual se pueden elaborar otros muchos modelos. Se habrá podido observar que la extensión al ámbito borroso no resulta excesivamente complicado aunque exija ciertas precauciones, como en cualquier otro tipo de extensión.

Ha sido una preocupación constante la incorporación de ejemplos a lo largo del texto, intentando, a la vez, no abusar del formalismo matemático, para responder así a la demanda de ejecutivos, ingenieros y economistas, conscientes de que actuando de esta manera dejaríamos insatisfechos a algunos matemáticos puros que no son muy partidarios de estos planteamientos. Sin embargo, estamos convencidos de que la mejor manera de transmitir un mensaje y hacerlo comprensible es a través de un ejemplo.

La obra presentada ha servido de pauta, antes de ser elaborada en su totalidad, a numerosos seminarios que los autores han impartido unas

(1) KAUFMANN A. y GIL ALUJA J.: *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.

veces de manera individual otras conjuntamente, lo que ha servido para comprobar el aspecto didáctico de los modelos. De esta manera, nos sentimos más convencidos de que el texto responde a la necesidad de poner al día a los lectores en estas técnicas de gestión. El tiempo que los ejecutivos consagran para poner al día sus conocimientos es desgraciadamente insuficiente en una época en que éstos aumentan con crecimiento exponencial. Es por ello que toda didáctica debe ser rápida, lo que no debe impedir para que más adelante se tomen todo el tiempo necesario para reflexionar y crear por sí mismos.

Porque, en definitiva, la finalidad es la creación por uno mismo. A partir de las informaciones recibidas, crear sus propios modelos, utilizar esta "caja de oro" que es nuestra imaginación. Y esta alternancia aprender-imaginar resulta tan agradable...